水面上に浮動する無限に広い板の振動

——一般式の誘導[1)]——

正員　喜　内　敏*

VIBRATION OF INFINITE PLATES FLOATING ON THE SURFACE OF WATER

by Dr. Eng., Bin Kinai, C.E. Member

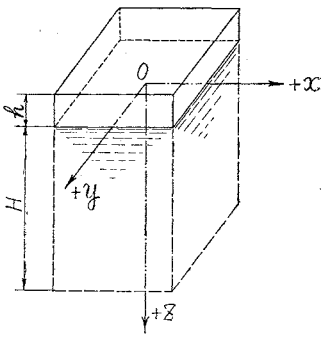
Synopsis : In this paper the author deduces general formulas for the deflections of plates, floating on the surface of water and bearing fluctuating loads which move with a variable speed on that plate.

要　旨　移動する振動荷重が水面上に浮動する無限に広い板上に作用するとき，この板のたわみ振動を示す一般式を求めた。青松健一氏は<形板上を振動しない一定の大きさの荷重が等速度で一定方向に移動する場合を積分方程式を用いて解き，この解を無限に広い板の場合に拡張している。ただし，板の減衰係数および初期条件を考慮していない。Cauchy-Poisson の Surface wave に関する問題[2)]は水面が自由なる場合であるが，ここでは水面上に弾性板がある所に差異がある。

1. 流体の連続方程式並びに初期条件式および境界条件式

水は完全な液体であつて圧縮されないものとし，x, y 軸を静水面上に直角にとり，z 軸は xy 面に垂直とし，下向の方向を正とする。

図—1



初め水は無渦運動をしているとする。ϕ を Velocity—potential とすると連続方程式は次の Laplace の方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

初期条件として，時間 t が零のとき水面の下降を $f(x, y)$，水面の下降速度を $g(x, y)$ とすれば

$$[w(x, y; t)]_{t=0}=f(x, y) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\left[\frac{\partial w(x, y; t)}{\partial t}\right]_{t=0}=g(x, y) \quad \cdots\cdots (3)$$

である。ここに $w(x, y; t)$ は t 時における板の x, y 点のたわみを示す。$w(x, y; t)$ は水深 H と比較して非常に小さいから，大体次のように書いて差しつかいない[3)]。

$$f(x, y)=-\left[\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0}\right]_{t=0} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$g(x, y)=\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0}\right]_{t=0} \quad \cdots\cdots (5)$$

ここに g は重力の加速度である。境界条件は，$x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$ において

$$w(x, y; t)=0 \quad \cdots\cdots (6)$$

また，池の底面において，$z=H$ のとき

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots (7)$$

次に Bernoulli の定理により，外力の Potential として重力のみを考え，かつ水の各部分の速度は小さいとして，その自乗の項を省略すれば水面における圧力方程式は

$$p=\gamma w-\frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに，γ は水の単位体積の重量である。ゆえに弾性板の水面における境界条件の式として次式をうる。

* 工学博士，金沢大学教授，工学部土木教室

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\rho h}{gN}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2k\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{1}{N}\left\{\gamma w-\frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0}\right\}$$
$$=\frac{1}{N}\psi(\xi,\eta;t) \quad\cdots\cdots(9)$$

ここに，ρ は板の単位体積の重量，h は板の厚さ，k は板の減衰係数，N は板の剛度にして $N=Eh^3/\{12(1-\sigma^2)\}$，$E$ は板のヤング係数，σ は板のポアソン比，$\psi(\xi,\eta;t)$ は単位面積当りの外力にして ξ，η は外力の作用点を示す。なお，板のたわみによる板面の傾斜は緩いものとし，板のたわみによつて z 方向にのみ水の運動が起るものと考えれば

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} \quad\cdots\cdots(10)$$

とおける。

2. 公式の誘導

Fourier 積分公式より[4)]

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\iint_0^\infty d\alpha\, d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\xi\, d\eta \quad\cdots\cdots(11)$$

であるから

$$\phi\propto\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\} \quad\cdots\cdots(12)$$

とおいて，(1) 式に代入すると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-(\alpha^2+\beta^2)\phi=0 \quad\cdots\cdots(13)$$

となる。これを解いて

$$\phi=\left\{Ae^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+Be^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right\}\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\} \quad\cdots\cdots(14)$$

をうる。次に (7) 式の条件より

$$B=Ae^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad\cdots\cdots(15)$$

となる。これを (14) 式に代入して次式の様になる。

$$\phi=A\left\{e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right\}\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\} \quad\cdots\cdots(16)$$

次に，(9) 式の両辺を t について微分すれば

$$\frac{\partial^5 w}{\partial t\,\partial x^4}+2\frac{\partial^5 w}{\partial t\,\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^5 w}{\partial t\,\partial y^4}+\frac{\rho h}{gN}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}+2k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$
$$+\frac{1}{N}\left\{\gamma\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0}\right\}=\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad\cdots\cdots(17)$$

をうる。(10) 式の関係を考慮して，(16) 式を (17) 式に代入して整理をすると

$$\mathfrak{E}\frac{d^2A}{dt^2}+2\mathfrak{F}\frac{dA}{dt}+\mathfrak{G}A=\mathfrak{K} \quad\cdots\cdots(18)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}&=1+\frac{\rho h}{\gamma}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\\
\mathfrak{F}&=k\frac{\rho h}{\gamma}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\\
\mathfrak{G}&=\left\{1+\frac{N}{\gamma}(\alpha^2+\beta^2)^2\right\}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot g\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\\
\mathfrak{K}&=-\frac{g}{\gamma}\frac{1}{1+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(19)$$

となり，この式を初期条件を考慮し，第2種 Laplace 変換により解くと

$$A_{(t)}=\frac{1}{\mathfrak{E}}L_2^{-1}\left(\frac{L_2\mathfrak{K}}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}}\right)+A_{(0)}L_2^{-1}\left(\frac{p^2}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right)$$
$$+\left\{\dot{A}_{(0)}+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}A_{(0)}\right\}L_2^{-1}\left(\frac{p}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right)$$

を得て，これより Laplace 変換の逆変換を施し次の様になる。

$$A_{(t)}=\frac{1}{\mathfrak{E}}L_2^{-1}\left[\frac{L_2\mathfrak{K}}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right]-A_{(0)}\frac{\sqrt{\mathfrak{G}/\mathfrak{E}}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\cdot$$

$$\times\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\,t-\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}{\mathfrak{F}/\mathfrak{E}}\right)$$

$$+\left\{\dot{A}_{(0)}+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}A_{(0)}\right\}\frac{1}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(20)$$

(20) 式を (16) 式に代入して

$$\phi=\left[\frac{1}{\mathfrak{E}}L_2^{-1}\left(\frac{L_2\mathfrak{K}}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right)-A_{(0)}\frac{\sqrt{\mathfrak{G}/\mathfrak{E}}}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\cdot\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)\times\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\,t\right.\right.$$

$$\left.\left.-\tan^{-1}\frac{\sqrt{\mathfrak{G}/\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2/\mathfrak{E}^2}}{\mathfrak{F}/\mathfrak{E}}+\left\{\dot{A}_{(0)}+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}A_{(0)}\right\}\frac{\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t\right)\right]$$

$$\times\left\{e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right\}\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(21)$$

をうる。さらに（2）式，（3）式，（4）式および（5）式を用い，(11) 式を参照して，

$$\left.\begin{aligned}\dot{A}_{(0)}&=-\frac{g\cdot f(\xi,\eta)}{1+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\\ A_{(0)}&=\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(22)$$

となり，この式を (21) 式に代入して整理をすると次の様になる。

$$\phi=\left\{\left\{\frac{1}{\mathfrak{E}}L_2^{-1}\left[\frac{L_2\mathfrak{K}}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right]+\frac{\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\left[-\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}\right.\right.\right.$$

$$\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t-\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}{\mathfrak{F}/\mathfrak{E}}\right)+\left\{-\frac{g\cdot f(\xi,\eta)}{1+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}\cdot\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}\right\}\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t\right)\right]\right\}\right\}$$

$$\times\left(e^{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(23)$$

次に (10) 式の関係を用いて

$$w=\int_0^t\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(24)$$

とおけるから，(11) 式を考慮し (23) 式より次のようになる。

$$w_{(x,y;t)}=\frac{1}{\pi^2}\iint_0^\infty d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^\infty d\xi\,d\eta\int_0^t\left\{\left\{\frac{1}{\mathfrak{E}}L_2^{-1}\left[\frac{L_2\mathfrak{K}}{p^2+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right]\right.\right.$$

$$+\frac{\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)}{\sqrt{\mathfrak{G}/\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2/\mathfrak{E}^2}}\cdot\left[-\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})}\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right.$$

$$\times\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t-\tan^{-1}\frac{\sqrt{\mathfrak{G}/\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2/\mathfrak{E}^2}}{\mathfrak{F}/\mathfrak{E}}\right)+\left\{-\frac{g\cdot f(\xi,\eta)}{(1+e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})}\right.$$

$$+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}\cdot\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})}\Bigg\}\times\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t\right)\Bigg]\Bigg)\Bigg)$$

$$\cdot\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{2H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right\}\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}dt \quad\cdots\cdots (25)$$

ゆえに，外力による強制振動を示す項を $w_{I(x,y;t)}$，初期条件による振動を示す項を $w_{II(x,y;t)}$ とおけば

$$w_{(x,y;t)}=w_{I(x,y;t)}+w_{II(x,y;t)} \quad\cdots\cdots (26)$$

となる。

3. 強制振動の一般式

(25) 式より強制振動に関する項を示すと

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{1}{\pi^2}\frac{g}{\gamma}\iint_0^\infty d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\int_0^t\frac{1}{\mathfrak{E}}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\cdot$$

$$\times\left[L_2^{-1}\frac{L_2\left\{\dfrac{\partial\psi(\xi,\eta;t)}{\partial t}\right\}}{p^2+2\dfrac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}p+\dfrac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\right]\cdot\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}dt \quad\cdots\cdots (27)$$

となる。これより，$\psi_{(t)}$ に p 函数が作用する時の Laplace 変換の公式を用いて，次の様に示すことができる。

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{4\pi^2\gamma}\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\int_0^t\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}(t-\tau)\right\}\sin\left\{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\left(\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}\right)^2}(t-\tau)\right\}\cdot\psi_{(\xi,\eta;\tau)}\cdot$$

$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\tau \quad\cdots\cdots (28)$$

板の減衰係数を考慮せぬときは，$\mathfrak{F}=0$ となり次式をうる。

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{4\pi^2\gamma}\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\,dq\int_0^t\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{E}}}\times\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\cdot$$

$$\sin\left\{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}(t-\tau)\right\}\psi_{(\xi,\eta;\tau)}\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\tau \quad\cdots\cdots (29)$$

なお，$\alpha=\lambda\cos\theta$，$\beta=\lambda\sin\theta$ として極座標に変換すると，(28) 式より

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{4\pi^2\gamma}\int_0^\infty d\lambda\int_0^{2\pi}d\theta\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\int_0^t\exp\left[-k(t-\tau)\Big/\left\{\frac{\gamma}{\rho h\lambda}\coth(H\lambda)+1\right\}\right]\cdot$$

$$\times\frac{\lambda\cdot\cos\{\lambda(x-\xi)\cos\theta+\lambda(y-\eta)\sin\theta\}}{\sqrt{\left\{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}\right\}\left(1+\dfrac{N}{\gamma}\lambda^4\right)g-\left(k\dfrac{\rho h}{\gamma}\right)^2}}$$

$$\times\sin\left[\frac{\sqrt{\left\{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}\right\}\left(1+\dfrac{N}{\gamma}\lambda^4\right)g-\left(k\dfrac{\rho h}{\gamma}\right)^2}}{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}}\cdot(t-\tau)\right]$$

$$\times\psi_{(\xi,\eta;\tau)}d\tau \quad\cdots\cdots (30)$$

となり，また (29) 式より次式をうる。

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{4\pi^2\gamma}\int_0^\infty d\lambda\int_0^{2\pi}d\theta\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi\,d\eta\int_0^t\frac{\lambda\cdot\cos\{\lambda(x-\xi)\cos\theta+\lambda(y-\eta)\sin\theta\}}{\sqrt{\left\{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}\right\}\left(1+\dfrac{N}{\gamma}\lambda^4\right)g}}$$

$$\times\sin\left\{\sqrt{\frac{\left(1+\dfrac{N}{\gamma}\lambda^4\right)g}{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}}}\cdot(t-\tau)\right\}\cdot\psi_{(\xi,\eta;\tau)}d\tau \quad\cdots\cdots (31)$$

次に，集中荷重 $Q_{(t)}$ が座標原点に作用するとき，(30) 式より

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{4\pi^2\gamma}\Re\int_0^\infty d\lambda\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi}e^{i(\lambda x\cos\theta+\lambda y\sin\theta)}\cdot$$

$$\times\frac{\lambda\cdot\exp\left\{-\dfrac{k(t-\tau)}{\dfrac{\gamma}{\rho h\lambda}\coth(H\lambda)+1}\right\}}{\sqrt{\left\{\dfrac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\dfrac{\rho h}{\gamma}\right\}\left(1+\dfrac{N}{\gamma}\lambda^4\right)g-\left(k\dfrac{\rho h}{\gamma}\right)^2}}$$

$$\times\sin\left[\frac{\sqrt{\left\{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}\right\}\left(1+\frac{N}{r}\lambda^4\right)g-\left(k\frac{\rho h}{r}\right)^2}}{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}}(t-\tau)\right]\times Q(\tau)d\theta$$

となるから，結局次のごとく示される。

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{2\pi r}\int_0^\infty d\lambda\int_0^t J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\times\frac{\lambda\cdot\exp\left\{-\frac{k(t-\tau)}{\frac{r}{\rho h\lambda}\coth(H\lambda)+1}\right\}}{\sqrt{\left\{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}\right\}\left(1+\frac{N}{r}\lambda^4\right)g-\left(k\frac{\rho h}{r}\right)^2}}$$

$$\times\sin\left[\frac{\sqrt{\left\{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}\right\}\left(1+\frac{N}{r}\lambda^4\right)g-\left(k\frac{\rho h}{r}\right)^2}}{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}}\cdot(t-\tau)\right]Q(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(32)$$

ここに J_0 は零次の Bessel 函数を表わす，なお，減衰係数 k を考えない場合には

$$w_{I(x,y;t)}=\frac{g}{2\pi r}\int_0^\infty d\lambda\int_0^t\frac{\lambda\cdot J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{\left\{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}\right\}\left(1+\frac{N}{r}\lambda^4\right)g}}\cdot$$

$$\times\sin\left\{\sqrt{\frac{(1+N\lambda^4/r)g}{\frac{1}{\lambda}\coth(H\lambda)+\frac{\rho h}{r}}}(t-\tau)\right\}Q(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(33)$$

4. 初期条件による振動の一般式

(25) 式より，初期条件による振動に関する項を計算して整理をすると次の様になる。

$$w_{II(x,y;t)}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}\left[g(\xi,\eta)\frac{\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)}{\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t\right)\right.$$

$$+\left\{f(\xi,\eta)\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}g\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2})+2\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}}g(\xi,\eta)\right\}\cdot$$

$$\left.+\left\{1-\exp\left(-\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}t\right)\sqrt{\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}-\frac{\mathfrak{F}^2}{\mathfrak{E}^2}}\cdot t-\tan^{-1}\frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{G}\mathfrak{E}-\mathfrak{F}^2}}\right)\right\}\right]\cdot$$

$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\xi\,d\eta \quad\cdots\cdots(34)$$

なお，板の減衰係数 k を考えないとき

$$w_{II(x,y;t)}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\alpha\,d\beta\iint_{-\infty}^{\infty}\left[g(\xi,\eta)\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}t\right)\right.$$

$$\left.+f(\xi,\eta)\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}g\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\tanh(H\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left\{1-\cos\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}t\right)\right\}\right]$$

$$\times\cos\{\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)\}d\xi\,d\eta \quad\cdots\cdots(35)$$

となる。

参考文献

1) 土木学会第7回年次学術講演会において概要を発表
2) H. Lamb: Hydrodynamics, 1932, pp. 384～391.
3) H. Lamb: 同　上, pp. 363～364.
4) R. Courant und D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I, 1931, s. 67.

（昭. 32. 5. 7）

昭和33年2月25日 印刷
昭和33年2月28日 発行

土木学会論文集第54号　　定価 120 円 (〒 20 円)

編集兼発行者　東京都新宿区四谷1丁目　中川一美

印刷所　東京都港区赤坂溜池5番地　株式会社 技報堂

発行所　社団法人 土木学会

東京都新宿区四谷一丁目　電話 (35) 5130・5138・5139　振替東京 16828 番