土木学会論文集 No. 538／V-31，129-147，1996.5

一般化マイクロプレーンコンクリートモデルの再構築

長谷川 俊昭

正会員 工博 清水建設株式会社 技術研究所（〒135 江東区越中島三丁目4-17）

マイクロプレーンコンクリートモデル（Hasegawaモデル）の予測精度を向上させて，より汎用性の高い構成則を開発するため，マイクロプレーン間の複雑な相互作用を考慮した一般化マイクロプレーンコンクリートモデルを再構築した．本モデルでは，マイクロプレーンの垂直圧縮応答に関する側方ひずみ依存性と側方応力依存性，またマイクロプレーンのせん断応答の拘束圧増大にともなう強度とじん性の変化という形でマイクロプレーン間の相互作用が考慮された．マイクロプレーンの背応力と目的応力によるヒステリシス則の定式化についても，処女載荷の場合と同様な影響を考慮し，マイクロ構成関係の適切なヒステリシス特性を定式化した．

Key Words : *general constitutive law, interaction between microplanes, lateral stress effect, transition from brittle to ductile fracture, microplane hysteresis rule*

1．まえがき

コンクリート構造物の有限要素解析では，弾塑性理論，損傷力学，非線形弾性理論（直交異方性亜弾性，超弾性）などに基づく構成則が，従来，広く用いられてきた．マイクロプレーンモデルは，非均質材料であるコンクリートの非弾性特性がモルタルマトリックスと粗骨材との界面領域（マイクロプレーン）から発生するマイクロクラックや界面ひび割れに起因することに着目して構築された構成則であり，より微視的な物理モデルを強く意識しているといえる．これまでに開発された様々なタイプのマイクロプレーンモデルは，その基本的考え方や定式化手法が既往の構成則と大きく異なるばかりでなく，各タイプ間でも重大な相違点を持つものである．マイクロプレーンモデルをコンクリートの実用的な構成則として使用するためには，これらのモデルの特徴や予測精度，適用範囲を明らかにすることが不可欠である．

著者[1]は，一般的多軸応力場に適用可能なマイクロプレーンモデルであるPratモデル[2]とHasegawaモデル（マイクロプレーンコンクリートモデル：microplane concrete model：MPCモデルと略す）[3]について，基本的な定式化の相違，すなわちマイクロプレーンの垂直－せん断成分による定式化（N-S定式化）と巨視体積－偏差－せん断成分による定式化（V-D-S定式化）の相違が予測精度に及ぼす影響を広範な応力状態に関して統一的に検討した．その結果，V-D-S定式化モデルは，マイクロプレーンの本来有する特質が崩され，モデルの特徴的な基本概念が不明瞭になっていることに加えて，広範な応力状態で同一の材料定数を用いて，良好な予測精度を得ることができなかった．一方，マイクロプレーンの特徴的な基本概念に回帰し構築したN-S定式化モデルは，2軸応力状態や低拘束圧状態に関して実用上十分な予測精度を有するものであるが，高拘束圧下における耐力増加やぜい性－塑性遷移挙動を良好に表現できないことなどが明らかになった．

本研究では，N-S定式化によるHasegawaモデル（MPCモデル）がV-D-S定式化モデルと比べて比較的良好な予測精度を与えるという前述の検討結果に基づいて，N-S定式化によるMPCモデルの改良を行なう．特に，拘束効果に関する予測精度を向上させてMPCモデルの適用限界を広げ，より汎用性の高い構成則を開発するため，マイクロプレーンのせん断成分と同様に垂直成分に関してもマイクロプレーン間の複雑な相互作用を考慮した一般化マイクロプレーンコンクリートモデル（一般化MPCモデルと略す）を再構築する．

2．一般化MPCモデルの改良点と基本仮定

（1）マイクロプレーンの相互作用

一般化MPCモデルでは，マイクロプレーンの相互作用を考慮するために，MPCモデルのいかなる点について改良を加えたか，その主要な改良点について述べておく．なお，本論文ではテンソルをその成分で表現する成分表示法を採用することとし，テンソルの下付き添字iなどはデカルト直交座標x_i（x，y，z）などを

参照するものである（$i=1,2,3$）．

1) マイクロプレーンの垂直圧縮応答に関する側方ひずみ依存性と側方応力依存性

MPCモデルでは，垂直圧縮応答が垂直ひずみε_Nのみならず，側方ひずみε_Lにも依存する（垂直圧縮応答の側方ひずみ依存性）と仮定した．これは，各マイクロプレーンの応答がそのマイクロプレーンのひずみによって一義的に決定されるということを表わしており，個々のマイクロプレーンが独立であるというマイクロプレーンモデルの基本概念に忠実な仮定であるといえる．しかし著者の研究[1)]で確認したように，この側方ひずみ依存性のみでは適切な拘束効果を表現できない．

コンクリートの微視的レベルのある方向で生じるマイクロクラック，塑性，損傷などは，主に粗骨材の存在に起因する非均質性のため，コンクリート中の他の方向における非弾性応答（マイクロクラック，塑性，損傷）に影響を与えている，すなわち微視的な相互作用が存在すると考えられる．コンクリート中の粗骨材とモルタルマトリックスとの界面領域が圧縮される状況を考えると，その界面領域の側方のひずみ（ポアソンひずみ）が抑え込まれたり，界面領域の側方に作用している応力（拘束応力）が圧縮で大きい場合，界面領域でマイクロクラックが生じにくくなるため，耐荷力が向上し塑性硬化状態に近づくと思われる．界面領域に作用している側方応力は，考えている界面領域に垂直な界面領域へ作用している直応力であるから，界面領域すなわちマイクロプレーンの側方応力を考慮することによって，微視的な相互作用をモデル化することが可能であると考えられる．

そこで一般化MPCモデルでは，側方ひずみ依存性に加えてマイクロプレーンの垂直圧縮応答が，応力テンソルσ_{ij}をマイクロプレーンの平行方向へ分解して得られる側方応力S_Lにも依存する（垂直圧縮応答の側方応力依存性）という形で，垂直成分に関するマイクロプレーン間の相互作用を取り入れる（図－1(d)参照）．なお，垂直成分の除荷応答と再載荷応答のヒステリシスに関しても，側方ひずみ依存性と側方応力依存性を考慮する．

2) マイクロプレーンの拘束にともなうせん断じん性の変化

MPCモデルでは，マイクロプレーンのせん断ピーク応力τ_0が，応力テンソルσ_{ij}をマイクロプレーンの垂直方向へ分解して得られる直応力S_Nに依存する（せん断ピーク応力の直応力依存性）と仮定した．このせん断摩擦則は，各マイクロプレーンのせん断応答が，各マイクロプレーンのせん断応力と垂直応力を球面積分して得られる応力テンソルσ_{ij}を介して，相互に影響しているというモデル化である．しかし，著者[1)]の研究で確認したように，せん断ピーク応力のみに関する摩擦則では，拘束圧の増大にともなうぜい性－塑性遷移挙動を表現できない．

コンクリートの微視的レベルでのせん断摩擦現象を考えると，マイクロクラックは，その面に作用する圧縮直応力が増大する，つまり拘束圧が増大するのにともなって閉口し，それ以上の損傷が生じにくくなる．そのため，微視的なせん断応答はより塑性的になり，最大応力後のせん断応答が，軟化ぜい性的な挙動から完全塑性的な挙動へ遷移すると考えられる．

そこで一般化MPCモデルでは，マイクロプレーンの圧縮直応力S_Nつまり拘束圧の増大にともなって，マイクロプレーンのせん断ピーク応力およびせん断じん性が向上する（マイクロプレーンの拘束にともなうせん断じん性の変化）というせん断摩擦則の形で，せん断成分に関するマイクロプレーン間の相互作用を考慮する（図－1(e)参照）．なお，せん断成分の除荷応答と再載荷応答のヒステリシスに関しても，マイクロプレーンの拘束にともなう影響を考慮する．

（2）一般化MPCモデルの基本仮定

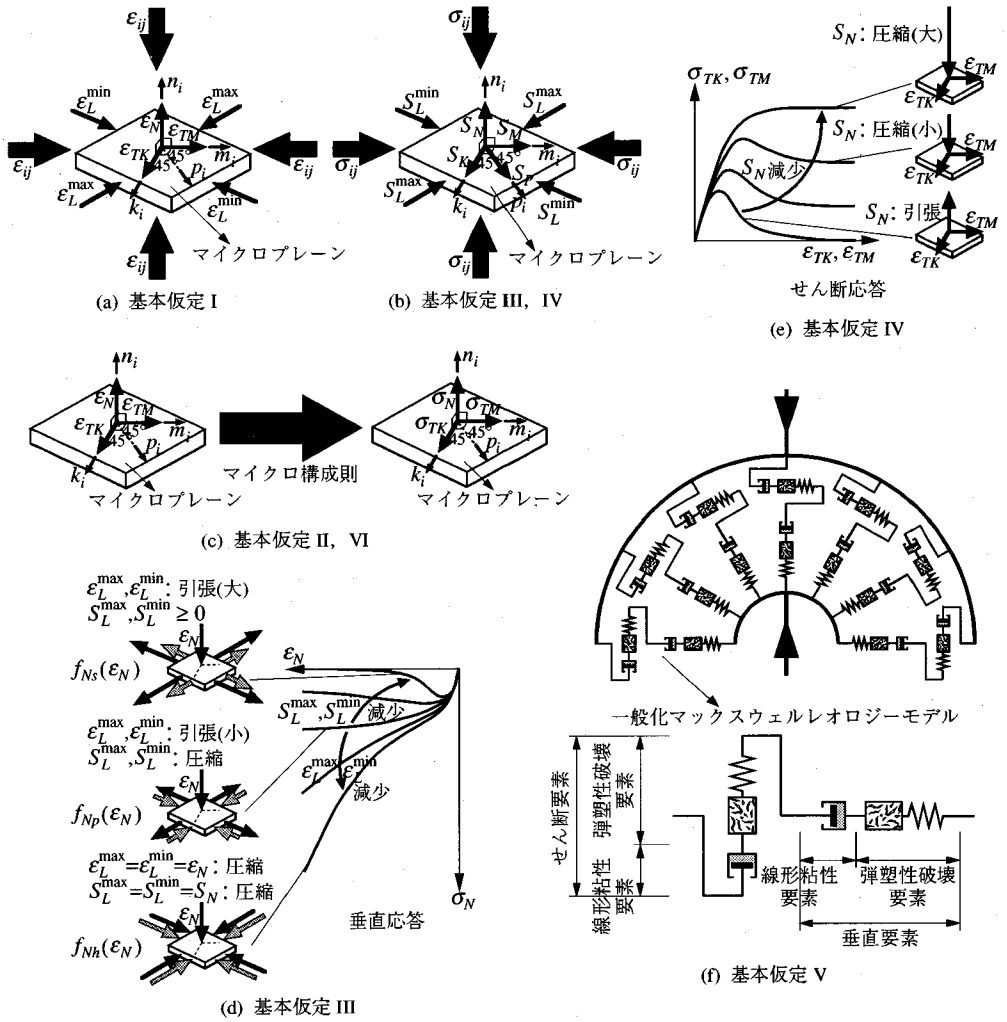
上述したマイクロプレーン間の相互作用は，基本仮定 IIIおよびIVとして一般化MPCモデルに取り入れられる．以下に一般化MPCモデルにおける基本仮定を列記する．

基本仮定I：マイクロプレーンの垂直ひずみε_N，せん断ひずみε_{TK}，ε_{TM}，側方ひずみε_Lは，ひずみテンソルε_{ij}をそれぞれマイクロプレーンの垂直方向，せん断方向，平行方向へ分解したものと定義する（運動学的拘束条件）．せん断ひずみε_{TK}，ε_{TM}は，マイクロプレーン面上で互いに直交する．

基本仮定 II：マイクロプレーンの垂直応力σ_Nとせん断応力σ_{TK}，σ_{TM}は，それぞれ垂直ひずみε_Nとせん断ひずみε_{TK}，ε_{TM}によって主に支配される．それらのマイクロプレーンのひずみと応力は，マイクロ構成則によって関係づけられる．せん断応力σ_{TK}とσ_{TM}の方向は，対応するε_{TK}とε_{TM}の方向に一致することを仮定する．

基本仮定 III：マイクロプレーンでの垂直圧縮応答は，ひずみテンソルε_{ij}をマイクロプレーンの平行方向へ分解して得られる側方ひずみε_Lに依存し，また同時に応力テンソルσ_{ij}をマイクロプレーンの平行方向へ分解して得られる側方応力S_Lにも依存する（付加静的拘束条件：マイクロプレーンの垂直圧縮応答に関する側方ひずみ依存性と側方応力依存性）．

基本仮定IV：マイクロプレーンのせん断応力の非弾性成分は，応力テンソルσ_{ij}をそのマイクロプレーン



図－1　一般化マイクロプレーンコンクリートモデルの基本仮定

の垂直方向へ分解して得られる直応力S_Nに依存する（付加静的拘束条件：マイクロプレーンの拘束にともなうせん断じん性の変化）．

基本仮定V：マイクロプレーンの垂直応力とせん断応力は，弾塑性破壊要素と線形粘性要素を直列結合した一般化マックスウェルレオロジーモデルに基づいて決定される．

基本仮定VI：垂直成分とせん断成分のマイクロ構成則は互いに独立であり，その交差効果は無視する．

図－1は，一般化MPCモデルの基本仮定I～VIを概念的に説明したものである．

3．一般化MPCモデルの定式化

（1）マイクロプレーンのひずみの定義

基本仮定Iの運動学的拘束条件より，単位法線ベクトル**n**を持つマイクロプレーン上の垂直ひずみは，次の式(1)で表わされる．

$$\varepsilon_N = n_j \varepsilon_j^n = n_j n_k \varepsilon_{jk} \tag{1}$$

ここで，n_i：マイクロプレーンの単位法線ベクトル**n**の成分．

次に，基本仮定IとIIに従ってマイクロプレーンの面上で互いに直交する単位ベクトル**k**，**m**を図－1(a)のように考え，この**k**と**m**の方向にあるせん断ひずみε_{TK}，ε_{TM}を考える．なお**k**と**m**の方向は，MPCモデルと同様の方法によって決定した．すなわち1番目のマイクロプレーンのベクトル**m**はz軸と垂直に，2番目のマイクロプレーンのベクトル**m**はx軸と垂直に，3番目のマイクロプレーンのベクトル**m**はy軸と垂直に，また4番目のマイクロプレーンのベクトル**m**は再びz軸と垂直に，というように順次n番目のマイクロプレーンまでベクトル**m**を決定した．ここで，x，

y，z軸はコンクリート材料内に任意に設定されるデカルト直交座標x_iであり，nはマイクロプレーンの全数である．

z軸と垂直なベクトル$\mathbf{m}$は

$$m_1=\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}},\quad m_2=\frac{-n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}},\quad m_3=0 \tag{2a}$$

ただし$n_1=n_2=0$の時，$m_1=1$，$m_2=0$，$m_3=0$．

x軸と垂直なベクトル$\mathbf{m}$は

$$m_2=\frac{n_3}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}},\quad m_3=\frac{-n_2}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}},\quad m_1=0 \tag{2b}$$

ただし$n_2=n_3=0$の時，$m_1=0$，$m_2=1$，$m_3=0$．

y軸と垂直なベクトル$\mathbf{m}$は

$$m_1=\frac{-n_3}{\sqrt{n_1^2+n_3^2}},\quad m_3=\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_3^2}},\quad m_2=0 \tag{2c}$$

ただし$n_1=n_3=0$の時，$m_1=0$，$m_2=0$，$m_3=1$．

ベクトル$\mathbf{m}$が式(2)によって計算されれば，ベクトル$\mathbf{k}$は，$\mathbf{k}=\mathbf{m}\times\mathbf{n}$として容易に得られる．

単位法線ベクトルn_iを持つマイクロプレーンの面上におけるベクトル$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$の方向のせん断ひずみε_{TK}，ε_{TM}は，次の式(3)で定義される．

$$\varepsilon_{TK}=k_j\varepsilon_j^n=k_jn_i\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(k_in_j+k_jn_i\right)\varepsilon_{ij} \tag{3a}$$

$$\varepsilon_{TM}=m_j\varepsilon_j^n=m_jn_i\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(m_in_j+m_jn_i\right)\varepsilon_{ij} \tag{3b}$$

ここで，k_iとm_i：マイクロプレーン面上で互いに直交する単位ベクトル$\mathbf{k}$と$\mathbf{m}$の成分．

式(3)は，ひずみテンソルε_{ij}の対称性を利用して対称化がなされている．

次に基本仮定Ⅲを定式化するためにマイクロプレーンの側方最大主ひずみ$\varepsilon_L^{\max}$と側方最小主ひずみ$\varepsilon_L^{\min}$を考える．$\varepsilon_L^{\max}$と$\varepsilon_L^{\min}$を定義するために図－1 (a)に示すように，ベクトル$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$とのなす角度が45°であるマイクロプレーン面上のもう一つの単位ベクトル$\mathbf{p}=(\mathbf{k}+\mathbf{m})/\sqrt{2}$を用いる．ベクトル$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$，$\mathbf{p}$の方向の側方垂直ひずみ$\varepsilon_K$，$\varepsilon_M$，$\varepsilon_P$は，次の式(4)のように表わされる．

$$\varepsilon_K=k_ik_j\varepsilon_{ij} \tag{4a}$$

$$\varepsilon_M=m_im_j\varepsilon_{ij} \tag{4b}$$

$$\varepsilon_P=p_ip_j\varepsilon_{ij} \tag{4c}$$

ここで，p_i：単位ベクトル$\mathbf{p}$の成分．

さらにマイクロプレーン面内のひずみに関するモールのひずみ円を考えると，マイクロプレーンの側方最大主ひずみ$\varepsilon_L^{\max}$と側方最小主ひずみ$\varepsilon_L^{\min}$が，式(5)のように得られる．

$$\varepsilon_L^{\max}=\frac{\varepsilon_K+\varepsilon_M}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_K-\varepsilon_M}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_K+\varepsilon_M}{2}-\varepsilon_P\right)^2} \tag{5a}$$

$$\varepsilon_L^{\min}=\frac{\varepsilon_K+\varepsilon_M}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_K-\varepsilon_M}{2}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_K+\varepsilon_M}{2}-\varepsilon_P\right)^2} \tag{5b}$$

（2）増分構成関係

マイクロプレーンの垂直成分（添字N）と$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$方向のせん断成分（添字TK，TM）に関する増分型のマイクロ構成関係を式(6)のように定義する．

垂直成分：

$$d\sigma_N=C_Nd\varepsilon_N-d\sigma_N''=f_{N1}\left(\varepsilon_N,\varepsilon_L,S_L\right)=f_{N2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right) \tag{6a}$$

K－せん断成分：

$$d\sigma_{TK}=C_{TK}d\varepsilon_{TK}-d\sigma_{TK}''=f_{T1}\left(\varepsilon_{TK},S_N\right)=f_{T2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right) \tag{6b}$$

M－せん断成分：

$$d\sigma_{TM}=C_{TM}d\varepsilon_{TM}-d\sigma_{TM}''=f_{T1}\left(\varepsilon_{TM},S_N\right)=f_{T2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right) \tag{6c}$$

ここで，$f_{N1}\left(\varepsilon_N,\varepsilon_L,S_L\right)$：$\varepsilon_N$，$\varepsilon_L$，$S_L$の関数で表現される増分垂直応力$d\sigma_N$；$f_{N2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right)$：$\varepsilon_{kl}$，$\sigma_{kl}$，マイクロプレーンの単位法線ベクトル$n_r$の関数で表現される増分垂直応力$d\sigma_N$；$f_{T1}\left(\varepsilon_{Ts},S_N\right)$：せん断ひずみ$\varepsilon_{Ts}$，$S_N$の関数で表現される増分せん断応力$d\sigma_{Ts}$，（ただし$Ts=TK,TM$）；$f_{T2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right)$：$\varepsilon_{kl}$，$\sigma_{kl}$，マイクロプレーンの単位法線ベクトル$n_r$の関数で表現される増分せん断応力$d\sigma_{Ts}$；$d\sigma_N$，$d\sigma_{TK}$，$d\sigma_{TM}$：マイクロプレーンの増分応力；$C_N$，$C_{TK}$，$C_{TM}$：マイクロプレーンの増分弾性剛性；$d\sigma_N''$，$d\sigma_{TK}''$，$d\sigma_{TM}''$：マイクロプレーンの増分非弾性応力．

単位球体内の応力テンソルとその球体表面のマイクロプレーンの応力について，仮想仕事の原理を適用する．

$$\frac{4\pi}{3}d\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}=2\int_S\left(d\sigma_N\delta\varepsilon_N+d\sigma_{TK}\delta\varepsilon_{TK}+d\sigma_{TM}\delta\varepsilon_{TM}\right)f(\mathbf{n})dS \tag{7}$$

ここで，$\int_S dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\,d\phi d\theta$；$\theta$，$\phi$：極座標；$\delta\varepsilon_{ij}$：ひずみテンソルの変分；$\delta\varepsilon_N$，$\delta\varepsilon_{TK}$，$\delta\varepsilon_{TM}$：マイクロプレーンの各ひずみの変分；$S$：単位半球の表面；$f(\mathbf{n})$：マイクロプレーンの法線方向$\mathbf{n}$に関する重み関数．

式(7)の左辺の$4\pi/3$は，増分応力テンソルによる仮想仕事が単位球体の体積に関して考えられることを意味し，また右辺の係数2は，マイクロプレーンの増分応力による仮想仕事が単位半球の表面Sについて考えられることを意味している．関数$f(\mathbf{n})$によって，材料の初期異方性を導入することができるが，本研究では初期等方性$\left(f(\mathbf{n})=1\right)$を仮定する．式(1)，式(3)，式(6)を式(7)に代入して整理すると式(8)の増分構成関係が誘導される．

$$d\sigma_{ij}=C_{ijrs}d\varepsilon_{rs}-d\sigma_{ij}'' \tag{8a}$$

$$C_{ijrs}=\frac{3}{2\pi}\int_S\left[n_in_jn_rn_sC_N\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(k_i n_j + k_j n_i\right)\left(k_r n_s + k_s n_r\right)C_{TK}$$
$$+\frac{1}{4}\left(m_i n_j + m_j n_i\right)\left(m_r n_s + m_s n_r\right)C_{TM}\Big]f(\mathbf{n})dS \quad (8b)$$

$$d\sigma_{ij}{}'' = \frac{3}{2\pi}\int_S\Big[n_i n_j d\sigma_N{}'' + \frac{1}{2}\left(k_i n_j + k_j n_i\right)d\sigma_{TK}{}''$$
$$+\frac{1}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right)d\sigma_{TM}{}''\Big]f(\mathbf{n})dS \quad (8c)$$

ここで，C_{ijrs}：増分弾性剛性テンソル；$d\sigma_{ij}{}''$：増分非弾性応力テンソル．

式(8)の増分構成関係は，式(9)の形でも表わせる．

$$d\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi}\int_S\Big[n_i n_j d\sigma_N + \frac{d\sigma_{TK}}{2}\left(k_i n_j + k_j n_i\right)$$
$$+\frac{d\sigma_{TM}}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right)\Big]f(\mathbf{n})dS$$
$$= \frac{3}{2\pi}\int_S\Big[n_i n_j f_{N2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(k_i n_j + k_j n_i\right)f_{T2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right)f_{T2}\left(\varepsilon_{kl},\sigma_{kl},n_r\right)\Big]f(\mathbf{n})dS \quad (9)$$

式(9)の増分応力テンソル$d\sigma_{ij}$が応力テンソルσ_{kl}に依存することからわかるように，一般化MPCモデルでは，あるマイクロプレーンの応答が，すべてのマイクロプレーンの応力を球面積分して得られる応力テンソルのそのマイクロプレーンへの分解成分に依存するという付加静的拘束条件の形で，マイクロプレーンの相互作用がモデル化されている．

このマイクロプレーンの相互作用は，運動学的拘束条件に基づき各マイクロプレーンの応答が各々独立であることを仮定するマイクロプレーンモデルの初期の基本概念から逸脱するものであるが，非均質材料であるコンクリートの構成関係を合理的にモデル化するためには不可欠であり，微視的レベルで生じる各方向のマイクロクラック，損傷，塑性が影響し合う状況を考慮するものである．

初期等方弾性挙動の場合，式(8b)のC_NとC_{TK}，C_{TM}に対してマイクロプレーンの垂直初期剛性C_N^0とせん断初期剛性C_T^0を代入し，また$f(\mathbf{n})=1$とすることが可能である．C_N^0とC_T^0はマイクロプレーンの方向に関して独立であるので，もし単位ベクトル$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$が陽に表現されていれば，式(8b)は陽に積分することができ，等方弾性体の弾性定数とC_N^0，C_T^0との関係を記述することが可能になる．しかしながら前述したように，単位ベクトル$\mathbf{k}$，$\mathbf{m}$は陽に表わされておらず数値計算されるため，上述のようにC_N^0とC_T^0を求めることができない．

Kimモデル[4]は，MPCモデルと同様にN-S定式化に基づいているにもかかわらず，マイクロプレーンのせん断ベクトルがデカルト直交座標系の3成分で記述されているため，等方弾性体の弾性定数とC_N^0，C_T^0との関係が得られている．MPCモデルの研究[3]では，マイクロプレーンの初期線形弾性状態において，せん断応力ベクトルの大きさとせん断ひずみベクトルの大きさとの関係が，Kimモデルの場合と同じ形式であることから，次式(10)に示すKimモデルでのマイクロプレーンの垂直初期剛性C_N^0とせん断初期剛性C_T^0の解析解を適用した．

$$C_N^0 = \frac{E^0}{\left(1-2\nu^0\right)} \quad (10a)$$

$$C_T^0 = \frac{\left(1-4\nu^0\right)E^0}{\left(1-2\nu^0\right)\left(1+\nu^0\right)} \quad (10b)$$

ここで，E^0：初期弾性係数；ν^0：初期ポアソン比．

一般化MPCモデルでも，MPCモデルと同様に式(10)を用いる．

（3）マイクロ構成則の速度依存性

一般化MPCモデルは，MPCモデルと同様に基本仮定Vに従い，各マイクロプレーンのマイクロ構成則として図－1(f)のように弾塑性破壊要素と線形粘性要素とを直列結合した一般化マックスウェルレオロジーモデルを採用することによって，速度依存型の構成則を形成している．

説明をわかりやすくするため，マイクロプレーンの各ひずみε_N，ε_{TK}，ε_{TM}と対応する各応力σ_N，σ_{TK}，σ_{TM}をひずみεと応力σで表わすことにすると，マイクロ構成則の一般化マックスウェルレオロジーモデルは，次の基礎微分方程式(11)によって記述される．

$$\frac{d\sigma}{dt} = C^t\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{\rho} \quad (11)$$

ここで，C^t：弾塑性破壊要素の接線剛性（処女載荷の時：$C^t = C^v$；除荷と再載荷の時：$C^t = C^{ur}$）；t：時刻；ρ：線形粘性要素のレラクゼーション時間．

無限大のひずみにおいて応力がゼロとなるべきひずみ軟化に関して式(11)を中央差分近似によって解く場合，数値計算上の不安定性が生じることが多く，たとえ解が安定であっても大きな数値計算誤差が累積され無限大のひずみにおいて応力が正確にゼロとならない．

MPCモデルでは，材令効果のあるコンクリートのクリープを記述するためにBazantら[5]によって開発された指数アルゴリズム（exponential algorithm）の考え方に基づいて，前述した数値計算上の問題点を克服する手法が考案された[3]．本研究においてもこの手法を採用し，式(11)の時間経路積分を行なう．

MPCモデルの指数アルゴリズムによれば，基礎微

分方程式(11)の厳密解に計算時間ステップ（前時刻t_rから現時刻t_{r+1}）の初期境界条件を考慮し，計算時間ステップの中点$t_{r+1/2}$の値（下付き添字$r+1/2$で表わす）を用いることによって，式(11)の解が式(6)のマイクロ構成関係の形式として，式(12)のように表現される．

$$\Delta\sigma = C\Delta\varepsilon - \Delta\sigma'' \tag{12a}$$

$$C = \frac{1}{\Delta z}\left(1-\mathrm{e}^{-\Delta z}\right)C^{ur}_{r+1/2} \tag{12b}$$

$$\Delta\sigma'' = \left(1-\mathrm{e}^{-\Delta z}\right)\sigma_r \tag{12c}$$

$$\Delta z = \Delta t/\beta_{r+1/2} \tag{13}$$

$$\frac{1}{\beta_{r+1/2}} = \frac{1}{\rho} + \left(C^{ur}_{r+1/2} - C^{t}_{r+1/2}\right)\sigma_{r+1/2}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \tag{14}$$

ここで，σ_r：前時刻t_rでの応力．

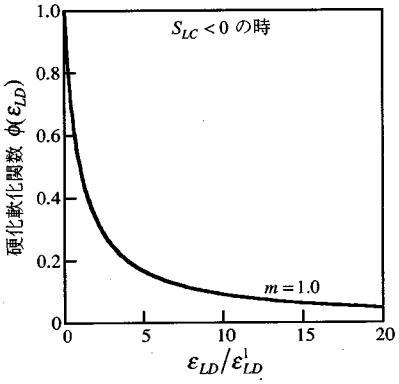
4．垂直成分のマイクロ構成則

静水圧圧縮挙動の場合以外は，巨視的なポアソン効果のためマイクロプレーンの垂直ひずみε_Nと側方ひずみε_Lの差である側方偏差ひずみε_{LD}は，載荷とともに増加し最終的に無限大に達する．MPCモデルでは，側方偏差ひずみε_{LD}が無限大となる場合において垂直圧縮応答が軟化挙動に一致するように，垂直圧縮応答の側方ひずみ依存性をモデル化した．高拘束圧下の圧縮子午線上の３軸圧縮解析においても，垂直圧縮状態となるマイクロプレーンでは側方偏差ひずみε_{LD}が単調増加し軟化応答となるため，巨視応答は最大応力に達した後に完全塑性流れ挙動が得られることなく，ひずみ軟化が生じ，拘束圧増加にともなうぜい性－塑性遷移挙動が再現できなかったと考えられる[1]．一般化MPCモデルでは，そのような問題を基本仮定 IIIによって解決するわけであるが，基本仮定 IIIに従って垂直圧縮応答の側方ひずみ依存性と側方応力依存性を同時に考慮する目的は，次のような状況を記述するためである（図－１(d)参照）．

1) 静水圧圧縮載荷時に，マイクロプレーンの側方ひずみε_Lと垂直ひずみε_Nが同じになる場合を除いて，垂直圧縮応答が巨視的な静水圧挙動と一致することはありえない．

2) マイクロプレーンの垂直ひずみε_Nと側方ひずみε_Lの差（側方偏差ひずみε_{LD}）が大きく，また側方応力S_Lが圧縮で大きい場合，垂直圧縮応答は塑性的な挙動を示す．

3) マイクロプレーンの垂直ひずみε_Nと側方ひずみε_Lの差（側方偏差ひずみε_{LD}）が大きいが，側方応力S_Lが引張または圧縮の小さい値である場合，垂直圧縮応答はよりぜい性的になり，ひずみ軟化を生じやすくなる．



図－２　マイクロプレーンの垂直圧縮成分に関する硬化軟化関数

（１）マイクロプレーンの硬化軟化関数

垂直圧縮応答の側方応力依存性を定式化するために，３．（１）におけるマイクロプレーンの側方ひずみの場合と同様に，マイクロプレーンの面上で互いに45°をなす単位ベクトル**k**，**m**，**p**の方向に応力テンソルを分解し，ベクトル**k**，**m**，**p**の方向の側方応力S_K，S_M，S_Pを求める（図－１(b)参照）．

$$S_K = k_i k_j \sigma_{ij} \tag{15a}$$

$$S_M = m_i m_j \sigma_{ij} \tag{15b}$$

$$S_P = p_i p_j \sigma_{ij} \tag{15c}$$

マイクロプレーン面内の側方応力に関するモールの応力円を考えると，側方応力S_K，S_M，S_Pからマイクロプレーンの側方最大主応力$S_L^{\max}$と側方最小主応力$S_L^{\min}$が式(16)のように計算される．

$$S_L^{\max} = \frac{S_K+S_M}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_K-S_M}{2}\right)^2 + \left(\frac{S_K+S_M}{2}-S_P\right)^2} \tag{16a}$$

$$S_L^{\min} = \frac{S_K+S_M}{2} - \sqrt{\left(\frac{S_K-S_M}{2}\right)^2 + \left(\frac{S_K+S_M}{2}-S_P\right)^2} \tag{16b}$$

側方最大主応力$S_L^{\max}$と側方最小主応力$S_L^{\min}$を組み合わせることによって単一の応力不変量である側方拘束応力S_{LC}を式(17)のように定義する．

$$\begin{aligned} S_{LC} &= S_L^{\max} + S_L^{\min} && : S_L^{\max}<0,\ S_L^{\min}<0\text{の時} \\ &= 0 && : S_L^{\max}\geq 0\text{の時} \\ &= 0 && : \text{他の任意のマイクロプレーンで}S_N\geq 0\text{の時} \\ &= S_{LC}^{p} && : S_{LC}\leq S_{LC}^{p}\text{の時} \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$S_{LC}^{p}\leq S_{LC}\leq 0$；$S_{LC}^{p}$：垂直圧縮応答が完全塑性の場合の$S_{LC}$．

垂直ひずみと側方ひずみの差を表現する側方偏差ひずみε_{LD}は，マイクロプレーンの側方最大主ひずみ$\varepsilon_L^{\max}$，側方最小主ひずみ$\varepsilon_L^{\min}$を用いて，式(18)のよう

に定義される．

$$\varepsilon_{LD}=\left|\varepsilon_N-\varepsilon_L^{\max}\right|+\left|\varepsilon_N-\varepsilon_L^{\min}\right| \tag{18}$$

一般化MPCモデルでは，マイクロプレーンの側方偏差ひずみε_{LD}と前述の側方拘束応力S_{LC}によって式(19)の硬化軟化関数$\phi(\varepsilon_{LD})$を考える（図－２）．

$$\begin{aligned}\phi(\varepsilon_{LD})&=\frac{1}{1+\left(\varepsilon_{LD}/\varepsilon_{LD}^{1}\right)^{m}} &&: S_{LC}<0\text{の時}\\ &=\phi^{p} &&: \varepsilon_{LD}=\varepsilon_{LD}^{p}\text{の時}\\ &=0 &&: S_{LC}\geq 0\text{の時}\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，ε_{LD}^{1}：$\phi(\varepsilon_{LD})=0.5$の時の$\varepsilon_{LD}$；$\varepsilon_{LD}^{p}$：垂直圧縮応答が完全塑性の場合の$\varepsilon_{LD}$；$m$：$\phi(\varepsilon_{LD})$曲線の形状を規定する定数；$\phi^{p}$：垂直圧縮応答が完全塑性の場合の$\phi(\varepsilon_{LD})$．

（２）側方ひずみ依存性と側方応力依存性

式(19)の硬化軟化関数$\phi(\varepsilon_{LD})$および式(17)の側方拘束応力S_{LC}によって重み関数を設定し，その重み関数を用いて式(20)のように垂直圧縮領域の処女載荷曲線が静水圧応答から完全塑性応答へそして軟化応答へ遷移する状況を記述する（図－１(d)参照）．

$1\geq\phi(\varepsilon_{LD})\geq\phi^{p}$かつ$S_{LC}$が任意の時：

$$\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})=\left(\frac{\phi(\varepsilon_{LD})-\phi^{p}}{1-\phi^{p}}\right)f_{Nh}(\varepsilon_N)+\left(\frac{1-\phi(\varepsilon_{LD})}{1-\phi^{p}}\right)f_{Np}(\varepsilon_N) \tag{20a}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$S_{LC}\leq S_{LC}^{p}$の時：

$$\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})=f_{Np}(\varepsilon_N) \tag{20b}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$S_{LC}^{p}<S_{LC}<0$の時：

$$\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})=\left(\frac{S_{LC}}{S_{LC}^{p}}\right)f_{Np}(\varepsilon_N)+\left(\frac{S_{LC}^{p}-S_{LC}}{S_{LC}^{p}}\right)f_{Ns}(\varepsilon_N) \tag{20c}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$0\leq S_{LC}$の時：

$$\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})=f_{Ns}(\varepsilon_N) \tag{20d}$$

ここで，$f_{Nh}(\varepsilon_N)$：垂直成分の静水圧載荷曲線（$\phi(\varepsilon_{LD})=1$の場合）；$f_{Np}(\varepsilon_N)$：垂直成分の完全塑性載荷曲線（$\phi(\varepsilon_{LD})=\phi^{p}$の場合）；$f_{Ns}(\varepsilon_N)$：垂直成分の圧縮軟化載荷曲線（$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$0\leq S_{LC}$の場合）．

垂直圧縮領域の載荷接線剛性は，式(20)を偏微分することによって式(21)のように与えられる．

$1\geq\phi(\varepsilon_{LD})\geq\phi^{p}$かつ$S_{LC}$が任意の時：

$$\frac{\partial\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})}{\partial\varepsilon_N}=\left(\frac{\phi(\varepsilon_{LD})-\phi^{p}}{1-\phi^{p}}\right)\frac{df_{Nh}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N}+\left(\frac{1-\phi(\varepsilon_{LD})}{1-\phi^{p}}\right)\frac{df_{Np}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N} \tag{21a}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$S_{LC}\leq S_{LC}^{p}$の時：

$$\frac{\partial\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})}{\partial\varepsilon_N}=\frac{df_{Np}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N} \tag{21b}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$S_{LC}^{p}<S_{LC}<0$の時：

$$\frac{\partial\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})}{\partial\varepsilon_N}=\left(\frac{S_{LC}}{S_{LC}^{p}}\right)\frac{df_{Np}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N}+\left(\frac{S_{LC}^{p}-S_{LC}}{S_{LC}^{p}}\right)\frac{df_{Ns}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N} \tag{21c}$$

$\phi^{p}>\phi(\varepsilon_{LD})\geq 0$かつ$0\leq S_{LC}$の時：

$$\frac{\partial\sigma_N(\varepsilon_N,\varepsilon_{LD},S_{LC})}{\partial\varepsilon_N}=\frac{df_{Ns}(\varepsilon_N)}{d\varepsilon_N} \tag{21d}$$

垂直圧縮領域の線形除荷再載荷剛性$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$は，式(20)の重み付けと同様に式(22)のように与えられる．

$1\geq\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)\geq\phi^{p}$かつ$S_{LC}^{ur}$が任意の時：

$$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=\left(\frac{\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)-\phi^{p}}{1-\phi^{p}}\right)C_{Nh}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right)+\left(\frac{1-\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)}{1-\phi^{p}}\right)C_{Np}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right) \tag{22a}$$

$\phi^{p}>\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)\geq 0$かつ$S_{LC}^{ur}\leq S_{LC}^{p}$の時：

$$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=C_{Np}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right) \tag{22b}$$

$\phi^{p}>\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)\geq 0$かつ$S_{LC}^{p}<S_{LC}^{ur}<0$の時：

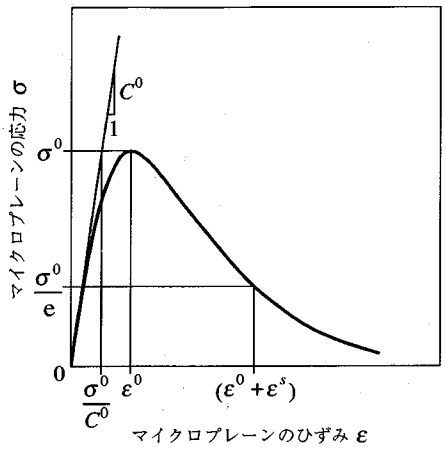
$$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=\left(\frac{S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)C_{Np}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right)+\left(\frac{S_{LC}^{p}-S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)C_{Ns}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right) \tag{22c}$$

$\phi^{p}>\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)\geq 0$かつ$0\leq S_{LC}^{ur}$の時：

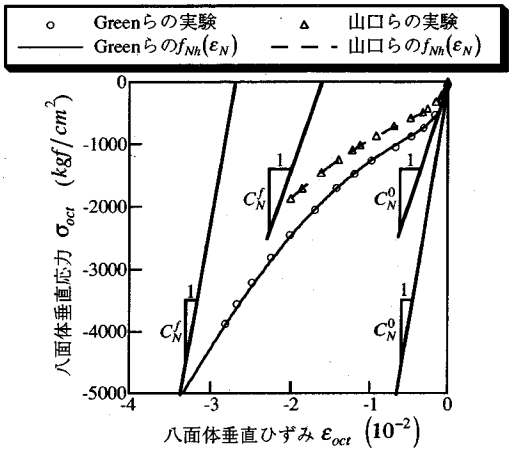
$$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=C_{Ns}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right) \tag{22d}$$

ここで，$C_{Nh}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right)$：垂直成分の静水圧載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性（$\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)=1$の場合）；$C_{Np}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right)$：垂直成分の完全塑性載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性（$\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)=\phi^{p}$の場合）；$C_{Ns}^{ur0}\left(\sigma_N^{u},\varepsilon_N^{u}\right)$：垂直成分の圧縮軟化載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性（$\phi^{p}>\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)\geq 0$かつ$0\leq S_{LC}^{ur}$の場合）；$\sigma_N^{u}$と$\varepsilon_N^{u}$：除荷の開始する垂直応力と垂直ひずみ；$\varepsilon_{LD}^{ur}$：除荷再載荷用の側方偏差ひずみ（垂直圧縮における除荷が開始した時のε_{LD}）；S_{LC}^{ur}：除荷再載荷用の側方拘束応力（垂直圧縮における除荷が開始した時のS_{LC}）．

一般化MPCモデルでは，式(20)～式(22)を用いて垂直圧縮応答に側方ひずみ依存性と側方応力依存性が考慮されることによって，マイクロプレーンの相互作用が表わされる．



図－3　マイクロプレーンの軟化載荷曲線



図－4　Greenらおよび山口らの静水圧圧縮実験との比較

（3）垂直成分の載荷曲線

Pratモデル[2]，Gambarovaモデル[6]，Ohモデル[7]では，マイクロプレーンの軟化型の応力－ひずみ関係として単一の指数関数が使われており，そのためマイクロプレーンのピーク応力やその時のひずみ，じん性を任意に設定できなかった．一般化MPCモデルでは，MPCモデルと同様に，ピーク応力前後において異なる曲線を採用することによって，これらを別個にかつ任意に設定できるようにする．

垂直成分の引張領域におけるピーク応力前およびピーク応力後の載荷曲線を式(23)のように定義する（図－3参照）．

$0 \le \varepsilon_N \le \varepsilon_{NT}^0$の時（ピーク応力前）：

$$\sigma_N = \sigma_{NT}^0 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{NT}^0} \right)^{C_N^0 \varepsilon_{NT}^0 / \sigma_{NT}^0} \right] \tag{23a}$$

$\varepsilon_{NT}^0 < \varepsilon_N$の時（ピーク応力後）：

$$\sigma_N = \sigma_{NT}^0 \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_N - \varepsilon_{NT}^0}{\varepsilon_{NT}^s} \right)^{p_{NT}} \right] \tag{23b}$$

ここで，$\varepsilon_{NT}^0 = \dfrac{\sigma_{NT}^0}{\zeta_{NT} C_N^0}$；$\varepsilon_{NT}^s = \gamma_{NT} \varepsilon_{NT}^0 = \dfrac{\gamma_{NT} \sigma_{NT}^0}{\zeta_{NT} C_N^0}$．

式(23)においてσ_{NT}^0，ε_{NT}^0は垂直ピーク応力とその時の垂直ひずみであり，ε_{NT}^sは垂直軟化載荷曲線での垂直応力が$\sigma_N = \sigma_{NT}^0 / e$となる垂直ひずみ$\varepsilon_N = \varepsilon_{NT}^0 + \varepsilon_{NT}^s$を規定する．$\zeta_{NT}$は$\varepsilon_{NT}^0$を規定するパラメータであり，$\gamma_{NT}$は$\varepsilon_{NT}^s$を支配するパラメータである．$p_{NT}$は垂直軟化曲線の形状を変化させるパラメータである．ゆえに式(23)は，力学的意味が明快な4パラメータσ_{NT}^0，ζ_{NT}，γ_{NT}，p_{NT}によって垂直引張応力－ひずみ曲線の形状を容易に設定することができ，このことが本モデルによって構成関係を適切に表現するために非常に有効となる．

前述したように垂直成分の圧縮領域については静水圧載荷曲線，完全塑性載荷曲線，軟化載荷曲線を指定しなくてはならない．

垂直成分の静水圧載荷曲線は，式(24)を使用する（図－4参照）．

$$f_{Nh}(\varepsilon_N) = \sigma_N = \left[\frac{C_N^0}{\left(\dfrac{\varepsilon_N C_N^0}{\sigma_a} \right)^{p_H} + 1} + \frac{C_N^f}{\left(\dfrac{\varepsilon_N C_N^f}{2\sigma_b} \right)^{-q_H} + 1} \right] \varepsilon_N \tag{24}$$

ここで，$\sigma_a = C_N^0 \varepsilon_a$；$\sigma_b = C_N^f \varepsilon_b / 2$；$C_N^f$：静水圧載荷曲線の最終剛性；$\sigma_a$：$f_{Nh}(\varepsilon_N)$の第1項で$p_H = 1$として得られる漸近応力（$\varepsilon_a$に対応する垂直応力）；$\sigma_b$：$\varepsilon_b$に対応する垂直応力；$\varepsilon_a$と$\varepsilon_b$：静水圧載荷曲線の形状を決定する垂直ひずみ；$p_H$と$q_H$：静水圧載荷曲線の形状を決定する指数$(p_H \le 1,\ q_H > -1)$．

垂直成分の完全塑性載荷曲線は，式(25)を使用する．

$0 \ge \varepsilon_N \ge \varepsilon_{Np}^0$の時（ピーク応力前）：

$$f_{Np}(\varepsilon_N) = \sigma_N = \sigma_{Np}^0 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_{Np}^0} \right)^{C_N^0 \varepsilon_{Np}^0 / \sigma_{Np}^0} \right] \tag{25a}$$

$\varepsilon_{Np}^0 > \varepsilon_N$の時（ピーク応力後）：

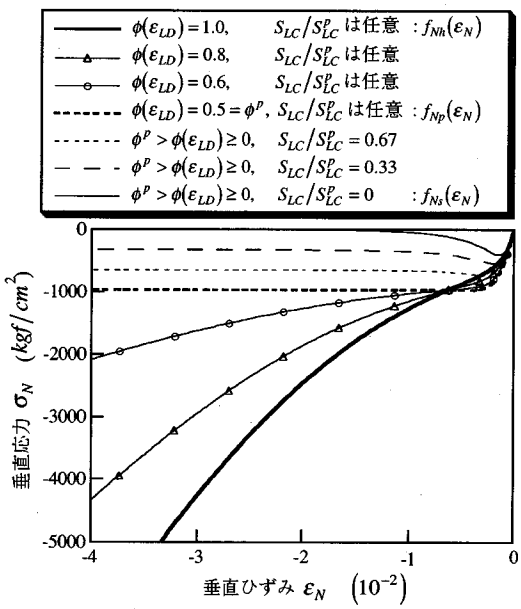
$$f_{Np}(\varepsilon_N) = \sigma_N = \sigma_{Np}^0 \tag{25b}$$

ここで，$\varepsilon_{Np}^0 = \dfrac{\sigma_{Np}^0}{\zeta_{Np} C_N^0}$．

式(25)においてσ_{Np}^0，ε_{Np}^0は，垂直成分の完全塑性載荷曲線におけるピーク応力およびその時のひずみであり，ζ_{Np}はε_{Np}^0を規定するパラメータである．

垂直成分の圧縮領域における軟化載荷曲線は，引張領域と同様な式(26)を使用する（図－3参照）．

$0 \ge \varepsilon_N \ge \varepsilon_{NC}^0$の時（ピーク応力前）：



図－5　垂直圧縮応答の側方ひずみ依存性と側方応力依存性

$$f_{Ns}(\varepsilon_N)=\sigma_N=\sigma^0_{NC}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon^0_{NC}}\right)^{C^0_N\varepsilon^0_{NC}/\sigma^0_{NC}}\right] \quad (26a)$$

$\varepsilon^0_{NC}>\varepsilon_N$ の時（ピーク応力後）：

$$f_{Ns}(\varepsilon_N)=\sigma_N=\sigma^0_{NC}\exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_N-\varepsilon^0_{NC}}{\varepsilon^s_{NC}}\right)^{p_{NC}}\right] \quad (26b)$$

ここで，$\varepsilon^0_{NC}=\dfrac{\sigma^0_{NC}}{\zeta_{NC}C^0_N}$；$\varepsilon^s_{NC}=\gamma_{NC}\varepsilon^0_{NC}=\dfrac{\gamma_{NC}\sigma^0_{NC}}{\zeta_{NC}C^0_N}$.

図－5は，上述した一般化MPCモデルによって計算した垂直圧縮応答であり側方ひずみ依存性と側方応力依存性の影響が表わされている．図－5よりわかるように軟化載荷曲線と完全塑性載荷曲線との間では軟化後の残留強度が増大するようなせい性－塑性遷移挙動が生じている．図－4では，式(24)の静水圧載荷曲線を用いて計算した静水圧圧縮挙動とGreenら[8]の実験結果および山口ら[9]の実験結果が比較されている．Greenらの実験から同定された材料定数は，$C^f_N=C^0_N$ ，$\sigma_a=-965kgf/cm^2$ ，$\sigma_b=-63060\ kgf/cm^2$，$p_H=q_H=1.0$ であり，山口らの実験から同定された材料定数は，$C^f_N=C^0_N$，$\sigma_a=-700\ kgf/cm^2$，$\sigma_b=-19000\ kgf/cm^2$，$p_H=q_H=1.0$ である．同図から式(24)は，静水圧圧縮挙動を十分精度よく表現できることがわかる．

（4）垂直成分の線形除荷再載荷剛性

マイクロプレーンの除荷再載荷におけるヒステリシス則は，後述するように線形除荷再載荷剛性 C^{ur0} を基にして構築される．

垂直成分の静水圧載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{Nh}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$，完全塑性載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{Np}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$ としては，損傷による剛性低下を考えないで，垂直初期剛性 C^0_N を使用する．

$$C^{ur0}_{Nh}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=C^0_N \quad (27)$$

$$C^{ur0}_{Np}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=C^0_N \quad (28)$$

一方，垂直軟化応答の場合，ピーク応力後の損傷による漸進的剛性低下を考える．すなわち垂直引張ピーク応力前の軟化載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{NT}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$，垂直圧縮ピーク応力前の軟化載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{Ns}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$ としては，損傷を仮定せず垂直初期剛性 C^0_N を使用するが，垂直引張ピーク応力後の軟化載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{NT}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$，垂直圧縮ピーク応力後の軟化載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{Ns}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$ としては，損傷による漸進的剛性低下を考え次の式(29)を採用する．

$0\leq\varepsilon^u_{NT}\leq\varepsilon^0_{NT}$ の時（引張ピーク応力前）：

$$C^{ur0}_{NT}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=C^0_N \quad (29a)$$

$\varepsilon^u_{NT}>\varepsilon^0_{NT}$ の時（引張ピーク応力後）：

$$C^{ur0}_{NT}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=\alpha_{NT}C^0_N+\left(1-\alpha_{NT}\right)\frac{\sigma^u_{NT}}{\varepsilon^u_{NT}-\xi_{NT}} \quad (29b)$$

$0\geq\varepsilon^u_{NC}\geq\varepsilon^0_{NC}$ の時（圧縮ピーク応力前）：

$$C^{ur0}_{Ns}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=C^0_N \quad (29c)$$

$\varepsilon^u_{NC}<\varepsilon^0_{NC}$ の時（圧縮ピーク応力後）：

$$C^{ur0}_{Ns}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)=\alpha_{NC}C^0_N+\left(1-\alpha_{NC}\right)\frac{\sigma^u_{NC}}{\varepsilon^u_{NC}-\xi_{NC}} \quad (29d)$$

ここで，$\xi_{NT}=\varepsilon^0_{NT}-\dfrac{\sigma^0_{NT}}{C^0_N}$；$\xi_{NC}=\varepsilon^0_{NC}-\dfrac{\sigma^0_{NC}}{C^0_N}$.

式(29)において σ^u_{NT} と σ^u_{NC} は，除荷が開始される垂直引張応力および垂直圧縮応力であり，ε^u_{NT} と ε^u_{NC} は，除荷が開始される垂直引張ひずみおよび垂直圧縮ひずみである．α_{NT} と α_{NC} は，垂直引張軟化および垂直圧縮軟化の漸進的損傷を特徴づける重み係数であり，ξ_{NT} と ξ_{NC} は，垂直引張ピーク応力および垂直圧縮ピーク応力からゼロ応力へ垂直初期剛性 C^0_N で完全に除荷した場合の塑性残留ひずみである．このように，マイクロプレーンの破壊損傷を表現する α_{NT} と α_{NC} およびマイクロプレーンの塑性を表現する ξ_{NT} と ξ_{NC} によって定式化される軟化応答に関する線形除荷再載荷剛性 $C^{ur0}_{NT}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$ と $C^{ur0}_{Ns}\left(\sigma^u_N,\varepsilon^u_N\right)$ がマイクロ構成則で使用されることにより，垂直成分の弾塑性破壊挙動が得られる．ただし ξ_{NT} と ξ_{NC} は，垂直ピーク応力前の載荷曲線形状を決定する ε^0_{NT} と ε^0_{NC} および σ^0_{NT} と σ^0_{NC} に依存しており独立なパラメータではない．

5．せん断成分のマイクロ構成則

K－せん断成分（添字TK）とM－せん断成分（添字TM）は，マイクロプレーン上での方向のみが異なるだけであるから，それらのマイクロ構成則は同一のものでなくてはならない．ゆえに，ここではK－せん断成分とM－せん断成分を区別せずに単にせん断成分（添字T）としてのマイクロ構成則を考える．

（1）拘束にともなうせん断じん性の変化

本モデルでは，引張の直応力下におけるマイクロプレーンのせん断成分の軟化載荷曲線（添字TT），圧縮の直応力下におけるマイクロプレーンのせん断成分の軟化載荷曲線（添字TC），圧縮の直応力下におけるマイクロプレーンのせん断成分の完全塑性載荷曲線（添字Tp）をそれぞれ別個に定義する．引張の直応力下における場合，および圧縮の直応力下におけるせん断ピーク応力前の場合では，せん断摩擦則によってせん断ピーク応力の増減のみを考慮する．それに対して，圧縮の直応力下におけるせん断ピーク応力後の場合では軟化載荷曲線と完全塑性載荷曲線を直応力によって重み付けし，せん断応答を計算する．すなわち以下のようなせん断応答のぜい性－塑性遷移挙動（マイクロプレーンの拘束にともなうせん断じん性の変化）を記述する（図－1 (e)参照）．

1) 引張の直応力下において，せん断応答は軟化挙動であり，直応力が増大する場合，せん断摩擦則によってせん断ピーク応力が減少し，応答曲線の形状は相似的に縮小する．

2) 圧縮の直応力が増大する場合，せん断応答は，せん断摩擦則によって，そのせん断ピーク応力が増大するとともに軟化載荷曲線から完全塑性載荷曲線に遷移する．

マイクロプレーンの直応力S_Nは，応力テンソルσ_{ij}をマイクロプレーンの単位法線ベクトル$\mathbf{n}$の方向へ分解した応力として，次の式(30)のように定義される．

$$S_N = n_j \sigma_j^n = n_j n_k \sigma_{jk} \tag{30}$$

直応力S_Nにおけるせん断成分の載荷曲線$\sigma_T(\varepsilon_T, S_N)$は，各載荷曲線$f_{Tp}(\varepsilon_T)$，$f_{TC}(\varepsilon_T)$，$f_{TT}(\varepsilon_T)$を次の式(31)のように，直応力$S_N$によって重み付け計算して求められる．

$S_N \le S_N^p$の時：

$$\sigma_T(\varepsilon_T, S_N) = f_{Tp}(\varepsilon_T) \tag{31a}$$

$S_N^p < S_N < 0$かつせん断ピーク応力前の時：

$$\sigma_T(\varepsilon_T, S_N) = f_{TC}(\varepsilon_T) = f_{Tp}(\varepsilon_T) \tag{31b}$$

$S_N^p < S_N < 0$かつせん断ピーク応力後の時：

$$\sigma_T(\varepsilon_T, S_N) = \left(\frac{S_N}{S_N^p}\right) f_{Tp}(\varepsilon_T) + \left(\frac{S_N^p - S_N}{S_N^p}\right) f_{TC}(\varepsilon_T) \tag{31c}$$

$0 \le S_N$の時：

$$\sigma_T(\varepsilon_T, S_N) = f_{TT}(\varepsilon_T) \tag{31d}$$

ここで，$f_{Tp}(\varepsilon_T)$：せん断成分の完全塑性載荷曲線（$S_N \le S_N^p$の場合）；$f_{TC}(\varepsilon_T)$：圧縮の直応力下におけるせん断成分の軟化載荷曲線；$f_{TT}(\varepsilon_T)$：引張の直応力下におけるせん断成分の軟化載荷曲線；S_N^p：せん断応答が完全塑性となる場合のS_N．

せん断成分の載荷接線剛性は，式(31)を偏微分することによって式(32)のように与えられる．

$S_N \le S_N^p$の時：

$$\frac{\partial \sigma_T(\varepsilon_T, S_N)}{\partial \varepsilon_T} = \frac{df_{Tp}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} \tag{32a}$$

$S_N^p < S_N < 0$かつせん断ピーク応力前の時：

$$\frac{\partial \sigma_T(\varepsilon_T, S_N)}{\partial \varepsilon_T} = \frac{df_{TC}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} = \frac{df_{Tp}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} \tag{32b}$$

$S_N^p < S_N < 0$かつせん断ピーク応力後の時：

$$\frac{\partial \sigma_T(\varepsilon_T, S_N)}{\partial \varepsilon_T} = \left(\frac{S_N}{S_N^p}\right) \frac{df_{Tp}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} + \left(\frac{S_N^p - S_N}{S_N^p}\right) \frac{df_{TC}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} \tag{32c}$$

$0 \le S_N$の時：

$$\frac{\partial \sigma_T(\varepsilon_T, S_N)}{\partial \varepsilon_T} = \frac{df_{TT}(\varepsilon_T)}{d\varepsilon_T} \tag{32d}$$

せん断成分の線形除荷再載荷剛性$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u, S_N^{ur}\right)$は，式(31)の重み付けと同様に式(33)のように計算される．

$S_N^{ur} \le S_N^p$の時：

$$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u, S_N^{ur}\right) = C_{Tp}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) \tag{33a}$$

$S_N^p < S_N^{ur} < 0$かつせん断ピーク応力前の時：

$$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u, S_N^{ur}\right) = C_{TC}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) = C_{Tp}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) \tag{33b}$$

$S_N^p < S_N^{ur} < 0$かつせん断ピーク応力後の時：

$$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u, S_N^{ur}\right) = \left(\frac{S_N^{ur}}{S_N^p}\right) C_{Tp}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) + \left(\frac{S_N^p - S_N^{ur}}{S_N^p}\right) C_{TC}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) \tag{33c}$$

$0 \le S_N^{ur}$の時：

$$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u, S_N^{ur}\right) = C_{TT}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right) \tag{33d}$$

ここで，$C_{Tp}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right)$：せん断成分の完全塑性載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性（$S_N^{ur} \le S_N^p$の場合）；$C_{TC}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right)$：圧縮の直応力下におけるせん断成分の線形除荷再載荷剛性；$C_{TT}^{ur0}\left(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u\right)$：引張の直応力下におけるせん断成分の線形除荷再載荷剛性；σ_T^uとε_T^u：除荷の開始するせん断応力とせん断ひずみ；S_N^{ur}：除荷再載荷用の直応力（せん断における除荷が開始した時のS_N）．

（2）せん断成分の載荷曲線

引張の直応力下におけるせん断成分の軟化載荷曲線 $f_{TT}(\varepsilon_T)$ は，式(34)で記述される．

$0 \le |\varepsilon_T| \le |\varepsilon_{TT}^0|$ の時（ピーク応力前）：

$$f_{TT}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{TT}^0} \right)^{C_T^0 \varepsilon_{TT}^0 / \tau^0} \right] \quad (34a)$$

$|\varepsilon_{TT}^0| < |\varepsilon_T|$ の時（ピーク応力後）：

$$f_{TT}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_T - \varepsilon_{TT}^0}{\varepsilon_{TT}^s} \right)^{p_{TT}} \right] \quad (34b)$$

ここで，$\varepsilon_{TT}^0 = \dfrac{\tau^0}{\zeta_{TT} C_T^0}$；$\varepsilon_{TT}^s = \gamma_{TT} \varepsilon_{TT}^0 = \dfrac{\gamma_{TT} \tau^0}{\zeta_{TT} C_T^0}$；$\tau^0$：直応力 S_N の依存性を考慮したせん断ピーク応力．

圧縮の直応力下におけるせん断成分の軟化載荷曲線 $f_{TC}(\varepsilon_T)$ は，式(35)で記述される．

$0 \le |\varepsilon_T| \le |\varepsilon_{TC}^0|$ の時（ピーク応力前）：

$$f_{TC}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{TC}^0} \right)^{C_T^0 \varepsilon_{TC}^0 / \tau^0} \right] \quad (35a)$$

$|\varepsilon_{TC}^0| < |\varepsilon_T|$ の時（ピーク応力後）：

$$f_{TC}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_T - \varepsilon_{TC}^0}{\varepsilon_{TC}^s} \right)^{p_{TC}} \right] \quad (35b)$$

ここで，$\varepsilon_{TC}^0 = \dfrac{\tau^0}{\zeta_{TC} C_T^0}$；$\varepsilon_{TC}^s = \gamma_{TC} \varepsilon_{TC}^0 = \dfrac{\gamma_{TC} \tau^0}{\zeta_{TC} C_T^0}$．

圧縮の直応力下におけるせん断成分の完全塑性載荷曲線 $f_{Tp}(\varepsilon_T)$ は，式(36)で記述される．

$0 \le |\varepsilon_T| \le |\varepsilon_{TC}^0|$ の時（ピーク応力前）：

$$f_{Tp}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{TC}^0} \right)^{C_T^0 \varepsilon_{TC}^0 / \tau^0} \right] \quad (36a)$$

$|\varepsilon_{TC}^0| < |\varepsilon_T|$ の時（ピーク応力後）：

$$f_{Tp}(\varepsilon_T) = \sigma_T = \tau^0 \quad (36b)$$

式(34)，式(35)，式(36)の各載荷曲線は，せん断引張およびせん断圧縮の両方に適用することができる．両者の差異は，せん断ピーク応力 τ^0 の正負符号のみである，すなわち，せん断引張 $(\varepsilon_T > 0)$ の場合 $\tau^0 > 0$ であり，せん断圧縮 $(\varepsilon_T < 0)$ の場合 $\tau^0 < 0$ である．

MPCモデルと同様に，せん断ピーク応力 τ^0 の直応力 S_N への依存性は，次の式(37)のようにせん断摩擦係数 μ_{TT}，μ_{TC} の概念を用いて記述される．

せん断引張領域 $(\varepsilon_T > 0)$：

$S_N < 0$ の時：$\tau^0 = +\sigma_{TC}^0 - \mu_{TC} S_N$ (37a)

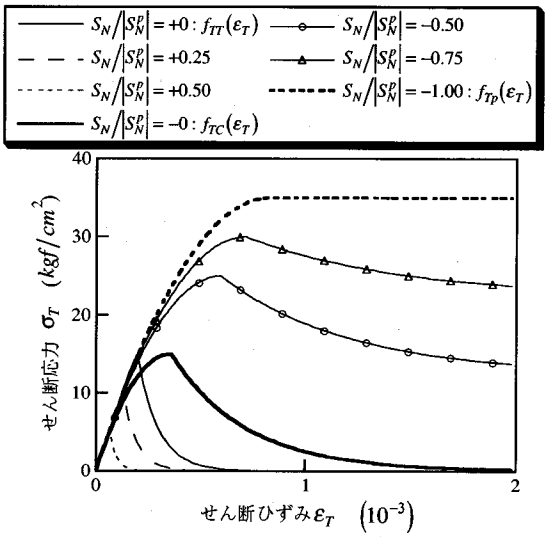
$S_N \ge 0$ の時：$\tau^0 = +\sigma_{TT}^0 - \mu_{TT} S_N \ge +r_{\min}^0 \sigma_{TT}^0$ (37b)

せん断圧縮領域 $(\varepsilon_T < 0)$：

$S_N < 0$ の時：$\tau^0 = -\sigma_{TC}^0 + \mu_{TC} S_N$ (37c)

$S_N \ge 0$ の時：$\tau^0 = -\sigma_{TT}^0 + \mu_{TT} S_N \le -r_{\min}^0 \sigma_{TT}^0$ (37d)

ここで，$\sigma_{TT}^0 (>0)$：引張の直応力下で使用する $S_N = 0$ の場合のせん断ピーク応力；$\sigma_{TC}^0 (>0)$：圧縮の直応力下で使用する $S_N = 0$ の場合のせん断ピーク応力；$\mu_{TT} (>0)$ と $\mu_{TC} (>0)$：引張および圧縮の直応力下で使用するせん断摩擦係数；$r_{\min}^0$：引張の直応力下におけるせん断ピーク応力の下限値を規定する係数 $\left(0 < r_{\min}^0 \le 1\right)$．



図－6　せん断応答の直応力依存性

図－6は，本モデルによって引張と圧縮の直応力下におけるせん断応答を計算した例であり，前述したようにせん断応答のぜい性－塑性遷移挙動が表現されている．

（3）せん断成分の線形除荷再載荷剛性

せん断成分の完全塑性載荷曲線からの線形除荷再載荷剛性 $C_{Tp}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u)$ としては，損傷による剛性低下を考えないで，せん断初期剛性 C_T^0 を使用する．

$$C_{Tp}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u) = C_T^0 \quad (38)$$

一方，せん断軟化応答の場合，ピーク応力後における損傷による漸進的剛性低下を考える．すなわち，せん断ピーク応力前では，引張の直応力下における線形除荷再載荷剛性 $C_{TT}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u)$ および，圧縮の直応力下における線形除荷再載荷剛性 $C_{TC}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u)$ として，損傷を仮定せず，せん断初期剛性 C_T^0 を使用する．せん断ピーク応力後では，引張の直応力下における線形除荷再載荷剛性 $C_{TT}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u)$ および，圧縮の直応力下における線形除荷再載荷剛性 $C_{TC}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u)$ として，損傷による漸進的剛性低下を考え次の式(39)を採用する．

$0 \le |\varepsilon_T^u| \le |\varepsilon_{TT}^0|$ かつ $S_N^{ur} \ge 0$ の時（ピーク応力前）：

$$C_{TT}^{ur0}(\sigma_T^u, \varepsilon_T^u) = C_T^0 \quad (39a)$$

$|\varepsilon_{TT}^0| < |\varepsilon_T^u|$ かつ $S_N^{ur} \ge 0$ の時（ピーク応力後）：

$$C_{TT}^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u\right)=\alpha_{TT}C_T^0+\left(1-\alpha_{TT}\right)\frac{\sigma_T^u}{\varepsilon_T^u-\xi_{TT}} \quad (39b)$$

$0\le\left|\varepsilon_T^u\right|\le\left|\varepsilon_{TC}^0\right|$かつ$S_N^{ur}<0$の時（ピーク応力前）：

$$C_{TC}^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u\right)=C_T^0 \quad (39c)$$

$\left|\varepsilon_{TC}^0\right|<\left|\varepsilon_T^u\right|$かつ$S_N^{ur}<0$の時（ピーク応力後）：

$$C_{TC}^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u\right)=\alpha_{TC}C_T^0+\left(1-\alpha_{TC}\right)\frac{\sigma_T^u}{\varepsilon_T^u-\xi_{TC}} \quad (39d)$$

ここで，$\xi_{TT}=\varepsilon_{TT}^0-\dfrac{\tau^0}{C_T^0}$；$\xi_{TC}=\varepsilon_{TC}^0-\dfrac{\tau^0}{C_T^0}$.

6．マイクロ構成関係の載荷，除荷，再載荷の基準

現象学的構成則の中には一般的な応力テンソル場またはひずみテンソル場において載荷，除荷，再載荷を判定しなければならないものが多い．通常の塑性理論や損傷力学理論では，応力テンソルまたはひずみテンソルから算定される不変量を用いて載荷関数，塑性ポテンシャル，損傷ポテンシャルが定式化され，この載荷関数を通して載荷，除荷，再載荷が判定される．しかし主軸の回転や中立負荷などのように不変量のみでは判定できない状態に対して適切な載荷基準を設定することは容易ではない．一方，一般化MPCモデルでは，応力テンソルやひずみテンソルに関する載荷基準は必要とせず，マイクロプレーンの各成分間の連成や交差効果を考えていないため，スカラー量であるマイクロプレーンの応力とひずみのマイクロ構成関係においてのみ載荷，除荷，再載荷の基準が必要とされるのである．それゆえ本モデルの載荷，除荷，再載荷の基準は非常に簡単なもので十分である．このことは，現象学的構成則と比較して本モデルの最も大きな利点の一つであるといえる．

説明をわかりやすくするため，マイクロプレーンの各ひずみε_N，ε_{TK}，ε_{TM}と各応力σ_N，σ_{TK}，σ_{TM}をひずみεと応力σで表わすことにして，各成分の載荷，除荷，再載荷の基準として次の式(40)を仮定する．

載荷基準：

$$\sigma_r>0\ (\text{引張}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}>0,\ \varepsilon_{r+1}\ge\varepsilon_{\max} \quad (40a)$$

$$\sigma_r<0\ (\text{圧縮}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \varepsilon_{r+1}\le\varepsilon_{\min} \quad (40b)$$

除荷基準：

$$\sigma_r>0\ (\text{引張}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \varepsilon_{r+1}<\varepsilon_{\max} \quad (40c)$$

$$\sigma_r<0\ (\text{圧縮}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}>0,\ \varepsilon_{r+1}>\varepsilon_{\min} \quad (40d)$$

再載荷基準：

$$\sigma_r>0\ (\text{引張}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}>0,\ \varepsilon_{r+1}<\varepsilon_{\max} \quad (40e)$$

$$\sigma_r<0\ (\text{圧縮}),\ \Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \varepsilon_{r+1}>\varepsilon_{\min} \quad (40f)$$

ここで，σ_r：前載荷ステップでの応力；ε_{r+1}：現載荷ステップでのひずみ；$\Delta\varepsilon_{r+1}$：前載荷ステップから現載荷ステップまでの増分ひずみ$\left(\Delta\varepsilon_{r+1}=\varepsilon_{r+1}-\varepsilon_r\right)$；$\varepsilon_r$：前載荷ステップでのひずみ；$\varepsilon_{\max}$と$\varepsilon_{\min}$：ひずみ履歴における最大ひずみと最小ひずみ．

式(40)において，$\varepsilon_{\max}$と$\varepsilon_{\min}$は，載荷に関するスカラーポテンシャルであると解釈できる．

7．マイクロ構成関係のヒステリシス則

式(40)の載荷，除荷，再載荷の基準とともに，4．で定式化した垂直成分に関する線形除荷再載荷剛性$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^u,\varepsilon_N^u,\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$（式(22)）と$C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_N^u,\varepsilon_N^u\right)$（式(29a)，式(29b)）および5．で定式化したせん断成分に関する線形除荷再載荷剛性$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u,S_N^{ur}\right)$（式(33)）を用いて除荷再載荷過程を線形挙動とすることは，マイクロプレーンのヒステリシス挙動を無視するということになる．実際に$C_N^{ur0}\left(\sigma_N^u,\varepsilon_N^u,\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$，$C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_N^u,\varepsilon_N^u\right)$，$C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u,S_N^{ur}\right)$を使用しマイクロプレーンのヒステリシスを仮定しないでくりかえし載荷解析を行なうと，その巨視応答のヒステリシスループがほとんど生じないことがわかった．巨視応答での適切なヒステリシスを表現するためには，マイクロプレーンレベルでのヒステリシス挙動を合理的に評価しなければならないと考えられる．ヒステリシスは非可逆なエネルギー消散過程であり，マイクロプレーンにおいて非弾性エネルギーが消散されヒステリシスが発生しない限り，巨視的なエネルギー消散が生じる巨視ヒステリシス挙動も起こりえないのである．

MPCモデル[3]では，マイクロプレーンの背応力（microscopic back-stress）と目的応力（microscopic objective-stress）によるヒステリシス則を開発し，巨視ヒステリシスが得られるように定式化がなされた．背応力と目的応力は，塑性論の移動硬化則に類似した概念から除荷再載荷過程における非弾性挙動を記述するためMPCモデルで考えられたものである．移動硬化則では背応力が載荷曲面の中心として定義されるが，本ヒステリシス則では背応力が除荷再載荷の非弾性挙動が開始するマイクロプレーンの応力であり，また目的応力はそれが終了するマイクロプレーンの応力である．

MPCモデルのヒステリシス則では，除荷と再載荷について単一の背応力を使用し，各計算ステップ間で増分ひずみの正負が逆転するごとに，背応力が前計算ステップの応力の値に更新された．そのためマイクロプレーンで単調に除荷または再載荷が生じる場合はよいが，除荷と再載荷が交互にくりかえされ

るような場合には，背応力が常に前計算ステップでの応力となり，接線剛性が最大値に設定されるため，ヒステリシスが非常に小さくなったり，まったく生じないことがあった．

そこで本研究では，背応力を除荷と再載荷について別個に定義し，ヒステリシスが小さくなる現象を防止することにした．さらに一般化MPCモデルでは，マイクロプレーンの垂直圧縮での除荷再載荷におけるヒステリシス応答に側方ひずみ依存性と側方応力依存性を考慮し，またマイクロプレーンのせん断の除荷再載荷におけるヒステリシス応答が，直応力に依存するように定式化する．

以下では，６．と同様に説明をわかりやすくする場合には，マイクロプレーンの各ひずみと各応力をεとσで表わすことにする．

（１）背応力，目的応力と除荷再載荷関数

除荷用の背応力$\sigma^U_{b,r+1}$と再載荷用の背応力$\sigma^R_{b,r+1}$は，式(41)によって定義される．

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \left|\varepsilon^R_{b,r}\right|\le\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^U_{b,r+1}=\sigma_r$ (41a)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \left|\varepsilon^R_{b,r}\right|>\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^U_{b,r+1}=\sigma^u$ (41b)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}\ge0,\ \left|\varepsilon^R_{b,r}\right|\le\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^U_{b,r+1}=\sigma^U_{b,r}$ (41c)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}\ge0,\ \left|\varepsilon^R_{b,r}\right|>\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^U_{b,r+1}=\sigma^u$ (41d)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \left|\varepsilon^U_{b,r}\right|\ge\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^R_{b,r+1}=\sigma_r$ (41e)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}<0,\ \left|\varepsilon^U_{b,r}\right|<\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^R_{b,r+1}=0$ (41f)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}\ge0,\ \left|\varepsilon^U_{b,r}\right|\ge\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^R_{b,r+1}=\sigma^R_{b,r}$ (41g)

$\Delta\varepsilon_r\cdot\Delta\varepsilon_{r+1}\ge0,\ \left|\varepsilon^U_{b,r}\right|<\left|\varepsilon_{r+1}\right|$の時：$\sigma^R_{b,r+1}=0$ (41h)

ここで，$\sigma^U_{b,r+1}$，$\sigma^U_{b,r}$：現ステップおよび前ステップにおける除荷用の背応力；$\sigma^R_{b,r+1}$，$\sigma^R_{b,r}$：現ステップおよび前ステップにおける再載荷用の背応力；$\varepsilon^U_{b,r}$：前ステップにおける除荷用の背応力時のひずみ；$\varepsilon^R_{b,r}$：前ステップにおける再載荷用の背応力時のひずみ；σ_r：前ステップでの応力；σ^u：除荷開始点の応力；ε_{r+1}：現ステップでのひずみ；$\Delta\varepsilon_{r+1}$，$\Delta\varepsilon_r$：現ステップおよび前ステップにおける増分ひずみ．

マイクロプレーンの目的応力σ_{ob}は，式(42)として定義される．

除荷の時：　$\sigma_{ob}=0$ (42a)

再載荷の時：　$\sigma_{ob}=\sigma^u$ (42b)

背応力$\sigma^U_{b,r+1}$，$\sigma^R_{b,r+1}$と目的応力σ_{ob}は，式(40)の除荷または再載荷の基準が満足される場合に式(41)および式(42)に従って設定される．除荷または再載荷の過程にある応力σに対して無次元関数であり０から１までの値をとりうるマイクロプレーンの除荷再載荷関数$F^{ur}(\sigma)$が次の式(43)のように定義される．

除荷の時：　$F^{ur}(\sigma)=\left|\dfrac{\sigma^U_{b,r+1}-\sigma}{\sigma_{ob}-\sigma^U_{b,r+1}}\right|$ (43a)

再載荷の時：　$F^{ur}(\sigma)=\left|\dfrac{\sigma^R_{b,r+1}-\sigma}{\sigma_{ob}-\sigma^R_{b,r+1}}\right|$ (43b)

（２）垂直成分のヒステリシス則

MPCモデルでは，垂直成分の除荷接線剛性$C^u_N(\sigma_N)$および再載荷接線剛性$C^r_N(\sigma_N)$を除荷再載荷関数$F^{ur}(\sigma_N)$，線形除荷再載荷剛性C^{ur0}_N，無次元化係数$U_{\max}$，$U_{\min}$，$R_{\max}$，$R_{\min}$の関数として与えることによって，ヒステリシス則が定式化されたが，無次元化係数が硬化軟化関数とは無関係に定数値として取り扱われた．そのため，垂直成分のヒステリシス応答に側方ひずみ依存性を考慮することができなかった．

そこで，一般化MPCモデルにおける垂直圧縮成分のマイクロ構成則では，ヒステリシス応答に側方ひずみ依存性と側方応力依存性を考慮するため，垂直成分の静水圧載荷，完全塑性載荷，圧縮軟化載荷の各々からの除荷再載荷に対して別々に無次元化係数$U_{\max}$，$U_{\min}$，$R_{\max}$，$R_{\min}$を設定し，それらを除荷再載荷用の硬化軟化関数ϕ^{ur}と側方拘束応力S^{ur}_{LC}で重み付け計算することとした．その重み付け手法は，４．（２）で記述した処女載荷応答の場合と同様であり，式(44)のように定式化した．

$1\ge\phi^{ur}\ge\phi^p$，S^{ur}_{LC}が任意の時：

$$U_{\max}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{\phi^{ur}-\phi^p}{1-\phi^p}\right)U^{Nh}_{\max}+\left(\frac{1-\phi^{ur}}{1-\phi^p}\right)U^{Np}_{\max}\quad(44a)$$

$$U_{\min}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{\phi^{ur}-\phi^p}{1-\phi^p}\right)U^{Nh}_{\min}+\left(\frac{1-\phi^{ur}}{1-\phi^p}\right)U^{Np}_{\min}\quad(44b)$$

$$R_{\max}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{\phi^{ur}-\phi^p}{1-\phi^p}\right)R^{Nh}_{\max}+\left(\frac{1-\phi^{ur}}{1-\phi^p}\right)R^{Np}_{\max}\quad(44c)$$

$$R_{\min}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{\phi^{ur}-\phi^p}{1-\phi^p}\right)R^{Nh}_{\min}+\left(\frac{1-\phi^{ur}}{1-\phi^p}\right)R^{Np}_{\min}\quad(44d)$$

$\phi^p>\phi^{ur}\ge0$，$S^{ur}_{LC}\le S^p_{LC}$の時：

$$U_{\max}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=U^{Np}_{\max}\quad(44e)$$

$$U_{\min}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=U^{Np}_{\min}\quad(44f)$$

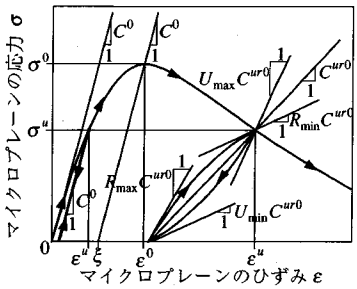
$$R_{\max}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=R^{Np}_{\max}\quad(44g)$$

$$R_{\min}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=R^{Np}_{\min}\quad(44h)$$

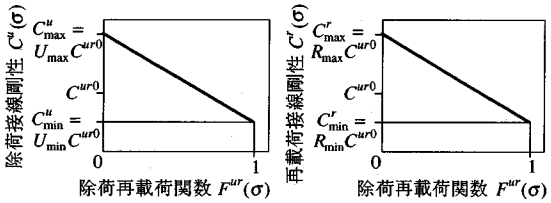
$\phi^p>\phi^{ur}\ge0$，$S^p_{LC}<S^{ur}_{LC}<0$の時：

$$U_{\max}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{S^{ur}_{LC}}{S^p_{LC}}\right)U^{Np}_{\max}+\left(\frac{S^p_{LC}-S^{ur}_{LC}}{S^p_{LC}}\right)U^{Ns}_{\max}\quad(44i)$$

$$U_{\min}\left(\phi^{ur},S^{ur}_{LC}\right)=\left(\frac{S^{ur}_{LC}}{S^p_{LC}}\right)U^{Np}_{\min}+\left(\frac{S^p_{LC}-S^{ur}_{LC}}{S^p_{LC}}\right)U^{Ns}_{\min}\quad(44j)$$



(a) 軟化載荷曲線からの除荷再載荷挙動



(b) 除荷接線剛性　　(c) 再載荷接線剛性

図－7　マイクロプレーンのヒステリシス則による除荷再載荷挙動

$$R_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=\left(\frac{S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)R_{\max}^{Np}+\left(\frac{S_{LC}^{p}-S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)R_{\max}^{Ns} \quad (44k)$$

$$R_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=\left(\frac{S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)R_{\min}^{Np}+\left(\frac{S_{LC}^{p}-S_{LC}^{ur}}{S_{LC}^{p}}\right)R_{\min}^{Ns} \quad (44l)$$

$\phi^{p}>\phi^{ur}\geq 0$，$0\leq S_{LC}^{ur}$の時：

$$U_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=U_{\max}^{Ns} \quad (44m)$$

$$U_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=U_{\min}^{Ns} \quad (44n)$$

$$R_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=R_{\max}^{Ns} \quad (44o)$$

$$R_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)=R_{\min}^{Ns} \quad (44p)$$

ここで，$U_{\max}^{Nh}$，$U_{\max}^{Np}$，$U_{\max}^{Ns}$：垂直成分の静水圧，完全塑性，圧縮軟化における除荷接線剛性の最大値 $C_{\max}^{u}=U_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\cdot C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$を決定する無次元化係数；$U_{\min}^{Nh}$，$U_{\min}^{Np}$，$U_{\min}^{Ns}$：垂直成分の静水圧，完全塑性，圧縮軟化における除荷接線剛性の最小値 $C_{\min}^{u}=U_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\cdot C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$を決定する無次元化係数；$R_{\max}^{Nh}$，$R_{\max}^{Np}$，$R_{\max}^{Ns}$：垂直成分の静水圧，完全塑性，圧縮軟化における再載荷接線剛性の最大値 $C_{\max}^{r}=R_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\cdot C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$を決定する無次元化係数；$R_{\min}^{Nh}$，$R_{\min}^{Np}$，$R_{\min}^{Ns}$：垂直成分の静水圧，完全塑性，圧縮軟化における再載荷接線剛性の最小値 $C_{\min}^{r}=R_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\cdot C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right)$を決定する無次元化係数；$\phi^{ur}$：除荷再載荷用の硬化軟化関数（垂直圧縮における除荷が開始した時の$\phi\left(\varepsilon_{LD}\right)$），$\phi^{ur}=\phi\left(\varepsilon_{LD}^{ur}\right)$；$S_{LC}^{ur}$：除荷再載荷用の側方拘束応力（垂直圧縮における除荷が開始した時のS_{LC}）．

除荷再載荷の過程で変化する$\phi\left(\varepsilon_{LD}\right)$と$S_{LC}$を用いて重み付け計算すると，場合によって許容しがたいヒステリシスループが得られることがあったため，式(44)では除荷開始時にその値が固定されるϕ^{ur}とS_{LC}^{ur}を用いて定式化が行なわれた．

垂直圧縮成分の除荷接線剛性$C_{N}^{u}\left(\sigma_{N}\right)$および再載荷接線剛性$C_{N}^{r}\left(\sigma_{N}\right)$は，式(45)のように表わされる（図－7参照）．

$$C_{N}^{u}\left(\sigma_{N}\right)=\left\{\left[U_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)-U_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\right]F^{ur}\left(\sigma_{N}\right)+U_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\right\}C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right) \quad (45a)$$

$$C_{N}^{r}\left(\sigma_{N}\right)=\left\{\left[R_{\min}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)-R_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\right]F^{ur}\left(\sigma_{N}\right)+R_{\max}\left(\phi^{ur},S_{LC}^{ur}\right)\right\}C_{N}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u},\varepsilon_{LD}^{ur},S_{LC}^{ur}\right) \quad (45b)$$

一方，垂直引張成分の除荷接線剛性$C_{N}^{u}\left(\sigma_{N}\right)$および再載荷接線剛性$C_{N}^{r}\left(\sigma_{N}\right)$は，側方ひずみ依存性と側方応力依存性がないので，式(46)のように表わされる．

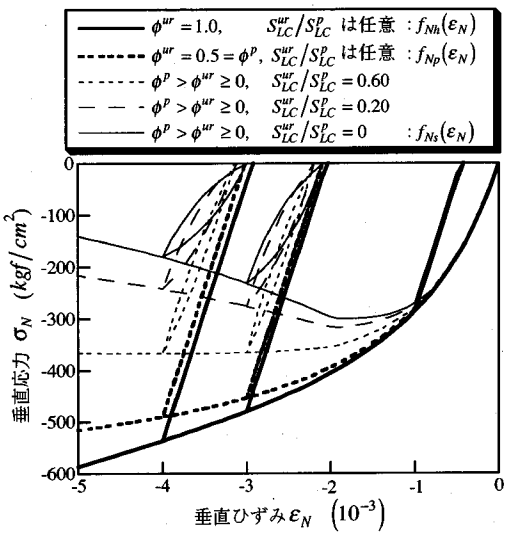
$$C_{N}^{u}\left(\sigma_{N}\right)=\left\{\left[U_{\min}^{NT}-U_{\max}^{NT}\right]F^{ur}\left(\sigma_{N}\right)+U_{\max}^{NT}\right\}C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right) \quad (46a)$$

$$C_{N}^{r}\left(\sigma_{N}\right)=\left\{\left[R_{\min}^{NT}-R_{\max}^{NT}\right]F^{ur}\left(\sigma_{N}\right)+R_{\max}^{NT}\right\}C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right) \quad (46b)$$

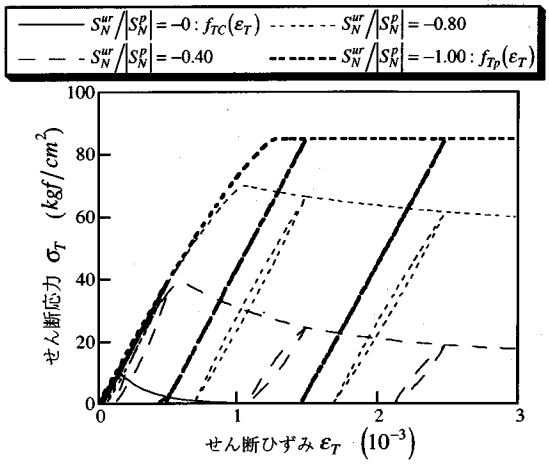
ここで，$U_{\max}^{NT}$：垂直引張成分における除荷接線剛性の最大値$C_{\max}^{u}=U_{\max}^{NT}\cdot C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right)$を決定する無次元化係数；$U_{\min}^{NT}$：垂直引張成分における除荷接線剛性の最小値$C_{\min}^{u}=U_{\min}^{NT}\cdot C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right)$を決定する無次元化係数；$R_{\max}^{NT}$：垂直引張成分における再載荷接線剛性の最大値$C_{\max}^{r}=R_{\max}^{NT}\cdot C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right)$を決定する無次元化係数；$R_{\min}^{NT}$：垂直引張成分における再載荷接線剛性の最小値$C_{\min}^{r}=R_{\min}^{NT}\cdot C_{NT}^{ur0}\left(\sigma_{N}^{u},\varepsilon_{N}^{u}\right)$を決定する無次元化係数．

コンクリートが静水圧圧縮状態や完全塑性流れ状態にある場合，その除荷再載荷挙動でのヒステリシスは非常に小さいことが実験的に確認されている（例えば，Willamら[10]）．そのようなヒステリシス特性を再現するために，本研究ではマイクロプレーンの垂直成分の圧縮軟化に関するヒステリシスは，ピーク応力後すなわち$\varepsilon_{NC}^{u}<\varepsilon_{NC}^{0}$において生じるとしたが，静水圧応答および完全塑性応答に関してはヒステリシスを考えずに線形除荷再載荷とした．また，垂直成分の引張軟化に関するヒステリシスも，ピーク応力後すなわち$\varepsilon_{NT}^{u}>\varepsilon_{NT}^{0}$において考慮することとした．

図－8は，本モデルを用いて計算した垂直圧縮載荷曲線からの除荷再載荷応答の例であり，垂直成分のヒステリシス応答に関する側方ひずみ依存性と側方応力依存性が表現されている．静水圧応答および完全塑性応答からの除荷再載荷ではヒステリシスがまったく生じないが，完全塑性応答と圧縮軟化応答の間における除荷再載荷過程ではヒステリシスが生



図－8　垂直圧縮載荷曲線からの除荷再載荷応答



図－9　せん断引張載荷曲線からの除荷再載荷応答

じており，圧縮軟化応答に漸近するほど，つまり S^{ur}_{LC}/S^{p}_{LC} が減少するほど，そのヒステリシス挙動は大きくなる．

（3）せん断成分のヒステリシス則

マイクロプレーンのせん断成分のヒステリシス応答に関する拘束の影響は，せん断成分の載荷曲線を直応力によって重み付け計算した手法と同様にして考慮する．前述した垂直成分のヒステリシス応答の場合と同様に，せん断成分の完全塑性載荷曲線からの除荷再載荷に対して，および圧縮の直応力下における軟化載荷曲線からの除荷再載荷に対して，別々に無次元化係数 $U_{\max}$，$U_{\min}$，$R_{\max}$，$R_{\min}$ を設定して，それらを除荷再載荷用の直応力 S^{ur}_N によって重み付け計算することとした．式(47)にその定式化を示す．

$S^{ur}_N \leq S^{p}_N$ の時：

$$U_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=U^{Tp}_{\max} \tag{47a}$$

$$U_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=U^{Tp}_{\min} \tag{47b}$$

$$R_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=R^{Tp}_{\max} \tag{47c}$$

$$R_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=R^{Tp}_{\min} \tag{47d}$$

$S^{p}_N < S^{ur}_N < 0$ の時：

$$U_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=\left(\frac{S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)U^{Tp}_{\max}+\left(\frac{S^{p}_N-S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)U^{TC}_{\max} \tag{47e}$$

$$U_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=\left(\frac{S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)U^{Tp}_{\min}+\left(\frac{S^{p}_N-S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)U^{TC}_{\min} \tag{47f}$$

$$R_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=\left(\frac{S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)R^{Tp}_{\max}+\left(\frac{S^{p}_N-S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)R^{TC}_{\max} \tag{47g}$$

$$R_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=\left(\frac{S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)R^{Tp}_{\min}+\left(\frac{S^{p}_N-S^{ur}_N}{S^{p}_N}\right)R^{TC}_{\min} \tag{47h}$$

$0 \leq S^{ur}_N$ の時：

$$U_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=U^{TT}_{\max} \tag{47i}$$

$$U_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=U^{TT}_{\min} \tag{47j}$$

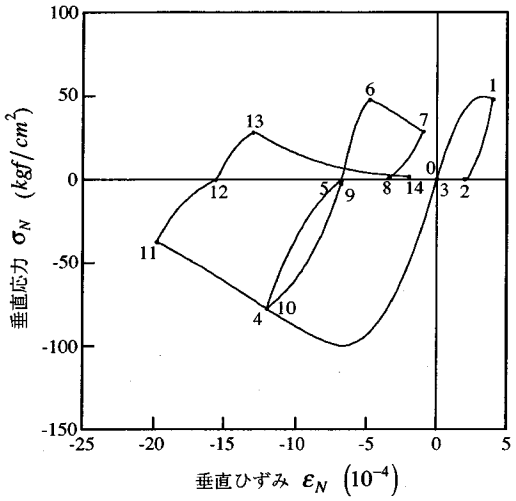
$$R_{\max}\left(S^{ur}_N\right)=R^{TT}_{\max} \tag{47k}$$

$$R_{\min}\left(S^{ur}_N\right)=R^{TT}_{\min} \tag{47l}$$

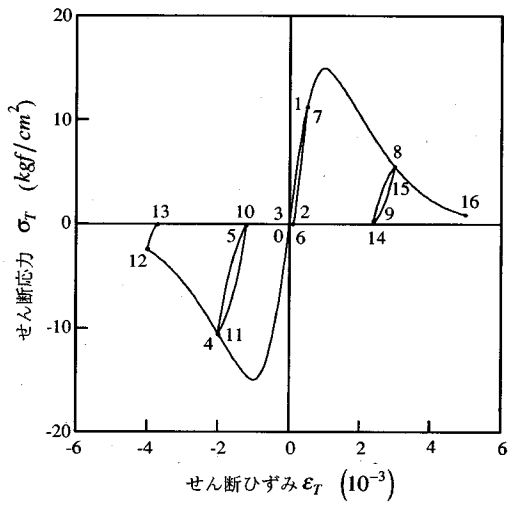
ここで，$U^{Tp}_{\max}$，$U^{TC}_{\max}$，$U^{TT}_{\max}$：せん断成分に関する完全塑性，圧縮の直応力下における軟化，引張の直応力下における軟化の各々の場合に対する除荷接線剛性の最大値 $C^{u}_{\max}=U_{\max}\left(S^{ur}_N\right)\cdot C^{ur0}_T\left(\sigma^{u}_T,\varepsilon^{u}_T,S^{ur}_N\right)$ を決定する無次元化係数；$U^{Tp}_{\min}$，$U^{TC}_{\min}$，$U^{TT}_{\min}$：せん断成分に関する完全塑性，圧縮の直応力下における軟化，引張の直応力下における軟化の各々の場合に対する除荷接線剛性の最小値 $C^{u}_{\min}=U_{\min}\left(S^{ur}_N\right)\cdot C^{ur0}_T\left(\sigma^{u}_T,\varepsilon^{u}_T,S^{ur}_N\right)$ を決定する無次元化係数；$R^{Tp}_{\max}$，$R^{TC}_{\max}$，$R^{TT}_{\max}$：せん断成分に関する完全塑性，圧縮の直応力下における軟化，引張の直応力下における軟化の各々の場合に対する再載荷接線剛性の最大値 $C^{r}_{\max}=R_{\max}\left(S^{ur}_N\right)\cdot C^{ur0}_T\left(\sigma^{u}_T,\varepsilon^{u}_T,S^{ur}_N\right)$ を決定する無次元化係数；$R^{Tp}_{\min}$，$R^{TC}_{\min}$，$R^{TT}_{\min}$：せん断成分に関する完全塑性，圧縮の直応力下における軟化，引張の直応力下における軟化の各々の場合に対する再載荷接線剛性の最小値 $C^{r}_{\min}=R_{\min}\left(S^{ur}_N\right)\cdot C^{ur0}_T\left(\sigma^{u}_T,\varepsilon^{u}_T,S^{ur}_N\right)$ を決定する無次元化係数；S^{ur}_N：除荷再載荷用の直応力（せん断における除荷が開始した時の S_N）．

垂直圧縮での除荷再載荷応答の場合に ϕ^{ur} と S^{ur}_{LC} を使用したように，式(47)の定式化は，せん断の除荷開始時の直応力である S^{ur}_N を用いて行なわれた．

せん断成分の除荷接線剛性 $C^{u}_T(\sigma_T)$ および再載荷接線剛性 $C^{r}_T(\sigma_T)$ は，式(48)のように表わされる．



図－１０　垂直成分の交番くりかえし挙動の例



図－１１　せん断成分の交番くりかえし挙動の例

$$C_T^u(\sigma_T)=\left\{\left[U_{\min}\left(S_N^{ur}\right)-U_{\max}\left(S_N^{ur}\right)\right]F^{ur}(\sigma_T)+U_{\max}\left(S_N^{ur}\right)\right\}C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u,S_N^{ur}\right) \quad (48a)$$

$$C_T^r(\sigma_T)=\left\{\left[R_{\min}\left(S_N^{ur}\right)-R_{\max}\left(S_N^{ur}\right)\right]F^{ur}(\sigma_T)+R_{\max}\left(S_N^{ur}\right)\right\}C_T^{ur0}\left(\sigma_T^u,\varepsilon_T^u,S_N^{ur}\right) \quad (48b)$$

圧縮の直応力下におけるせん断軟化および引張の直応力下におけるせん断軟化では，ピーク応力後すなわち$\left|\varepsilon_{TC}^0\right|<\left|\varepsilon_T^u\right|$および$\left|\varepsilon_{TT}^0\right|<\left|\varepsilon_T^u\right|$においてヒステリシスが生じるとしたが，せん断成分の完全塑性応答についてはヒステリシスを考慮せず線形除荷再載荷を仮定した．

図－９は，本モデルを用いて計算したせん断引張載荷からの除荷再載荷応答の例であり，せん断成分のヒステリシス応答についての直応力依存性が表現されている．完全塑性応答からの除荷再載荷ではヒステリシスがまったく生じないが，完全塑性応答と軟化応答の間における除荷再載荷過程ではヒステリシスが生じており，軟化応答に漸近するほど，つまり$S_N^{ur}/\left|S_N^p\right|$が増大するほど，そのヒステリシス挙動は大きくなる．

８．マイクロ構成関係の交番くりかえし載荷則

４．～７．で説明した各成分のマイクロ構成関係の載荷，除荷，再載荷に関する法則は，マイクロプレーンの引張応力領域と圧縮応力領域に対して別個に適用され，双方の領域はゼロ応力によって区分けされる．本モデルを任意の応力・ひずみ履歴に対して適用するためには，マイクロプレーンの応力とひずみが引張領域と圧縮領域の間をくりかえす，いわゆる交番くりかえし載荷状況をも包含するように定式化する必要がある．

これまでに記述した垂直成分とせん断成分の載荷，除荷，再載荷に関する応力－ひずみ関係や種々の法則は理論的に決定されたわけではなく，微視的な物理イメージから仮定したモデルを数値計算で実行し改良を加えながら決定したものである．以下に述べる各成分の交番くりかえし載荷則の場合にも，理論的導出手法は存在しないので，そのようなモデル化をくりかえしながら同定したものである．実際にはコンクリートのくりかえし１軸圧縮実験やくりかえし１軸引張実験の解析を実施し，各成分の交番くりかえし載荷則を同定した．

マイクロプレーンの垂直成分に関する交番くりかえし載荷則は，以下のように特徴づけられる．

1) 垂直成分の処女載荷曲線の形状は，引張領域，圧縮領域ともに載荷くりかえし数やひずみ履歴に依存しない．

2) 圧縮領域の処女載荷曲線の原点は固定されているが，ひずみ履歴に応じて応力が圧縮から引張へと移行する場合，引張領域の処女載荷曲線の原点は圧縮での残留塑性ひずみ分だけシフトする．

3) 圧縮領域での除荷から引張領域へひずみが進行する場合，圧縮除荷曲線がゼロ応力へ達したひずみから引張領域の載荷曲線または再載荷曲線が開始される．

4) 引張領域での除荷から圧縮領域へひずみが進行する場合，引張除荷曲線がゼロ応力へ達しても以前の圧縮除荷での圧縮残留塑性ひずみに至るまではゼロ応力が保持される．圧縮残留塑性ひずみを越えると圧縮再載荷が開始される．

図－１０は，圧縮軟化載荷曲線を使用した場合の垂直成分に関する交番くりかえし挙動の一例であ

表－1　計算機に記憶されるマイクロプレーンの状態量

マイクロプレーンの状態量		垂直		せん断	
		引張	圧縮	引張	圧縮
前ステップのひずみ	ε_r	○		○	
最大ひずみ	ε_{max}	○	—	○	—
最小ひずみ	ε_{min}	—	○	—	○
除荷用の背応力でのひずみ	ε_b^U	○	○	○	○
再載荷用の背応力でのひずみ	ε_b^R	○	○	○	○
完全除荷後のゼロ応力でのひずみ	ε_p	○	○	○	○
処女載荷曲線の原点のひずみ	ε_z	○	—	—	—
前ステップの応力	σ_r	○		○	
除荷開始時の応力	σ^u	○	○	○	○
除荷用の背応力	σ_b^U	○	○	○	○
再載荷用の背応力	σ_b^R	○	○	○	○
線形除荷再載荷剛性	C^{ur0}	○	○	○	○
除荷開始時の硬化軟化関数	ϕ^{ur}	—	○	—	—
除荷開始時の側方応力	S_{LC}^{ur}	—	○	—	—
除荷開始時の直応力	S_N^{ur}	—	—	○	○

○：計算機に記憶される状態量

り，図中には垂直ひずみ履歴が0から14までの数字で表示されている．圧縮領域から引張領域へ移行する場合に引張領域の載荷曲線の原点がシフトし，また引張領域から圧縮領域へ移行する際にゼロ応力でひずみの増大する部分がある．このゼロ応力でひずみの増大する部分は，引張ひび割れが閉口する状況をモデル化したものである．

マイクロプレーンのせん断成分に関する交番くりかえし載荷則は以下のように特徴づけられる．

1) せん断成分の処女載荷曲線の形状は，引張領域，圧縮領域ともに載荷くりかえし数やひずみ履歴に依存しない．

2) 引張領域，圧縮領域ともに処女載荷曲線の原点は固定されている．

3) 除荷によって応力がゼロに達した後は，反対側の応力領域における以前の除荷での残留塑性ひずみへ至るまではゼロ応力が保持されすべり区間が生じる．その残留塑性ひずみを越えると再載荷が開始される．

図－１１は，せん断成分に関する交番くりかえし挙動の一例であり，図中にはせん断ひずみ履歴が0から16までの数字で表示されている．設定したせん断ひずみ履歴は，図－１０の垂直成分の場合と同様なものであるにもかかわらず，得られたせん断応答は垂直応答とまったく異なっていることがわかる．引張領域，圧縮領域の載荷曲線の原点は固定されており，一方の領域での除荷からもう一方の領域への載荷，再載荷が開始する前に必ずゼロ応力でひずみの増大する部分がある．このゼロ応力でひずみの増大する部分は，ひび割れ界面において粗骨材と周辺のモルタルマトリックスとが再接触するまでせん断応力伝達がなくすべり変形のみが増大するという微視的な現象をモデル化したものである．

一般化MPCモデルは，マイクロプレーンのヒステリシス応答や交番くりかえし応答を数値解析的に履行するために，各マイクロプレーンの状態量を計算機に記憶する必要がある．表－１は，それらをまとめたものであり，本モデルでは１マイクロプレーン当たり全部で61個（=21+2×20）の状態量（マイクロプレーンのひずみ・応力の状態量，線形除荷再載荷剛性，除荷再載荷のための状態量）が計算機に記憶される．本研究ではBazantら[11]の21点半球面数値積分公式を使用しているため，２１（半球面数値積分点）×61（状態量）=1281個の状態量が記憶されねばならない．

９．まとめ

本研究では，マイクロプレーンの特徴的な基本概念に回帰し定式化されたマイクロプレーンコンクリートモデル（MPCモデル：Hasegawaモデル）[3]の予測精度，特に，拘束効果に関する予測精度を向上させて，その適用限界を広げ，より汎用性の高い構成則を構築するため，マイクロプレーンのせん断成分と同様に垂直成分に関してもマイクロプレーン間の複雑な相互作用を考慮した一般化マイクロプレーンコンクリートモデル（一般化MPCモデル）を再構築した．MPCモデルや既往のマイクロプレーンモデルと比較して，一般化MPCモデルの定式化は，以下の特徴を持つものである．

（１）本モデルは，垂直成分とせん断成分による耐荷機構を考え，巨視的な体積成分や付加弾性体を含まない定式化に基づいており，マイクロプレーンモデルの持つ明快な微視的イメージを保持するものである．

（２）マイクロプレーンの垂直圧縮応答は，側方ひずみ（側方ひずみ依存性）のみならず，応力テンソルをマイクロプレーンの平行方向へ分解して得られる側方応力にも依存する．この垂直圧縮応答の側方応力依存性によって，垂直成分に関するマイクロプレーン間の相互作用がモデル化される．

（３）垂直圧縮応答は，垂直ひずみと側方ひずみの差として定義される側方偏差ひずみが大きい場合，ひずみ軟化を示すが，側方応力が圧縮で大きい場合塑性的な挙動を示すように定式化される．

（４）マイクロプレーンの圧縮直応力つまり拘束圧の増大にともなって，マイクロプレーンのせん断ピーク応力およびせん断じん性が向上する（マイクロプレーンの拘束にともなうせん断じん性の変化）

というせん断摩擦則の形で，せん断成分に関するマイクロプレーン間の相互作用が考慮される．マイクロプレーンの直応力は応力テンソルをマイクロプレーンの垂直方向へ分解して得られる．

（5）一般化MPCモデルでは，MPCモデルと同様に速度効果を考慮するためにマイクロプレーンの応力－ひずみ関係に弾塑性破壊要素と線形粘性要素とを直列結合した一般化マックスウェルレオロジーモデルを採用した．また，ひずみ軟化の数値計算上の問題を克服するため，指数アルゴリズムを用いてマイクロプレーンの応力－ひずみ関係の時間経路積分を行なう．

（6）増分ひずみテンソルから増分応力テンソルを計算するために必要とされる増分弾性剛性テンソルおよび増分非弾性応力テンソルは，仮想仕事の原理を適用することにより得られる．初期等方線形弾性体を仮定した場合，一般化MPCモデルの垂直初期剛性とせん断初期剛性は，初期弾性係数および初期ポアソン比から算定しうる．

（7）マイクロプレーンの各成分に対する応力－ひずみ関係（マイクロ構成則）は，力学的意味の明快な材料定数で定義することにより，モデルを使いやすいものにすることができた．

（8）マイクロプレーンの背応力と目的応力によるヒステリシス則の定式化についても，処女載荷の場合と同様に垂直応答の側方ひずみ依存性と側方応力依存性，せん断応答の摩擦則を考慮し，マイクロ構成関係に適切なヒステリシス特性を持たせる．さらにマイクロ構成関係における交番くりかえし載荷則を設定して，あらゆるくりかえし載荷履歴にも適応できるようにする．本モデルでは巨視的レベルでの載荷基準を必要とせず，マイクロプレーンのひずみに基づく簡単な載荷，除荷，再載荷の基準のみが使用されるため，応力やひずみの不変量による載荷基準を持つ現象学的構成則と比較して大きな利点となる．

謝辞：本論文は，著者の学位論文[12]の一部をとりまとめたものであります．貴重な御助言ならびに御指導を賜りました東京大学大学院工学系研究科 前川 宏一教授に深く感謝の意を表わします．

参考文献

1) 長谷川俊昭：マイクロプレーンモデルの汎用性に関する研究，土木学会論文集，No. 538/V-31, pp.115-128, 1996年5月.
2) Bazant, Z. P. and Prat, P. C.: Microplane model for brittle-plastic material: I. Theory, and II. Verification, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 10, pp.1672-1702, 1988.
3) Hasegawa, T. and Bazant, Z. P.: Nonlocal microplane concrete model with rate effect and load cycles. I: General formulation, and II: Application and verification, *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE*, Vol. 5, No. 3, pp.372-410, 1993.
4) Bazant, Z. P.: Microplane model for strain-controlled inelastic behaviour, *Mechanics of Engineering Materials*, Chapter 3, Desai, C. S. and Gallagher, R. H. eds., John Wiley & Sons, London, pp.45-59, 1984.
5) Bazant, Z. P. and Chern, J. C.: Strain softening with creep and exponential algorithm, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 111, No. 3, pp.391-415, 1985.
6) Bazant, Z. P. and Gambarova, P. G.: Crack shear in concrete: Crack band microplane model, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 110, No. 9, pp.2015-2035, 1984.
7) Bazant, Z. P. and Oh, B. H.: Microplane model for progressive fracture of concrete and rock, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 111, No. 4, pp.559-582, 1985.
8) Green, S. J. and Swanson, S. R.: Static constitutive relations for concrete, *Report No. AFWL-TR-72-2, Air Force Weapons Laboratory*, Kirtland Air Force Base, 1973.
9) 山口弘，藤本一男，野村設郎：高圧3軸圧縮応力下におけるコンクリートの応力－ひずみ関係　その1　静的載荷，日本建築学会構造系論文報告集，No. 389, pp.99-108, 1988年7月.
10) Willam, K., Hurlbut, B. and Sture, S.: Experimental and constitutive aspects of concrete failure, *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, Meyer, C. and Okamura, H. eds., ASCE, New York, pp.226-254, 1986.
11) Bazant, Z. P. and Oh, B. H.: Efficient numerical integration on the surface of a sphere, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 66, No. 1, pp.37-49, 1986.
12) 長谷川俊昭：マイクロプレーンコンクリートモデルの開発，東京大学 博士（工学）論文，1994年.

（1995. 7. 18 受付）

DEVELOPMENT OF ENHANCED MICROPLANE CONCRETE MODEL

Toshiaki HASEGAWA

The previously developed microplane concrete model is improved to expand its applicability and reformulated as the enhanced microplane concrete model serving as a more general constitutive law. One of the main improvements is to take into account the resolved lateral stress in normal compression response on a microplane as well as the resolved lateral strain. Another main improvement is to adopt a model for the transition from brittle to ductile fracture for the shear response on a microplane at increasing resolved normal compression stress. These improvements endow the model with the capability to describe complicated interaction between microplanes through the macroscopic stress tensor. Similar effects are taken into account in the microplane hysteresis rule using the concepts of back-stress and objective-stress.