

波状底面を持つ開水路流れの安定性と河川早瀬の波

京藤敏達¹・福島雅紀²

¹正会員 工博 筑波大学助教授 構造工学系 (〒305 つくば市天王台1-1-1),
Asian Institute of Technology, Water Resources Engineering Program

(G. P. O. Box 2754, Bangkok 10501, Thailand)

²学生会員 工修 筑波大学大学院 工学研究科 (〒305 つくば市天王台1-1-1)

河川早瀬および急流河川の水面形は底面地形の影響を大きく受け、波頂曲率の大きな複雑な変動を示す。これらの基礎研究として水面波の分散性および底面勾配の変化を入れた浅水流方程式を用いて、底面勾配が正弦関数状に変化するときの不等流の安定性を調べた。Floquetの定理を用いると固有関数として空間概周期的な変動を考慮することができるが、ここでは典型的な水面パターンとしてPeak-valley structureおよびStaggered patternについて議論した。さらに、河川水辺で観察される渦の振動数を本理論から予測し実測値と比較した。

Key Words: open channel, sinusoidal bed, stability analysis, Manning's resistance law, Floquet's theory

1. まえがき

平らな底面を持つ開水路流れの等流の安定性に関しては転波の発生と併せて、Dresslerによる先駆的な理論的研究¹⁾、岩佐による任意断面を持つ開水路への理論の拡張および実験値との比較検討²⁾がある。その他、詳細な実験、方程式に渦粘性項を付加した場合の効果などについて検討されている³⁾。また、近年の弱非線形安定性理論を用いた解析により、転波発生の臨界点付近の解はKdV方程式で支配されている⁴⁾。一方、底面変化を有する場合の自由表面流れは、造波問題と相まって完全流体について研究されている⁵⁾。その際、底面変化が緩やかなときはBresseの式と同様に底面の効果が運動方程式中に外力項として入ることが示されている。また、急流河川の河床形態に関連して、水面形と安定河床の相関を調べる実験的研究も行なわれている⁶⁾。

河川早瀬で観察される定在波は、河床のわずかな起伏と水面波の共振により水面波が增幅され生じたものである。この定在波の不安定モードが淵あるいは水辺に伝播する水面波動の原因であると考え、水辺の渦および早瀬と淵の境界に生じる複雑な水面形を理論的に予測することを試みた。したがって、ここで用いる基礎方程式では底面変化の効果を重力加速度の流れ方向成分の変化という形でのみ考慮し、底面近傍の流線の曲がりは小さいとして無視した。また、以下で議論する不安定性とは定在波に対するものであり、定在波から別の解に分岐する場合を流れは不安定であるとする。これらの不安定解は多数存在するため、この中で物理的に有為な解を求めるに

は、実験および実測から予め解を特定することが必要となる。

基礎方程式は水深方向に積分した質量および運動量の保存則で、鉛直方向加速度（水面波の分散性）、マニングの抵抗則および渦粘性の効果を含んでいる。また、上述したように底面変化の効果としては底面曲率による流線の曲がりの影響は考慮せず重力による外力方向変化のみを考慮した。渦粘性項および鉛直方向加速度項を導入した理由は、早瀬および急流河川の水面形は波長曲率が大きいこと、さらに波の分散性を考慮し渦粘性を考慮しない場合には等流はすべてのフルード数で不安定になり、実現象を説明できないからである^{4),7)}。断面平均した運動量方程式中の渦粘性項は、乱流による運動量拡散効果を表すと考えられるが、その値をどのように与えるかは明確ではない。当然ここで用いるようなモデル方程式は第一原理から導かれる流体の方程式に平均操作を行ない、さらに方程式系が閉じるように適当な仮定を置いているため、多くの実験結果を同時に説明することはできないと考えられる。渦粘性項の大きさに関しては本文中で触れる。

まず、波状底面を持つ流れの安定性の渦粘性係数依存性を調べるために、空間周期的な現象を対象としてスペクトル法によるシミュレーションを行なった。次に、流れが2次元的であるとして底面変化がある流れの定常流の微小擾乱による安定性をFloquetの定理を用いて調べた⁸⁾。不安定領域は、擾乱の種類、底面の波数およびフルード数に依存する。

ところで、河川早瀬および底面変化がある急勾配水路

の水面は波峰方向にも変調する。この現象と類似なものに平板境界層の二次不安定があり、その典型的なパターンに、a) Ordered peak-valley structureおよびb) Staggered patternがある⁹⁾。そこで、搅乱の種類を物理的に見て簡単な2種類、すなわち搅乱の流れ方向の波数が底面の波数の1倍および1/2倍の搅乱に限定し、不等流の安定性を調べた。その結果、波峰方向の波数が底面形もしくは定在波の波数とほぼ同じである平面波が最も不安定であることが分かった。この不安定波の振動数が早瀬から淵に伝播する波を決定していると推察される。

最後に、実河川の早瀬・淵と続く区間で観測された水辺の渦の振動数を理論値と比較検討する。なお、本論文では河川早瀬で実測されたフルード数域を対象とし、フルード数が0.5から1.0の範囲内の流れを対象とする¹⁰⁾。

2. 基礎方程式

基礎方程式は水深方向に積分した質量および運動量の保存則である。本論文では長方形の幅広水路を対象とし、運動量補正係数を1、底面勾配 I は $I = \sin\theta = -\frac{db}{dx}$ とする(Fig.1参照)。解析を整理するために水路平均勾配 I_0 における等流水深 h_n および等流速 U_n を用いて無次元化

$$\begin{aligned} \tilde{H} &\Rightarrow h_n H, \quad \tilde{U} \Rightarrow U_n U, \quad \tilde{V} \Rightarrow U_n V, \quad \tilde{w} \Rightarrow U_n w, \\ \tilde{x} &\Rightarrow h_n x, \quad \tilde{y} \Rightarrow h_n y, \quad \tilde{z} \Rightarrow h_n z, \quad \tilde{t} \Rightarrow \frac{h_n}{\sqrt{gh_n}} t \end{aligned} \quad (1)$$

を行なった。ここで、上付きの“~”は次元量を表す。すると、運動方程式は

$$\begin{aligned} Fr^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} &= 0 \\ Fr^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -P_{xav} \\ -M_n \left(\frac{Uq}{H^{4/3}} - \frac{I}{I_0} \right) + \frac{C_s}{2} \left\{ \frac{\partial}{H \partial x} \left(2H \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{H \partial y} H \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} \\ Fr^{-1} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -P_{yav} \\ -M_n \frac{Vq}{H^{4/3}} + \frac{C_s}{2} \left\{ \frac{\partial}{H \partial x} H \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{H \partial y} \left(2H \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} \\ q &= \sqrt{U^2 + V^2} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。圧力勾配に関しては鉛直方向加速度の効果が入るように以下の近似式を用いる¹¹⁾。

$$P = - \int_H^z \left(Fr^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

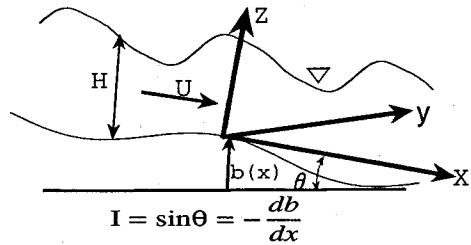


Fig.1 Open channel flow over a sinusoidal bed

$$\begin{aligned} &+ V \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + Fr^{-2} \Big) dz \\ w &= \frac{z}{H} \left(Fr^{-1} \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ P_{xav} &= \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial P}{\partial x} dz \\ P_{yav} &= \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial P}{\partial y} dz \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、式中の無次元量は

$$\frac{C_s}{2} = \frac{\nu_t}{h_n U_n}, \quad Fr = \frac{U_n}{\sqrt{gh_n}}, \quad M_n = \frac{gn^2}{h_n^{1/3}} \quad (4)$$

で定義されており、 ν_t は渦粘性係数である。また、 t は時間、 x は流下方向にとった座標、 y は x 軸に垂直な水平面内の座標、 H は水深、 U 、 V は x および y 方向の断面平均流速、 ρ は流体の密度、 P_{xav} 、 P_{yav} は x 方向および y 方向の圧力勾配の断面平均、 g は重力加速度、 n はマニングの粗度係数、等流条件から $I_0 = M_n Fr^2$ 、運動量式の最後の項は乱流による運動量輸送を拡散係数を使ってモデル化したものである。とくに圧力を求める際の鉛直方向流速 w は非粘性流体の底面条件および表面の運動学的条件を満たすように与えられている¹⁰⁾。

以上のモデル化では、底面勾配変化は運動方程式中の底面勾配 I を通してのみ考慮されており底面近くの流線の曲がりによる圧力変化などは含まれていない。また、流速 w が z に比例するという近似は、水面変動による鉛直方向流速を第1近似として含めることであり、水面波の理論では長波近似に波の振幅の効果を入れることであり、結果的に波の分散性を考慮したことになる。

3. スペクトル法によるシミュレーション

開水路の基礎式(2)は水深方向に積分された後に得られており、すでに水深スケールの渦運動の情報は失われている。この点では、渦粘性係数 ν_t は空間平均の結果生じたと考えることもできるが、一方で我々は乱流の時間変動スケールも平滑化して水面波のスケールを対象としているため、式(2)中の ν_t は時間平均に基づくものと考えることもできる。

以下で ν_t 、すなわち C_s の値をどのように与えるかに

についての制約条件を列挙すると、

- i) 不等流実験の水面形を説明できるように決める¹²⁾.
- ii) 線形および弱非線形安定解析から等流が不安定となる臨界フルード数が存在するためには、 $C_s \leq M_n/3$ が必要である⁴⁾. これは転波発生の臨界フルード数 $Fr_{cr} = 1.5$ が存在する必要条件である.
- iii) Smagorinsky の渦粘性項は、くり込み群理論および平滑な壁に囲まれた剪断流でオーダーとして $C_s = 0.003 \sim 0.006$ などが用いられている¹³⁾. ただし、ここで平均化する際の渦の空間平均スケールは、等方性乱流の最小渦に対してである.
- iv) 開水路流れの計算で用いられる渦粘性係数 ν_t ¹⁴⁾ と比較すると、

$$\nu_t = \frac{1}{6} \kappa u_* h_0 = \frac{1}{2} C_s U_n h_n, \quad u_* = \sqrt{gh_n I_0} \quad (5)$$

より、 $I_0 = M_n Fr^2$ および $h_n \approx h_0$ とすると

$$C_s = \frac{\kappa}{3} \sqrt{M_n} \quad (6)$$

であることがわかる. ここで、 h_0 は平均水深、 κ はカルマン定数 ($\kappa \approx 0.4$) である. ii) を考慮すると転波が発生するためには $M_n \geq \kappa^2$ が必要である.

この章では $M_n = 0.003$ に固定し $C_s = 0.05, 0.003, 0.001, \kappa\sqrt{M_n}/3$ の各場合について 2 次元流、すなわち $V=0$ で底面が正弦関数状に変化するときの計算結果を示す. 計算結果の着目点は、適当な初期値から出発した流れが定常流に収束するか、定常流が不安定で水面の時間変動すなわち底面変化による造波が起きるかである. 計算法は、周期的境界条件であることから空間変数 x についてはフーリエ級数で展開し、その振幅の時間発展を 4 次精度のルンゲ・クッタ法により求積するものである. また、スペクトル法によるシミュレーションを容易にするために方程式系に次の 2 つの近似を行なった.

(A) 底面変化の振幅が小さく等流からのずれが小さい流れを対象とし、解を空間平均値とそれからのずれに分け、方程式

$$H = 1 + \varepsilon h_f, \quad U = U_0 + \varepsilon u_f \quad (7)$$

を基礎方程式 (2), (3) に代入して ε の 2 次のオーダーの項までをとる. ここで、 U_0 は流速 U の空間平均値、 h_f, u_f は空間平均値からのずれで、 ε はその大きさの目安を表すパラメータで最終的には 1 と置く. とくに、空間周期的な現象を時間発展で解くと、完全保存形の方程式では平均値は時間発展しないが、運動方程式 (2) は完全保存形ではないため U_0 は時間の関数となることに注意する.

(B) 運動方程式中の圧力勾配の項の中には速度および水深の時間微分項が含まれており、陽的差分で解くために次の変形を行なう. 運動方程式中、水深の時間微分項は連続の式を使って空間微分項で置き換える. また、非

線形項中の時間微分項を上記の近似のもとで空間微分項で置き換える.

これらの操作をまとめると

<Step A>

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_f}{\partial t} &= C_L[h_f, u_f; U_0] + \varepsilon C_N[h_f, u_f; U_0] \\ \frac{\partial u_f}{\partial t} &= M_L[h_f, \frac{\partial h_f}{\partial t}, u_f, \frac{\partial u_f}{\partial t}; U_0, \frac{dU_0}{dt}] \\ &\quad + \varepsilon M_N[h_f, \frac{\partial h_f}{\partial t}, u_f, \frac{\partial u_f}{\partial t}; U_0, \frac{dU_0}{dt}] \end{aligned} \quad (8)$$

<Step B>

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_f}{\partial t} &= C_L[h_f, u_f; U_0] + \varepsilon C_N[h_f, u_f; U_0] \\ \frac{\partial u_f}{\partial t} &= M_L[h_f, \frac{\partial h_f}{\partial t}, u_f, \frac{\partial u_f}{\partial t}; U_0, \frac{dU_0}{dt}] \\ &\quad + \varepsilon M_N[h_f, \frac{\partial h_f}{\partial t}, (\frac{\partial u_f}{\partial t})^*; U_0, \frac{dU_0}{dt}] \end{aligned} \quad (9)$$

となる. ただし、

$$\begin{aligned} (\frac{\partial u_f}{\partial t})^* &= M_L[h_f, C_L[h_f, u_f; U_0], \\ u_f, (\frac{\partial u_f}{\partial t})^*; U_0, \frac{dU_0}{dt}] \end{aligned} \quad (10)$$

である.

上式中下付き添え字の L は h_f, u_f に関して線形の項、 N は非線形の項を表す. Step B の近似において運動方程式の非線形項のなかで $(\partial u_f / \partial t)$ に関しては線形解 $(\partial u_f / \partial t)^*$ を用いる. また、 U_0 の時間発展は式 (9) を空間平均した方程式から決定される. この近似では、連続の式は厳密であり、運動方程式は ε の 2 次の精度を持つことに注意する. 以上、これらの近似の記号処理はすべて数式処理ソフト (Mathematica) を用いて行なった (Appendix 参照). 最終結果は煩雑であるため、ここでは列挙しない. 底面は正弦関数状に変化しているとし、その勾配を

$$I = I_0 - b_1 \cos k_b x \quad (11)$$

で与える. ここで、 b_1 は底面勾配の変動振幅、 k_b は底面形の波数で $k_b = 2\pi/\lambda$ (λ は底面形の波長) である. また、 $M_n = 0.003$ は、およそ等流水深 0.04 (m), マニングの粗度係数 $n = 0.01$ に相当し、実験室で検証できる流れを念頭に置いた. 計算は各 C_s に対して、 $Fr = 0.6, 0.7$ および $\lambda = 3, 5, 7$ について行なった.

Fig.2.1~Fig.2.4 は水位 ($\eta = b_1/k_b \sin k_b x + h_f$) をプロットしたものである. $C_s = 0.05, 0.007$ のときは渦粘性によって定常解に収束する (Fig.2.1, Fig.2.2). 底面波長 λ が 7 のときに顕著に現れる 2 つの山は実験で観察されるが、実験ではそれらは不安定で時間的に振動する¹⁵⁾. 底面波長を固定したとき、一般にフルード数の増大とともに定常流が不安定になると考えられるが、底面の波長との兼ね合いでも安定性が左右される

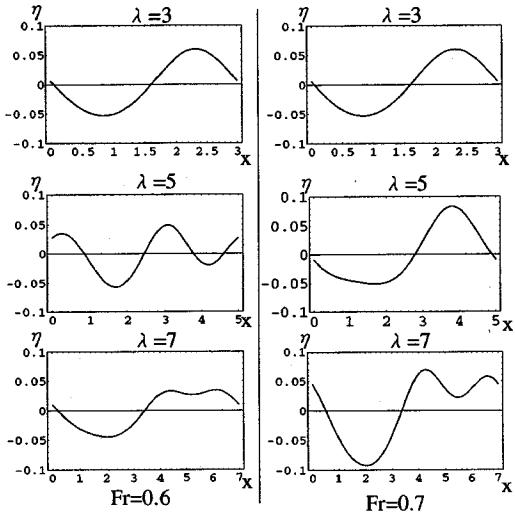


Fig.2.1 Free surface profiles for $Fr=0.6, 0.7$ & $\lambda=3, 5, 7$. All of the flow converge to steady state. Note that the bottom profile changes sinusoidally. ($b_t=0.05, M_n=0.003, C_s=0.05$)

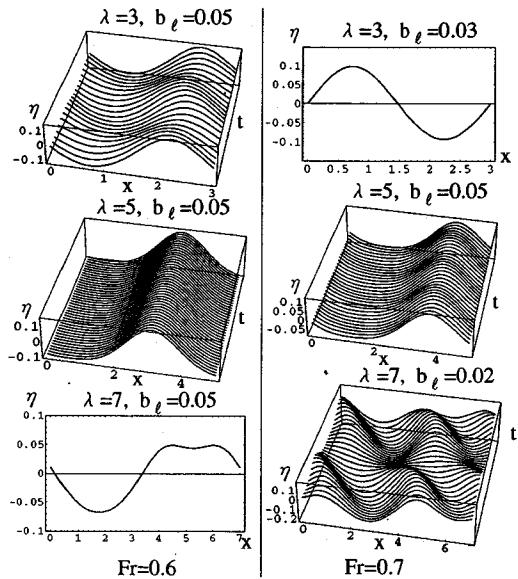


Fig.2.3 Free surface profiles for $Fr=0.6, 0.7$ & $\lambda=3, 5, 7$. Phase of the free surface profile relative to the bed changes at the wavelength $\lambda=3$, $Fr=0.7$. And instability occurs at $Fr=0.6, \lambda=3.5$ & $Fr=0.7, \lambda=5.7$ ($M_n=0.003, C_s=0.003$)

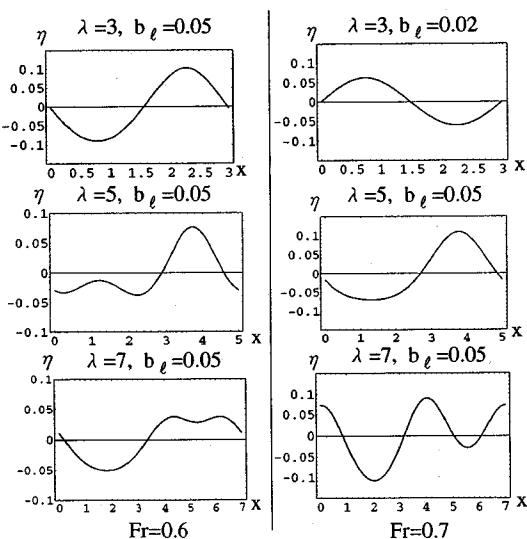


Fig.2.2 Free surface profiles for $Fr=0.6, 0.7$ & $\lambda=3, 5, 7$. Instability occurs at $\lambda=3, Fr=0.6$ ($M_n=0.003, C_s=0.007$).

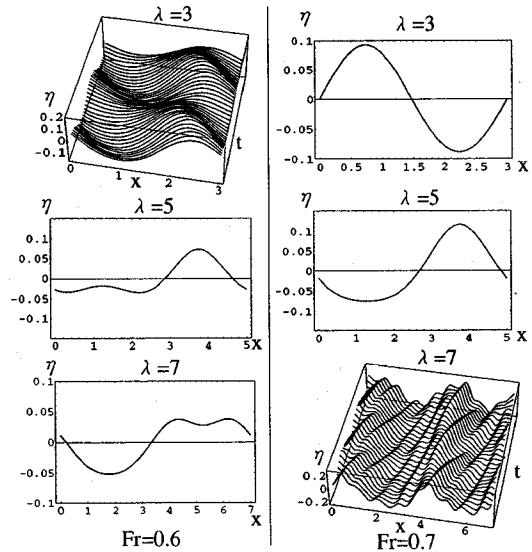


Fig.2.4 Free surface profiles for $Fr=0.6, 0.7$ & $\lambda=3, 5, 7$. Phase of the free surface profile relative to the bed changes at the wavelength $\lambda=3$, $Fr=0.7$. And instability occurs at $Fr=0.6, \lambda=3$ & $Fr=0.7, \lambda=7$ ($M_n=0.003, C_s=0.001, b_t=0.05$).

(**Fig.2.3, Fig.2.4**). また、底面の振幅を大きくすると、水面振幅が増大し計算値は発散した。とくに、そのような発散が生じないように与える底面勾配 b_t を調整した。開水路で用いられている渦粘性の式(6)から C_s を算定すると $C_s=0.007$ 、また転波が発生する臨界値は $C_s=0.001$ である。ここで、上述したように $M_n=0.003$ として C_s を決めた。

4. 空間周期的流れの安定性理論

転波は平らな底面をもつ開水路流れの安定問題として議論されてきたが、本論文では波状底面上の流れの安定

問題を扱う。実際、河川早瀬および急流河川の複雑な水面形および水位変動は底面変化によるものである⁶⁾。また、底面変化がある開水路の流れは平らな底面に比べて不安定であり、低いフルード数域で水面は時間的な変動を伴う。本章では、まず2次元流について、底面波長とフルード数によって定常流の不安定領域を求める。次いで、3次元流の安定解析を行ない、その結果得られた不安定モードの振動数と早瀬から淵に伝播する水面波について議論する。

以下の記号処理は数式処理ソフトを用いて行なった（Appendix 参照）ため、解析の手順に焦点を絞って説明する。定常流の安定性を調べるために、以下のように厳密解を定常解とそれからの変動成分に分解し

$$\begin{aligned} H &= H_p(x) + \varepsilon h_f(t, x, y) \\ U &= U_p(x) + \varepsilon u_f(t, x, y) \\ V &= \varepsilon v_f(t, x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

上式を基礎方程式（2）に代入したあと ε の1次の項までとると、変動成分に対する線形方程式が得られる。

$$L[H_p(x), U_p(x)] \begin{bmatrix} h_f(t, x, y) \\ u_f(t, x, y) \\ v_f(t, x, y) \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

ここで、 H_p 、 U_p は定常解、 $L[H_p(x), U_p(x)]$ は線形微分作用素、 h_f 、 u_f 、 v_f は変動成分である。上式の解は、変数 t および y については線形であるから変数分離形で表すことができ、さらに x 方向に有界な現象では Floquet の定理より、

$$\begin{bmatrix} h_f(t, x, y) \\ u_f(t, x, y) \\ v_f(t, x, y) \end{bmatrix} = Re \left[\sum_{m=-M_1}^{M_2} \begin{bmatrix} h_{fm} \\ u_{fm} \\ v_{fm} \end{bmatrix} e^{i(m+\beta)k_b x} \right] e^{ik_b y} e^{\gamma t} \quad (14)$$

と置くことができる。ただし、 $H_p(x)$ 、 $U_p(x)$ は変数 x に関して周期的で k_b はその波数、 h_{fm} 、 u_{fm} 、 v_{fm} は定数、 k_y は y 方向の波数、 β は Floquet の指数で $0 \leq \beta < 1$ 、 γ は安定性を判定する指標で $Re[\gamma] > 0$ のとき定常解は不安定となる。また、変数 x に関しては非線形方程式であるから、安定性の振幅依存性を議論することもできる。さて、方程式系（13）の解をガレルキン法で求めると γ の固有値問題となり、項数 M_1 、 M_2 の増加に伴って解くべき行列の次元および固有値方程式の次数も増大する。そこで、本論文では $H_p(x)$ 、 $U_p(x)$ をフーリエ級数の第1モードまで近似し、

$$\begin{aligned} H_p(x) &= 1 + A_{hp} \cos k_b x \\ U_p(x) &= 1 - A_{hp} \cos k_b x \end{aligned} \quad (15)$$

と置き、作用素 $L[H_p(x), U_p(x)]$ も A_{hp} の2次以上の項を含まないように近似する。上式は振幅 A_{hp} が小さ

いとき連続の式を満たすように決められている。また、定常解を余弦関数で与えたことについては、微小擾乱の方程式が底面勾配による外力項をすでに含まないことから x 方向に適当に平行移動しても結果は変わらないためである。したがって、ここで扱う安定解析の結果は平らな底面上に定在波がある場合の定在波の安定性を議論していることにも相当する。

さて、式（13）の作用素 L に上記の近似を行なうと单振動成分を係数を持つ線形微分方程式となるため、これに式（15）を代入し各フーリエ成分ごとの方程式を求めると3項間の関係が得られ、

$$\begin{aligned} P_m X_{m-1} + Q_m X_m + R_m X_{m+1} &= 0, \\ -M_1 \leq m \leq M_2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$X_m = \begin{bmatrix} h_{fm} \\ u_{fm} \\ v_{fm} \end{bmatrix},$$

$$X_m = 0 \quad \text{for } m < -M_1 \& m > M_2$$

となる。 P_m 、 Q_m 、 R_m は 3×3 行列で数式処理ソフトを用いて解析的に求めたが、式が煩雑であるためここでは列挙しない。項数 M_1 、 M_2 を適当に与えると上式は固有値問題となり、固有値 r に対する代数方程式、

$$\phi(r, \beta, k_b, k_y, M_n, C_s, Fr) = 0 \quad (17)$$

が得られる。指數 β は x 方向の周期性を表し、 $\beta=0$ は波数 k_b の擾乱、 $\beta=1/2$ は波数 $k_b/2$ の擾乱を表し、 β によって概周期的な変動も表現される⁹⁾。本論文では、物理的に明快で境界層の流れのパターンとして観察されている $\beta=0$ と $\beta=1/2$ の擾乱のみを扱う。また、方程式の対称性を保つため、 $\beta=0$ の擾乱に対しては $M_1=M_2=M$ 、 $\beta=1/2$ の擾乱に対しては $M_1+1=M_2=M$ とした。

（1）2次元流の安定解析

定常流の安定性を議論する上で特徴的な波数として次の2つのものが考えられる。

- i) 波速と流速が等しくなる表面波の波長^{16), 17)}。
- ii) 底面変動の波数のうちで水位の増幅率が最大となるもの、すなわち摂動解¹⁾；

$$H \equiv H_0 \equiv 1 + \varepsilon h_1,$$

$$h_1 = (A_{h0} e^{ik_b x} + c.c.) / 2,$$

$$b(x) = a_m \sin(k_b x) - I_0 x,$$

$$A_{h0} = \frac{3Fr^{-2}a_m k_b}{ik_b^3 + 3C_s k_b^2 + 3i(1-Fr^{-2})k_b + 10M_n} \quad (18)$$

において $|A_{h0}/a_m|$ が最大となる $k_b=k_{b\max}$ 。上式中、“c.c.” は左辺の項の複素共役項を表す。

- i) に関してはあるフルード数下での定在波の波長を決めるためにすでに研究がなされている。ここでは、基礎方程式（2）に基づいて上記 i), ii) の考えにしたがって定在波の波長を算出した。Fig.3 からフルード数が 1

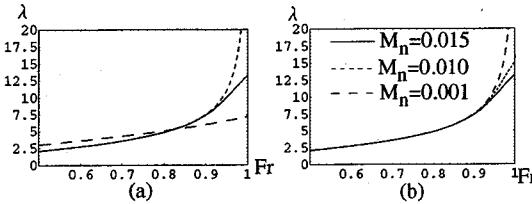


Fig.3 (a), (b) Wavelength λ of the stationary waves predicted by the theory;
(a) — Maximum amplification,
..... 0-phase velocity,
---- Lighthill's theory ($M_n=0.015, C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$)
(b) Maximun amplification ($C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$)

を越える辺りから両理論の間に差異が生じ、粗度パラメータ M_n 依存性が顕著となる。また、参考のために Lighthill による理論値¹⁶⁾をプロットする。

Fig.4 は $M_n=0.003$ のときの不安定領域を示したものである。計算は式 (17)において $k_y=0$ およびモード数 $M=2$ として実行した。計算結果の M 依存性は $M=1$ と $M=2$ の場合で誤差が 1 % にも満たないことを確かめた。図中実線はあるフルード数のもとで增幅率が最大となる波長をプロットしたものである。いずれも不安定領域は複雑に入りこんでおり、Matieu 方程式の不安定領域と類似している。また、振幅の減少に伴って不安定領域はかなり減少する。さて、**Fig.5** に $C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$, $A_{hp}=0.1$ の $Fr=0.65$ におけるスペクトルおよび不安定モード (**Fig.4** 中矢印), すなわち固有関数を示す。 $\beta=0$ の不安定モードの固有値は実数であり定在波は伝播せずに振幅が増大する。また、 $\beta=1/2$ の不安定モードは波長が定常解の 2 倍で擾乱は下流に伝播している。このように 2 次元流に関しては様々な不安定モードが存在し、早瀬で観察された振動数は得られなかった (**Table 1** 参照)。

(2) 3次元流の安定解析

Fig.4 から流れが 2 次元的であるとしたときの不安定領域は複雑であり、孤立した領域まで現れているように見受けられる。これでは、実河川の早瀬の波を予測することは困難である。実河川の早瀬および急勾配開水路の水面形は波峰方向にも変調し、平面的な波動として伝播する。そこで、本章では定在波の波長を 4 章 (1) 節 ii) で予測した $k_b=k_{b\max}$ に固定し y 方向にも伝播する波動の安定性を調べる。序論で述べたように次の 2 つの平面的なパターンに絞って解析を進める⁹⁾。

I) Ordered peak-valley structure ($\beta=0, k_y \neq 0$)

II) Staggered pattern ($\beta=1/2, k_y \neq 0$)

まず、 y 方向にも波峰が変化する場合の安定性を $M_n=0.003$ および $M_n=0.01$ を例にとって調べる。**Fig.6.1**, **Fig.6.2** は前節と同様に固有値を求め、その実数部およ

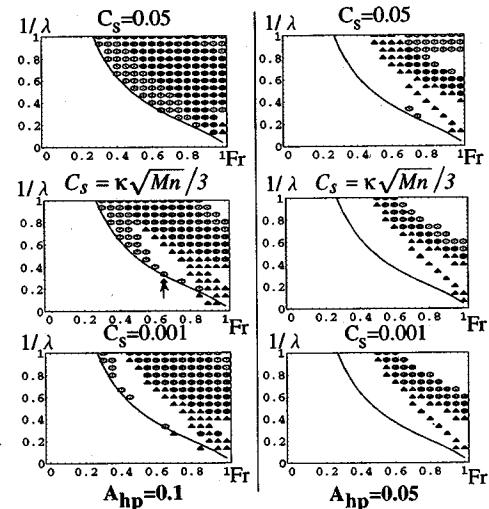


Fig.4 The regions of instability of the spatially periodic flows with $M_n=0.003$ & $\kappa=0.4$. Unstable regions are marked by \square : $\beta=0$, \triangle : $\beta=1/2$.

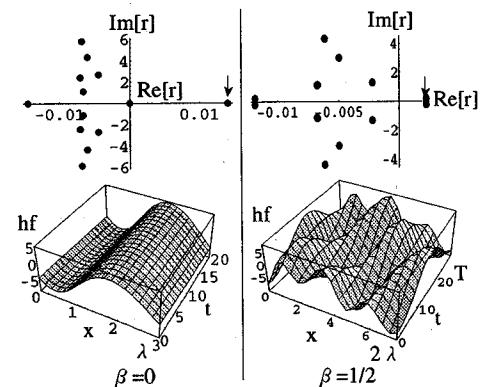


Fig.5 The eigenfunction of the unstable mode at $Fr=0.65$, $M_n=0.003, C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$. The arrow shows the corresponding eigenvalue.

び適当にスケールした虚数部 (角振動数) の k_y 依存性を示したものである。この図から、Ordered peak-valley structure では $k_y=0.95 k_b$ に、Staggered pattern では $k_y=0.85 k_b$ にピークが見られ、フルード数が小さくなるにつれて不安定性が増大している。すなわち、フルード数が小さくなるにつれて定在波の波長が短くなり、二次不安定で波峰方向に変調した振動が現れる。

理解の容易さのために、 $Fr=0.5, M_n=0.003$ のときの固有値および固有関数を示す (**Fig.7 (a), (b)** および **Fig.8 (a), (b)**)。さらに、このピークはフルード数がおよそ 0.7 以下のところで顕著であり、その点では振動数がまわりに比べて低くなっていることがわかる。河川早瀬でできた定在波が淵に伝播し、淵との境界付近で複雑な平面波となり、その変動が浅淵に伝播する

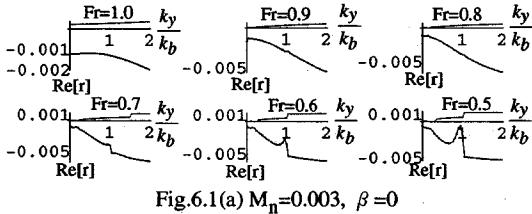


Fig.6.1(a) $M_n=0.003$, $\beta=0$

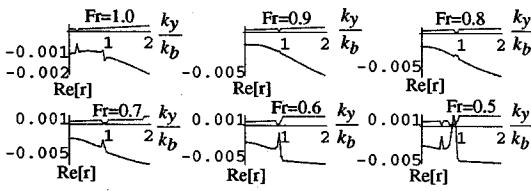


Fig.6.1(b) $M_n=0.003$, $\beta=1/2$

Fig.6.1 (a), (b) Real part of the eigenvalues $Re[r]$ as a function of k_y for $M_n=0.003$, $A_{hp}=0.1$. $Im[r]$ is also plotted at the first quadrant, but rescaled. Here, the relation $C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$ is used.

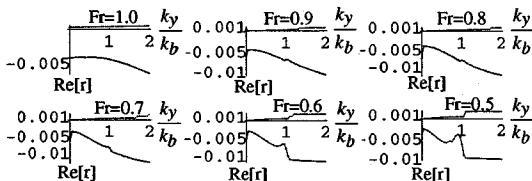


Fig.6.2(a) $M_n=0.01$, $\beta=0$

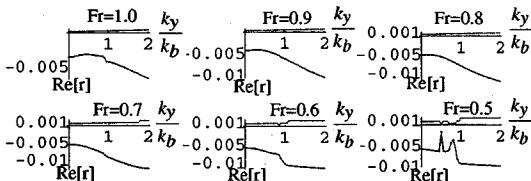


Fig.6.2(b) $M_n=0.01$, $\beta=1/2$

Fig.6.2 (a), (b) Real part of the eigenvalues $Re[r]$ as a function of k_y for $M_n=0.001$, $A_{hp}=0.1$. $Im[r]$ is also plotted at the first quadrant, but rescaled. Here, the relation $C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$ is used.

と考えれば、早瀬・淵と続く河川で淵の水辺に伝播する規則的な水面波の振動数は上記の不安定性によるものと考えられる。Fig.9 に $Fr \leq 0.7$ のときのピーク位置での角振動数をプロットする。この図では $M_n=0.003$ および $M_n=0.01$ の値を示してあるが、両者は極めて一致しており区別ができない。したがって、波数 k_{bmax} の定在波の不安定波の振動数は粗度に関係なく普遍的に現れると考えられる。この振動数は乱流拡散係数 C_s にも差程依存しないことも確かめた ($(M_n, C_s)=(0.003, 0.001)$ および $(0.003, 0.003)$ の結果も Fig.9 上でほとんど一致する)。ところで、Ordered peak-valley structure と Staggered pattern のいずれが生じ易いかは明確ではないが、河川早瀬などで障害物後方にできる定在波は

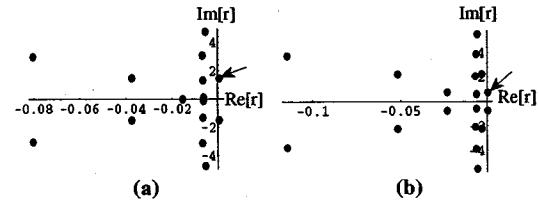


Fig.7 (a) Spectrum of eigenvalues at $Fr=0.5$, $M_n=0.003$, $\beta=0$,

$$0, K_1=0.95 k_b, C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3.$$

$$(b) Spectrum of eigenvalues at $Fr=0.5$, $M_n=0.003$, $\beta=1/2$, $K_1=0.85 k_b, C_s=\kappa\sqrt{M_n}/3$.$$

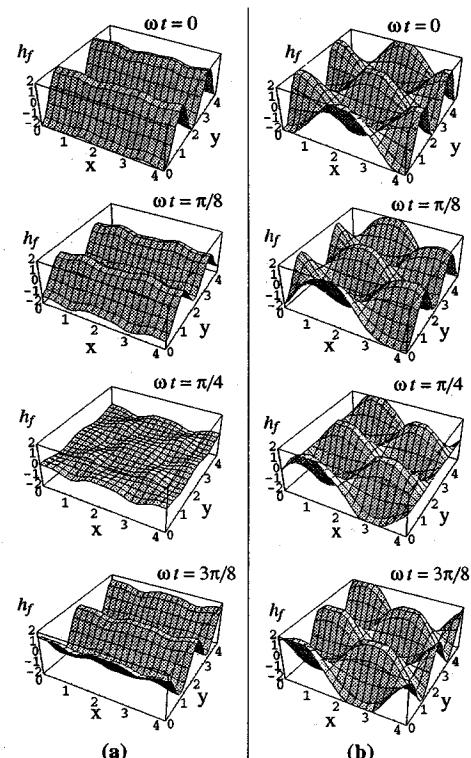


Fig.8 Eigenfunction of the most unstable mode

$$(a) Fr=0.5, M_n=0.003, \beta=0, k_y=0.95 k_b.$$

Ordered peak-valley structure ($Im[r]=\omega$).

$$(b) Fr=0.5, M_n=0.003, \beta=1/2, k_y=0.85 k_b.$$

Staggered pattern ($Im[r]=\omega$).

peak-valley structure に近い構造であると考えられる（平板境界層では外乱が小さいとき Staggered pattern が現れ、外乱が大きくなると Ordered peak-valley structure が実現される⁹⁾）。

5. 河川早瀬の波

ここでは実測について記し、これまで述べてきた理論 (Fig.9 の理論値) と実測値との比較検討を行う。実測は関東を流れる久慈川中流域および那珂川中流域で実施

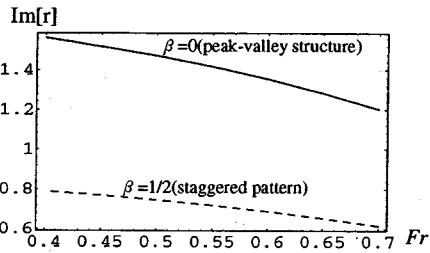


Fig.9 The frequency of the most unstable mode at $\beta=1/2$, $k_y = 0.85k_x$ & $\beta=0$, $k_y = 0.95k_x$, for $M_n = 0.003$ & 0.01 . Here, the amplitude is fixed by $A_{h0} = 0.1$ and $C_s = \kappa\sqrt{M_n}/\beta$. Note that the results for $M_n = 0.003$ & 0.01 are almost coincident.

— $\beta=0$ (peak-valley structure)
---- $\beta=1/2$ (staggered pattern)

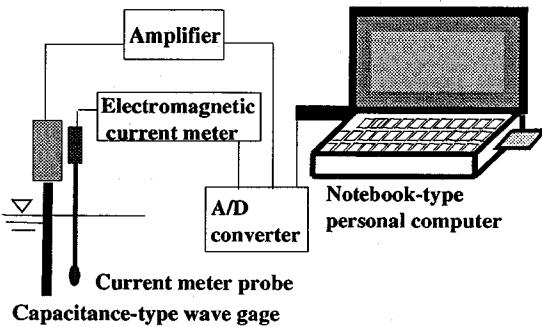


Fig.10 Measuring equipments in field work

した。早瀬・淵と連続した区間で、岸に沿って代表的なポイントをいくつか定め、各ポイントでの水平面内二方向流速および水面変動を測定した（サンプリング間隔：1/100秒、データ数：1024個）。実測装置は、Fig.10に示すように電磁流速計および容量式波高計を用いた。

河川水面の様子を述べると、早瀬では波峰のとがった水面波が多く見られ白波が生じてところもある。それに対して淵の水辺では、ほぼ正弦波状の波が観測された。最も複雑な挙動を示すのは早瀬と淵の境界付近の水面変動であった。Table.1に代表的な実測データの詳細を示す。表中 Kuji は久慈川、Naka は那珂川でのデータを表し、Kuji 2 および Naka 3 は早瀬と淵の境界付近のデータを表し、その他のデータは早瀬と考えられる測点のデータである。実測値の振動数は水面変動の実測データをフーリエ変換しスペクトルを求め、その卓越振動数を読んだ。一例として、Fig.11にTable 1 の Kuji 2 の測点における水面変動のスペクトルを示す。

Kuji 2 および Naka 3 の水深およびフルード数から Fig.9 の理論値とともに水辺に伝播する渾の周波数を以下の式から計算すると、

Table 1 Field work data

Data name	Depth (m)	Froude Number
Kuji 1	0.08	0.79
Kuji 2	0.18	0.41
Naka 1	0.40	0.42
Naka 2	0.35	0.76
Naka 3	0.54	0.38

Spectrum(Log10 scale)

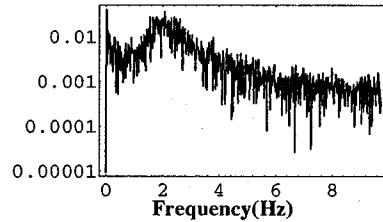


Fig.11 Spectrum of water elevation (Kuji 2)

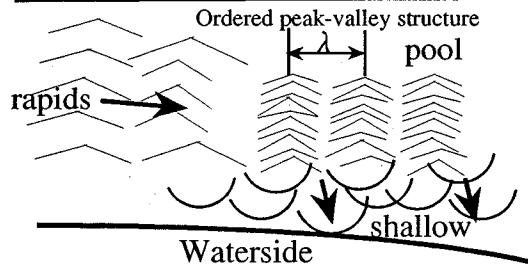


Fig.12 Schematic view of the waves in the rapids

$$f = \frac{\sqrt{gh_n}}{2\pi h_n} \operatorname{Im}[r] \text{ (Hz)} \quad (19)$$

実測値 2Hz に対して 1.8Hz (Kuji 2), 実測値 1.5Hz に対して 1.1Hz (Naka 3) であり、妥当な値であると考えられる。また、Fig.12 には渾の発生の仕組みの予想図を示す。

6. まとめ

波状底面を持つ開水路流れ、もしくは空間周期的な定常流の安定性を理論的に調べた。

(1) 空間周期的な 2 次元定常流は様々な不安定パターンを持ち、渦粘性の値によって不安定領域は大きく変動する。

(2) 河川の早瀬・淵と連続する区間の浅瀬で見られる渾の発生メカニズムを予測し、実測値と比較し妥当な値を得た。

ここで導かれた方法を用いて、急流河川の水面形のパ

ターンの予測および河川早瀬から浅淵の水辺に伝わる水面波の振動数の予測が可能になると考えられる。

最後に、今回まとめた結果は「都市域急流河川の流れと数値解析のシンポジウム」の討議を参考に研究を進めたものである¹⁸⁾。

謝辞：本研究を進めるにあたり、椎貝博美教授（筑波大学）には有益な御助言を頂きました。また、本研究は「魚にやさしい川づくり」（河川環境管理財団）および文部省科学研究費奨励（A）の補助を受けました。ここに、謝意を表します。

Appendix

微分積分または漸近解析を行うとき、数式処理に非常に手間取ることがある。数式処理ソフト Mathematica を用いることにより、これらの演算を容易に行うことができる。以下に、4節の擾乱の支配方程式(13)を導くMathematica のプログラムを示す。用いた記号に関してはコメントしたものもあるが、コメントの無いものは本文中の表記と同様である。ただし、添字は普通に記述した。

(* 圧力勾配項の算出および近似値 *)

```
Clear[afr, Fr, H, ep, hF, UF, VF, t, x, y, U, V, w, z,
wap, pzap1, pzap2, pu, p, pxav, pyav, pxav0, pyav0,
pxav1, pyav1, pxav2, pyav2, pxavap, pyavap];
afr=1/Fr,
H=1+ep hF[t, x, y];(* ep:擾動パラメータ *)
U=1+ep UF[t, x, y];V=ep VF[t, x, y];
(* 鉛直方向流速 *)
w=z/H(afr D[H, t]+U D[H, x]+V D[H, y]);
(* ep の 2 次オーダまでの近似解 *)
wap=(w/.ep->0)+ep(D[w, ep]/.ep->0)+
ep^(D[w, {ep, 2}]/.ep->0)/2;
(* 鉛直方向圧力勾配 *)
pzap1=Collect[-(1/afr D[wap, t]+
afr^(-2)U D[wap, x]+afr^(-2)V D[wap, y]+
afr^(-2)wap D[wap, z])-1, z];
(* 鉛直方向圧力勾配のepの2次オーダまでの近似解 *)
pzap2=(pzap1/.ep->0)+ep(D[pzap1, ep]/.ep->0)+
ep^2(D[pzap1, {ep, 2}]/.ep->0)/2;
pu[z_]=Collect[Integrate[pzap2, z], z];
(* 自由表面での圧力条件を満たす圧力分布 *)
p=pu[z]-pu[H];

pxav=afr^2 Integrate[D[p, x], {z, 0, H}]/H;
(* x方向圧力勾配の平均値 *)
pyav=afr^2 Integrate[D[p, y], {z, 0, H}]/H;
(* y 方向圧力勾配の平均値 *)
```

(* 圧力勾配の近似値 *)

```
pxav0=pxav/.ep->0;
pyav0=pyav/.ep->0;
pxav1=D[pxav, ep]/.ep->0;
pyav1=D[pyav, ep]/.ep->0;
pxav2=D[pxav, {ep, 2}]/.ep->0;
pyav2=D[pyav, {ep, 2}]/.ep->0;
(* 2次の非線形項まで考慮した圧力勾配項 *)
pxavap=pxav0+pxav1+pxav2/2;
pyavap=pyav0+pyav1+pyav2/2;
```

(* 擾乱方程式 (13) の導出 *)

```
Clear[H, hF, U, V, q, h0, hf, Uf, UF, VF, del, ep, r, ky,
Exav, Eyav, Econ, Ex10, Ey10, Econ10, Ex11, Ey11,
Econ11, Ahp, Ahf, AUf, AVf, Ah, AU, AV, m, kb, B,
Exap, Eyap, Econap];
```

```
H=1+hF[t, x, y];
```

```
U=1+Uf[t, x, y];
```

```
V=Vf[t, x, y];
```

```
q=Sqrt[U^2+V^2];
```

(* 1+del h0[x]:不等流成分, del:擾動パラメータ *)

```
hF[t-, x-, y-]=del h0[x]+ep hf[t, x, y];
```

```
UF[t-, x-, y-]=-del h0[x]+ep Uf[t, x, y];
```

```
VF[t-, x-, y-]=ep Vf[t, x, y];
```

```
hf[t-, x-, y-]=Ahf[x] E^(rt+I ky y);
```

```
Uf[t-, x-, y-]=AUf[x] E^(rt+I ky y);
```

```
Vf[t-, x-, y-]=AVf[x] E^(rt+I ky y);
```

(* x 方向運動量方程式 *)

```
Exav=afr D[U, t]+U D[U, x]+V D[U, y]+pxavap+
Mn(U q/H^(4/3)-1)-Cs/2(2 D[H D[U, x], x]+
D[H(D[U, y]+D[V, x]), y])/H;
```

(* y 方向運動量方程式 *)

```
Eyav=afr D[V, t]+U D[V, x]+V D[V, y]+pyavap+
Mn(V q/H^(4/3))-Cs/2(2 D[H D[V, y], y]+
D[H(D[U, y]+D[V, x]), x])/H;
```

(* 質量保存の式 *)

```
Econ=afr D[H, t]+D[H U, x]+D[H V, y];
```

(* Exav, Eyav, Econ の ep および del の係数 *)

```
Ex10=Collect[D[Exav, ep]
```

```
/ep->0/.del->0/.y->0/.t->0, r];
```

```
Ey10=Collect[D[Eyav, ep]
```

```
/ep->0/.del->0/.y->0/.t->0, r];
```

```
Econ10=Collect[D[Econ, ep]
```

```
/ep->0/.del->0/.y->0/.t->0, r];
```

```
Ex11=Collect[D[D[Exav, ep], del]
```

```
/ep->0/.del->0/.y->0/.t->0, r];
```

```
Ey10=Collect[D[D[Eyav, ep], del]
```

```

/. ep->0/. del->0/. y->0/. t->0, r];
Econ11=Collect[D[D[Econ, ep], del]
/. ep->0/. del->0/. y->0/. t->0, r];
(* 式(14), (15)の関数形 *)
h0[x_]=Ahp(Exp[I kb x]+Exp[-I kb x])/2;
Ahf[x_]=Ah[m]Exp[I m kb x+I B x];
AUf[x_]=AU[m]Exp[I m kb x+I B x];
AVf[x_]=AV[m]Exp[I m kb x+I B x];

(* 式(14), (15)を基礎式(13)に代入し Ahp の 1 次の項
までとった攪乱方程式 *)
Exap=Ex10+Ex11
Eyap=Ey10+Ey11
Econap=Econ10+Econ11

```

参考文献

- 1) Dressler, R. F. : Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels, *Comm. Pure Appl. Math.*, V.2, pp.149-194, 1955.
- 2) 岩佐義朗：開水路水流の不安定限界について，土木学会誌 40-6, pp. 297-303, 1955.
- 3) Needham, D. J. and J. H. Merkin : On roll waves down an open inclined channel, *Proc. R. Soc. Lond. A*394, 259-278, 1984.
- 4) 京藤敏達：河川早瀬の不安定波に関する理論的研究，水工論文集, V. 38, pp. 449-456, 1994.
- 5) Wu, T. Y. : Generation of upstream-advancing solitons by moving disturbances, *J. Fluid Mech.*, V.184, pp.75-99, 1987.
- 6) 長谷川和義：水面波に同調する河床波上の射流流れに関する実験的研究，土木学会北海道支部論文報告集 平成 5 年度, pp. 480-485, 1993.
- 7) 細田 尚, 岩佐義朗：開水路における波動の分散性, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 401-407, 1982.
- 8) Kyotoh, H. : Theoretical study of unstable waves in the rapids of river, *1994 National Conf. Hydraulic Eng.*, ASCE, pp.1265-1269, 1994.
- 9) Herbert, T. : Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances, *Phys. Fluids* 26 (4), pp.871-874, 1983.
- 10) 福島雅紀, 京藤敏達：河川の流体力学的観察, 第 48 回土木学会年講概要集, pp. 480-481, 1993.
- 11) 林 泰造：水の波, 応用水理学上, p. 164, 本間 仁編, 丸善, 1957.
- 12) 細田 尚, 多田彰秀：鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工論文集, V. 38, pp. 457-462, 1994.
- 13) Yakhot, V. and S. A. Orszag : Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory, *J. Scientific Computing*, V.1, N.1, pp.3-51, 1986.
- 14) 福岡捷二, 渡辺明英, 津森貴行：樹木群を有する開水路における平面せん断流の構造とその解析, 土木学会論文集 N. 491/-27, pp. 41-50, 1994.
- 15) 福島雅紀：河川早瀬の不安定波とその発生メカニズムに関する研究, 筑波大学工学研究科修士論文, 1995.
- 16) Lighthill, M. J. : On the critical Froude number for turbulent flow over a smooth bottom, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, V.49, pp.704-706, 1953.
- 17) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto : Spectral analysis of sand bed instability, *J. Hydraulic Eng.*, V.110, N.4, pp.467-483, 1982.
- 18) 京藤敏達, 福島雅紀：河川早瀬に生じる不安定波に関する研究, 都市域急流河川の流れと河床変動の数値解析に関するシンポジウム（札幌）, pp. 135-145, 平成 6 年 6 月. (1995. 7. 19 受付)

INSTABILITY OF THE OPEN CHANNEL FLOW OVER WAVY BED AND THE FREE SURFACE WAVES OBSERVED IN THE RAPIDS OF THE RIVER

Harumichi KYOTOH and Masaki FUKUSHIMA

Surface waves in the rapids of the river show the complicated patterns which are influenced by the bottom topography. Two-dimensional shallow water equations with dispersion terms are used to discuss the instability of steady nonuniform flows over sinusoidal bed. Floquet's theory shows that quasi-periodic eigenfunctions with respect to spatial variables can be introduced to solve the equation for an infinitesimal disturbance. Here, two physically important spatial patterns, such as Peak-valley structure and Staggered pattern, are investigated and their unstable regions are plotted in the phase plane of Froude number and the wavenumber of the bottom surface. Furthermore, the frequency of the waves observed at the waterside in the rapids will be discussed.