

既知パラメータの誤差に影響される 同定パラメータの信頼性領域の評価

栗田哲史¹・松井邦人²

¹正会員 工修 東電設計(株)技術開発本部 耐震技術部(〒110 東京都台東区東上野3-3-3)

²正会員 Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設工学科(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

本研究は、構造パラメータの同定問題において、既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を評価する一手法として、同定パラメータの信頼性領域の推定式を提案するものである。簡単なモデルを用いた数値実験の結果、同定パラメータのモデル誤差に対する感度と誤差伝播則を用いたこの推定値は、実際に同定解析を行った結果と良く一致しており、本理論の妥当性が示された。更に、既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を小さくする手段として有効と考えられる、先験的情報を用いた同定手法に対する同定パラメータの信頼性領域を推定する手法の定式化を行い、先の問題と同様に数値実験による理論検証を行っている。数値実験の結果は良好で、本論で提案した手法の有効性が確認された。

Key Words : confidence region, sensitivity, known parameter error, identified parameter, Bayesian estimation

1. はじめに

地盤あるいは構造物の動的挙動を把握することを目的とした、構造パラメータの同定は耐震工学上有効な手段といえる。現在までに数多くの研究がなされ^{(例えは(1)~(7))}、その結果様々な手法が提案され多くの知見が蓄積されている。それに伴い同定手法は向上しているものと思われるが、一方で同定問題は計測の精度に強く依存しており、計測技術の向上に期待するところが大きい。また、実際の構造物は不確定性に満ちており、同定結果は常にその影響を受けていると考えるべきである。例えば、観測量として扱われている構造物への入力信号および構造物の応答は観測ノイズに汚染されている。また、既知として与えるパラメータも当然のことながら誤差を含んでいる。このような各種誤差のうち、観測ノイズの影響に関しては多くの検討がされており、Kalman filter, Dynamic programming filter等のフィルター系の手法を用いることにより、その影響をある程度除去できることが示されている^{(8), (9)}。一方、既知パラメータの誤差の影響に関する研究はあまり行われていない。そのような中で、Koh and See⁽¹⁰⁾は拡張Kalman filterを用いた構造パラメータの同定問題において、既知として与える質量に誤差を与えて、同定結果が真値に収束しないこと示し、その対策としてシステムノイズを考慮することを提案している。また、吉田・星谷⁽¹¹⁾は静的問題を対象として、既

知条件の不確定性を考慮した逆解析手法を示し、事前情報の確からしさ等により、既知・未知の条件について論じている。著者等⁽¹²⁾も動的な構造パラメータ同定問題において、モデルパラメータの誤差と観測ノイズの未知パラメータの同定結果に及ぼす影響を、誤差の感度として評価する手法を提案し、数値実験によりその有効性を確認している。

本研究は既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を確率論的に扱い、同定パラメータのモデル誤差に対する感度⁽¹²⁾を用いて、同定パラメータの信頼性領域として評価する手法を提案する。同定パラメータの信頼性領域の評価は観測誤差については行われているが、それも実際に同定を行い、その結果について行われているものであり、本論で示すように実際の同定解析を行わずに同定結果の信頼性領域を推定するような検討は行われていない。

本研究では、先ず最初に確定論的に定式化された同定問題の既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を同定パラメータの信頼性領域として評価する手法を示し、簡単なモデルを用いた数値実験によりその有効性の確認を行っている。次に、既知パラメータの誤差の影響を小さくする手段として有効と考えられる、先験的情報を用いた確率論的な同定問題における同定パラメータの信頼性領域を推定する手法の定式化を行い、先の問題と同様に数値実験による有効性の検証を行っている。

2. 同定結果の信頼性領域

(1) 理論式

地震荷重を受ける線形多自由度系の運動方程式は、次式のように表せる。

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = -M1\ddot{y}_0(t) \quad (1)$$

ここで、 M 、 C 、 K は質量、減衰、剛性マトリックス、 $\ddot{z}(t)$ 、 $\dot{z}(t)$ 、 $z(t)$ は相対加速度、相対速度、相対変位ベクトルを表している。また、 1 は全ての成分が1.0のベクトル、 $\ddot{y}_0(t)$ は地表の地震動(加速度)を表すスカラー量である。モデルパラメータのうち未知の同定パラメータを $X = \{X_1, X_2, \dots, X_M\}^T$ 、既知パラメータを $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_L\}^T$ と表す。いま、観測値として時刻歴の加速度波形を考える。観測点*i*における測定値が $\ddot{u}_i(t)$ 、それに対応する解析値が $\ddot{z}_i(t)$ 、観測誤差が $\varepsilon_i(t)$ で与えられたとすると、以下の関係が得られる。

$$\ddot{u}_i(t) = \ddot{z}_i(t) + \varepsilon_i(t), \quad i \in A \quad (2)$$

式(2)より最小二乗法の考えに従い、評価関数を時間領域で次式のように定義する。

$$J(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i \{\ddot{u}_i - \ddot{z}_i(X, Y)\}^2 dt \quad (3)$$

ここで、 $t_0 \sim t_1$ は解析時間区間を表す。 w_i は重み係数であり、観測の重要度や信頼性に従って設定する¹³⁾。

いま、既知のモデルパラメータ Y_i が真値 \bar{Y}_i より ΔY_i だけ誤差を含んでいたとする。 ΔY_i は十分小さく、この誤差が未知パラメータの同定結果に及ぼす影響も小さいと考えると、同定パラメータは

$$X = \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i \quad (4)$$

と表せる。ここで、 \bar{X} は X の真値で且つ平均値を表している。既知パラメータの分散・共分散が与えられたときの、同定結果の分散・共分散行列は式(4)の関係より、誤差伝播の法則¹⁴⁾を用いると

$$\Sigma_{XX} = A_{XY}^T \Sigma_{YY} A_{XY} \quad (5)$$

となる。ここで、 Σ_{YY} は既知パラメータの分散・共分散行列で、

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y1Y1} & \sigma_{Y1Y2} & \dots & \sigma_{Y1YL} \\ \sigma_{Y2Y1} & \sigma_{Y2Y2} & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ \sigma_{YLY1} & \dots & & \sigma_{YLYL} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A_{XY} は同定パラメータのモデル誤差に対する感度である。

$$A_{XY} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1M} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ \lambda_{L1} & \dots & & \lambda_{LM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial X_M}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y_L} & \dots & & \frac{\partial X_M}{\partial Y_L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

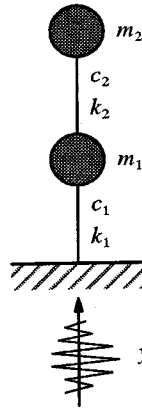


図-1 解析モデル

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= \frac{50}{9.8} \text{ (tf} \cdot \text{sec}^2/\text{m)} \\ \bar{m}_2 &= \frac{50}{9.8} \text{ (tf} \cdot \text{sec}^2/\text{m)} \\ \bar{c}_1 &= 60 \text{ (tf} \cdot \text{sec}/\text{m)} \\ \bar{c}_2 &= 50 \text{ (tf} \cdot \text{sec}/\text{m)} \\ \bar{k}_1 &= 4000 \text{ (tf}/\text{m)} \\ \bar{k}_2 &= 3000 \text{ (tf}/\text{m)} \end{aligned}$$

式(7)は次に示す感度方程式¹²⁾により求められる。

$$\sum_{i=1}^M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \right\} \lambda_{ij} = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial Y_l} \frac{\partial \ddot{z}_i}{\partial X_k} dt \quad (8)$$

$$(l = 1, \dots, L)$$

$$(k = 1, \dots, M)$$

この時、同定結果が正規分布に従うとすると、確率密度関数は次式のように表される。

$$P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\Sigma_{XX}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \bar{X})^T \Sigma_{XX}^{-1} (X - \bar{X}) \right\} \quad (9)$$

従って、同定結果の信頼領域は、信頼度を $1-e$ として、

$$(X - \bar{X})^T \Sigma_{XX}^{-1} (X - \bar{X}) < \chi_{e,M}^2 \quad (10)$$

となる¹⁴⁾。ここで、 $\chi_{e,M}^2$ は自由度 M 、信頼度が $1-e$ の限界値である。式(10)は確率楕円構造の内部を意味し、 $M=2$ の時は楕円、 $M=3$ の時は楕円体、 $M=4$ 以上の時は超楕円体となる。

実問題において、式(10)の \bar{X} は既知パラメータの母集団平均 \bar{Y} を用いて同定されるパラメータである。本来、 \bar{Y} は未知であるが、Bootstrap法¹⁵⁾等の統計手法によりその推定値に関する誤差評価が可能であり、本理論の適用は可能であると思われる。

(2) 例題

簡単なモデルを用いた数値実験で理論の検証を行う。用いたモデルは図-1に示す2質点系のモデルである。入力波形は、1940年Imperial Valley地震のEl Centro波(NS成分)を最大加速度300galに調節して用いた。構造パラメータとして、図中に示した値を用いて応答解析を行った結果の、各質点の加速度時刻歴を観測データとして用いた。

ここでは、質量 m_1 、 m_2 を既知の構造パラメータとして、減衰係数 c_1 、 c_2 および剛性 k_1 、 k_2 を未知の同定パラメータとした。いま、既知として与える質量が誤差を

有し、ある統計的性質のもとでばらついている場合の、同定結果への影響を調べる。既知パラメータの質量は平均値 \bar{m}_1, \bar{m}_2 の正規分布で与えられるものとする。 \bar{c}_1, \bar{c}_2 および \bar{k}_1, \bar{k}_2 は、質量の値として \bar{m}_1, \bar{m}_2 を用いたときの同定結果であり、真値と一致する。以下の解析では、重み係数 w_i は全て 1 としている。理論式の確認のため、質量として平均値が \bar{m}_1, \bar{m}_2 となる 1000 組の正規乱数を発生させ、その値を既知パラメータとして実際に同定解析を行い、理論値との比較を行った。ばらつきを有する質量の変動係数は $COV=0.05$ とした。また、各質量間には相関が全く無いものとした。同定手法には修正 Marquardt 法¹⁰⁾を用いた。

図-2 に既知として与えた質量の分布と、その値を用いて実際に同定を行った結果の分布をヒストグラムで示す。図中の曲線は正規分布の確率密度関数を示している。乱数により作成した質量の値が所与の平均値と標準偏差を再現していることが確認できる。また、同定結果は既知として与えた質量のばらつきにより、変動係数 0.03 ~ 0.07 の範囲内ではばらつくことが分る。同定結果の分布形状は正規分布に従っていると見える。同定結果と理論値との比較を図-3 に示す。図中の確率楕円は自由度 2、信頼度 95% の信頼限界を表している。また、○印は同定結果をプロットしたものである。ここで、同定パラメータは 4 つあるため、同定パラメータの信頼領域は自由度 4 の超楕円体となり図示できない。そこで、2 つのパラメータ毎に組合せを作り、自由度 2 の確率分布として示している。解析の結果、既知パラメータの誤差の影響で同定結果が広い範囲に分布していることが分る。2 つの減衰係数 (c_1-c_2) の分布は、同定結果の間に殆ど相関が無いことが分る。その他のパラメータ間にはある程度の正の相関が見られる。図より同定結果の分布と確率楕円は良く一致していることが分る。また、図中の矩形枠内の分数は 1000 組の同定結果のうち確率楕円内に含まれるものの数である。各ケースとも信頼度 95% の確率楕円に含まれる同定結果は 950/1000 に近い値を示しており、理論値との一致度は良いと言える。この時の確率楕円の計算に用いた、同定パラメータの質量誤差に対する感度を表-1 に示す。同定パラメータの分散・共分散および相関係数の比較を表-2 に示す。ここで、推定値とは式 (5) より求めた値である。両者は非常に良く一致していることが分る。表中の $\text{trace}(\Sigma_{xx})$ は、分散・共分散行列のトレースを表している。相関係数からも、2 つの減衰係数間の相関が低く、他のパラメータ間にはある程度の相関があることが分る。以上のように、既知パラメータの同定パラメータに及ぼす影響は、確率楕円による信頼性領域という形で評価できることが確認された。

表-1 同定パラメータの質量誤差に対する感度

Y_ℓ	$\frac{\partial c_1}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial c_2}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial k_1}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial k_2}{\partial Y_\ell}$
m_1	9.56	-3.14	248.26	51.18
m_2	2.20	12.94	535.74	536.82

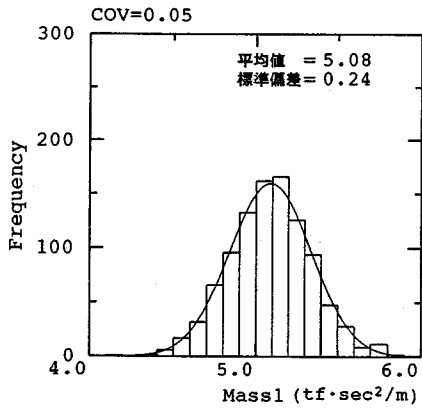
単位 $\frac{\partial c_i}{\partial m_j} : (1/sec)$, $\frac{\partial k_i}{\partial m_j} : (1/sec^2)$

表-2 分散・共分散および相関係数の比較

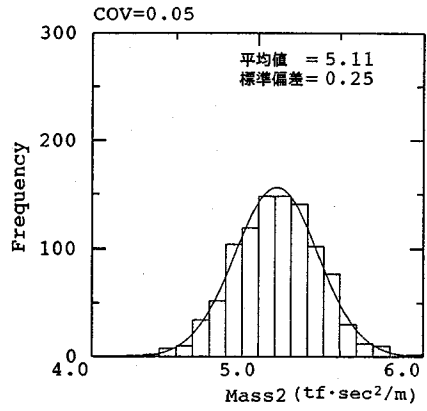
		推定値	同定結果
分散・共分散	$\sigma_{c_1c_1}$	6.3	6.0
	$\sigma_{c_1c_2}$	-0.1	-0.2
	$\sigma_{c_1k_1}$	231.1	219.9
	$\sigma_{c_1k_2}$	108.7	103.1
	$\sigma_{c_2c_2}$	11.5	11.6
	$\sigma_{c_2k_1}$	400.4	399.4
	$\sigma_{c_2k_2}$	441.6	441.5
	$\sigma_{k_1k_1}$	22689.1	22240.6
	$\sigma_{k_1k_2}$	19542.7	19334.1
	$\sigma_{k_2k_2}$	18924.1	18846.2
$\text{trace}(\Sigma_{xx})$		41631.0	41104.4
相関係数	$\rho_{c_1c_2}$	-0.0120	-0.0192
	$\rho_{c_1k_1}$	0.6131	0.6018
	$\rho_{c_1k_2}$	0.3156	0.3065
	$\rho_{c_2k_1}$	0.7826	0.7869
	$\rho_{c_2k_2}$	0.9450	0.9448
	$\rho_{k_1k_2}$	0.9431	0.9444

3. 先験的情報による信頼性領域の縮小化

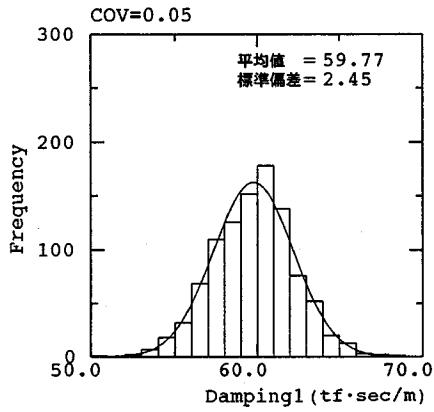
一般に同定問題は解の不確定性と解像度とが相反する関係にあり、その解決のためには先験的情報を用いた最小分散解を求めることが有益であることが示されている^{17), 18)}。本研究で扱っているような既知パラメータが誤差に汚染されている場合に、精度良く同定結果を得るためには、このような考え方が有効であると考えられる。先の例題で示したとおり、既知パラメータの誤差の影響は、同定パラメータの信頼性領域として評価できる。そこで、先験的情報を用いた最小分散解を求めることによる、同定結果の精度の向上を本論で示した理論により評価することを試みる。非線形問題における先験情報を用いた最小分散解とはいわゆる Bayes 推定¹⁹⁾のことを指しており、確率論的な評価手法である。そのため、前章で示した理論の中の同定パラメータのモデル誤差に対す



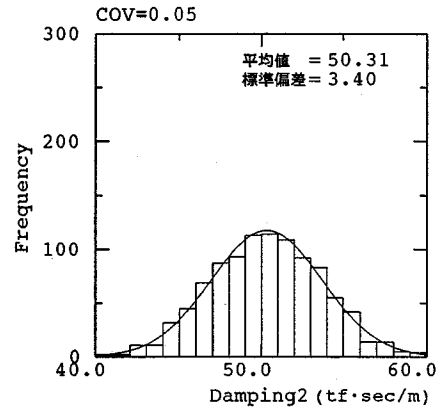
(1) m_1



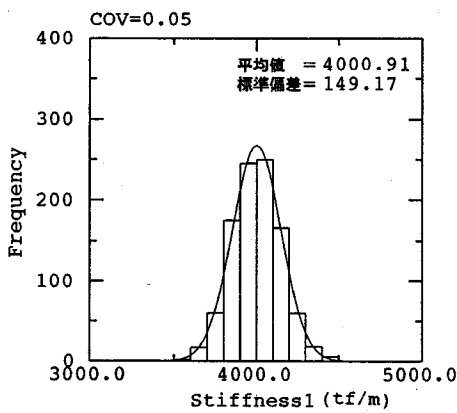
(2) m_2



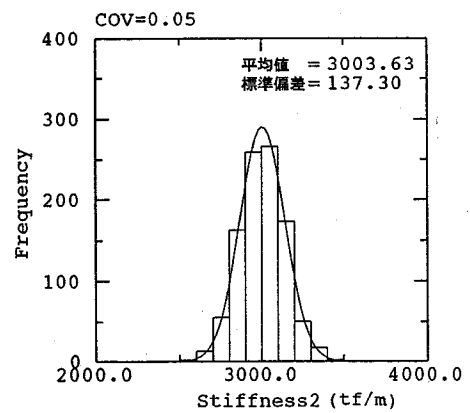
(3) c_1



(4) c_2



(5) k_1



(6) k_2

図-2 既知パラメータと同定パラメータの分布

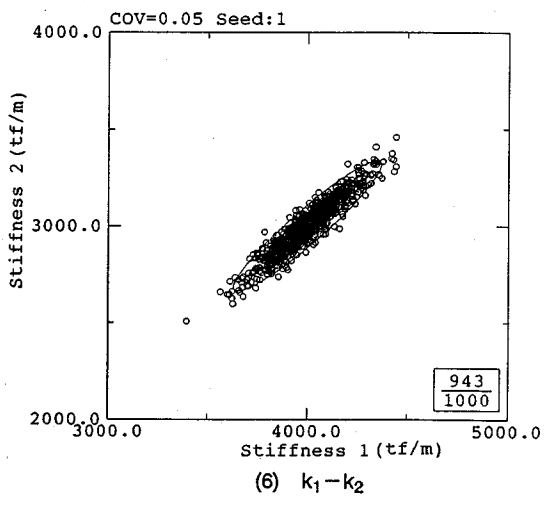
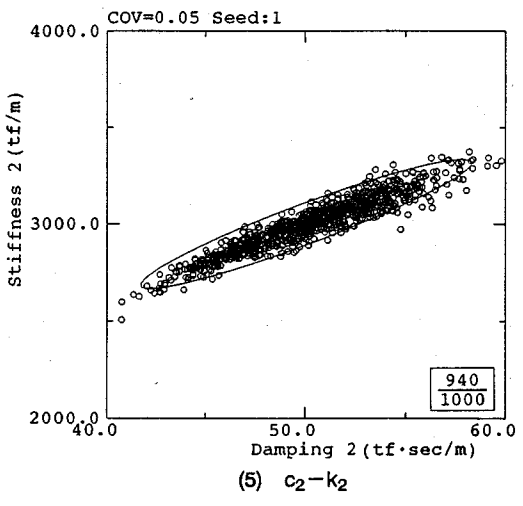
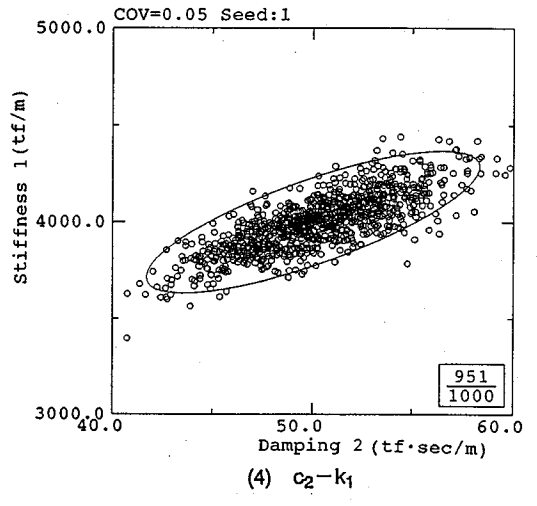
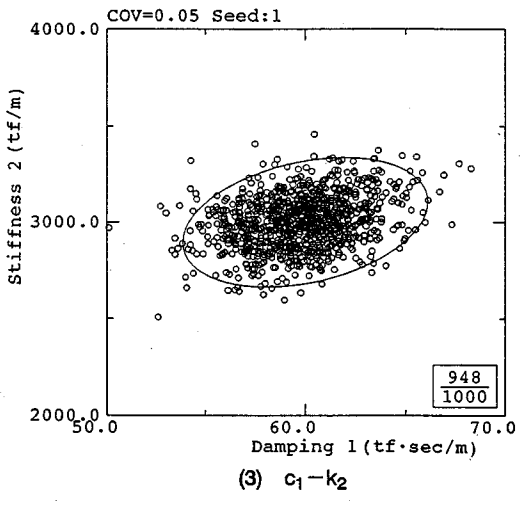
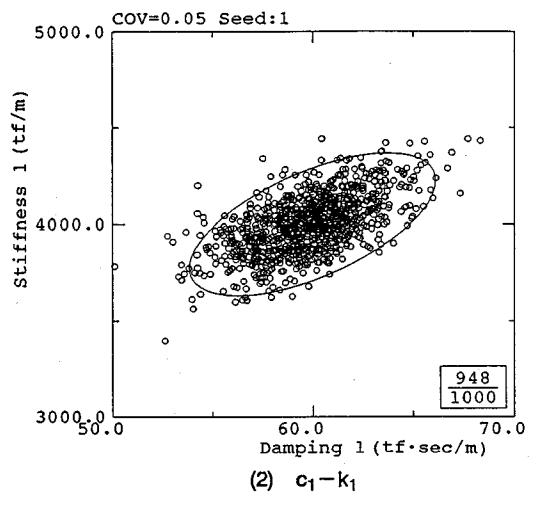
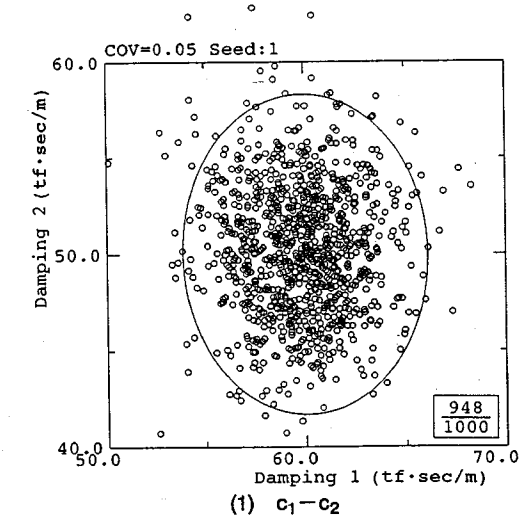


図-3 同定結果の信頼性領域

る感度がそのままでは使用できない。何故なら、同定問題の評価関数が両者で異なるからである。そこで、以下に Bayes 推定の場合の同定パラメータのモデル誤差に対する感度を求める式を誘導する。次に、その感度を用いて、前章で行った例題と同様の問題に適用して、既知パラメータの誤差に影響される同定パラメータの信頼性領域を求める。

(1) 感度方程式の誘導

先験的情報として、同定パラメータの統計的性質が正規分布で与えられるとき、その平均値及び分散・共分散が以下のように与えられているものとする。

$$E[X] = \bar{X}, \quad E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] = M \quad (11)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値を表している。また、式 (2) の観測誤差 $\varepsilon_i(t)$ の統計的性質が、

$$E[\varepsilon] = \mathbf{0}, \quad E[\varepsilon\varepsilon^T] = R \quad (12)$$

で与えられるとき、Bayes 推定の考え方に基づく評価関数は以下ようになる。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\ddot{u} - \ddot{z}(X))^T R^{-1} (\ddot{u} - \ddot{z}(X)) dt + \frac{1}{2} (X - \bar{X})^T M^{-1} (X - \bar{X}) \quad (13)$$

いま、既知のモデルパラメータ Y_i が真値 \bar{Y}_i より ΔY_i だけ誤差を含んでいたとする。式 (4) の関係より、式 (13) の評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \ddot{u} - \ddot{z} \left(\bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i, \bar{Y}_i + \Delta Y_i \right) \right\}^T R^{-1} \cdot \left\{ \ddot{u} - \ddot{z} \left(\bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i, \bar{Y}_i + \Delta Y_i \right) \right\} dt + \frac{1}{2} \left\{ \left(\bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i \right) - \bar{X} \right\}^T M^{-1} \left\{ \left(\bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i \right) - \bar{X} \right\} \quad (14)$$

と表すことができる。ここで、 \ddot{u} は観測ノイズを全く含まない観測量を表している。式 (14) は Taylor 展開により近似的に

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\ddot{u} - \ddot{z}(\bar{X}) - H_X \lambda_i \Delta Y_i - H_Y \Delta Y_i)^T R^{-1} \cdot (\ddot{u} - \ddot{z}(\bar{X}) - H_X \lambda_i \Delta Y_i - H_Y \Delta Y_i) dt + \frac{1}{2} ((\bar{X} + \lambda_i \Delta Y_i) - \bar{X})^T M^{-1} ((\bar{X} + \lambda_i \Delta Y_i) - \bar{X}) \quad (15)$$

と表せる。ここで、

$$H_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial X_M} \\ \frac{\partial \ddot{z}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \ddot{z}_2}{\partial X_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \ddot{z}_N}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \ddot{z}_N}{\partial X_M} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_i} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_M}{\partial Y_i} \end{Bmatrix}, \quad H_Y = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \ddot{z}_1}{\partial Y_i} \\ \frac{\partial \ddot{z}_2}{\partial Y_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ddot{z}_N}{\partial Y_i} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

($i=1, \dots, L$)

であり、 λ_i が同定パラメータのモデル誤差に対する感度ベクトルである。 \ddot{u} と $\ddot{z}(\bar{X})$ が一致することを利用して式 (15) を整理すると、

$$J = \frac{1}{2} (\Delta Y_i)^2 \int_{t_0}^{t_1} (-H_X \lambda_i - H_Y)^T R^{-1} (-H_X \lambda_i - H_Y) dt + \frac{1}{2} (\Delta Y_i)^2 \lambda_i^T M^{-1} \lambda_i \quad (17)$$

既知パラメータの誤差の大きさ ΔY_i に関係無く式 (17) が最小となる条件より、

$$dJ = d\lambda_i^T \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} H_X^T R^{-1} (-H_X \lambda_i - H_Y) dt + M^{-1} \lambda_i \right\} = 0 \quad (18)$$

式 (18) より感度方程式は、

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_1} H_X^T R^{-1} H_X dt + M^{-1} \right\} \lambda_i = - \int_{t_0}^{t_1} H_X^T R^{-1} H_Y dt \quad (i=1, \dots, L) \quad (19)$$

となる。式 (19) の連立方程式を解くことにより感度が得られ、式 (5) の誤差伝播則から同定パラメータの分散・共分散行列が得られる。

(2) 例題

理論を確認するため、2. (2) の例題で使用した 2 質点系モデルを用いて同様な方法で数値実験を行った。既知として与える質量は、2. (2) で用いたものをそのまま使用した。

2. (2) の例題と条件を合わせるために、観測誤差の分散・共分散行列は $R_{ii}=1.0$, ($i=1, 2$), $R_{ij}=0.0$, ($i \neq j$) とした。また、事前情報としては、減衰係数、剛性ともに平均値および変動係数 $COV=0.005$ が与えられているものとした。この事前情報 $COV=0.005$ という値は十分に小さく、この程度の信頼度があれば、通常同定解析を行う必要はない。ここで、この事前情報を用いる理由を以下に述べる。まず、式 (13) の R^{-1} と M^{-1} は各々観測量と事前情報の信頼性を示す重みと考えることができる。従って、式 (13) 右辺の第 1 項と第 2 項のどちらに重みを置か、もしくは両者のバランスの取り方を調整するパラメータと考えることができる。即ち、両者は相対的な大きさしか意味を持たない (このような問題に対して、式 (13) 右辺の第 2 項をスカラー倍する拡張 Bayes 法¹⁹⁾ という考え方もある)。この例題の場合、先の例題と条件を合わせて観測誤差の分散を全

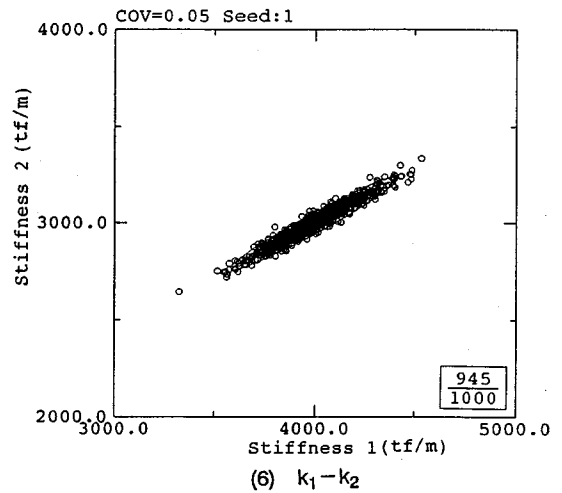
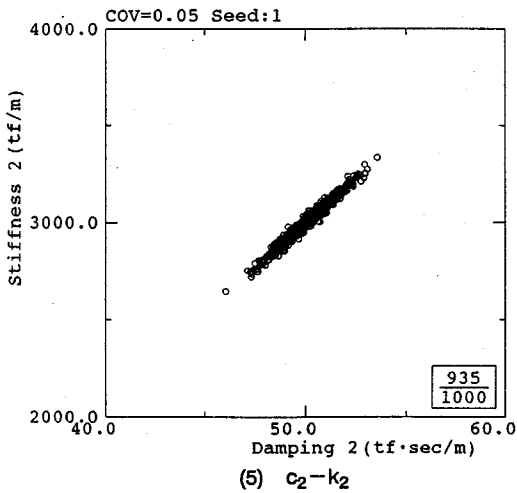
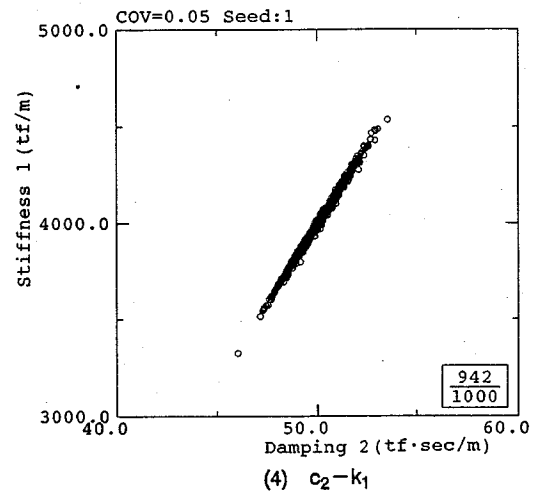
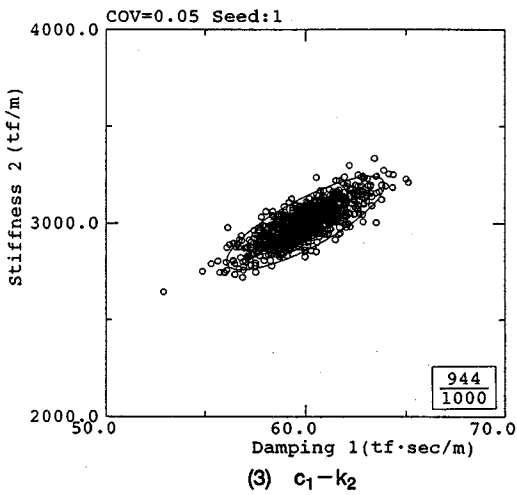
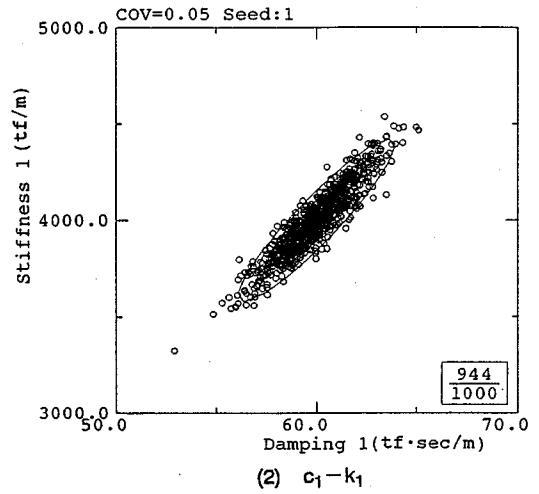
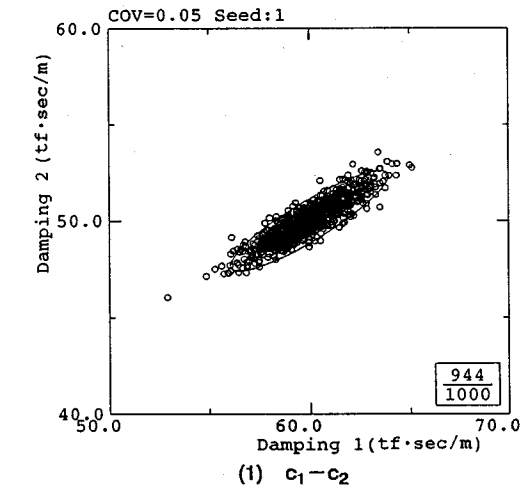


図-4 同定結果の信頼性領域 (先験的情報を用いた場合)

表-3 同定パラメータの質量誤差に対する感度

Y_ℓ	$\frac{\partial c_1}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial c_2}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial k_1}{\partial Y_\ell}$	$\frac{\partial k_2}{\partial Y_\ell}$
m_1	4.24	1.15	237.33	46.46
m_2	4.65	3.99	628.93	384.11

単位 $\frac{\partial c_i}{\partial m_j} : (1/sec)$, $\frac{\partial k_i}{\partial m_j} : (1/sec^2)$

表-4 分散・共分散および相関係数の比較

		推定値	同定結果
分散・共分散	$\sigma_{c_1c_1}$	2.6	2.5
	$\sigma_{c_1c_2}$	1.5	1.5
	$\sigma_{c_1k_1}$	255.8	250.7
	$\sigma_{c_1k_2}$	129.0	127.0
	$\sigma_{c_2c_2}$	1.1	1.1
	$\sigma_{c_2k_1}$	181.3	178.9
	$\sigma_{c_2k_2}$	103.3	102.3
	$\sigma_{k_1k_1}$	29406.9	28895.5
	$\sigma_{k_1k_2}$	16438.7	16242.9
	$\sigma_{k_2k_2}$	9742.0	9671.4
	$tracce(\Sigma_{XX})$	39152.6	38570.5
相関係数	$\rho_{c_1c_2}$	0.8965	0.8969
	$\rho_{c_1k_1}$	0.9290	0.9250
	$\rho_{c_1k_2}$	0.8142	0.8100
	$\rho_{c_2k_1}$	0.9968	0.9969
	$\rho_{c_2k_2}$	0.9872	0.9852
	$\rho_{k_1k_2}$	0.9712	0.9716

て1.0としているため、この値に対して式(13)右辺の第2項が意味を持つためには、ここで与えた通り同定パラメータの分散を小さくする必要がある。本論では理論式の検証のみに重きをおいて、この値を用いている。実際の問題では、観測誤差の分散・共分散行列との関係から適した値を決定することになる。

同定結果と理論から求めた推定値との比較を図-4に示す。図中の確率楕円は式(10)より自由度2、信頼度95%の信頼限界を表している。このときの同定パラメータの質量誤差に対する感度は式(19)の感度方程式より求めたものである。○印は同定結果をプロットしたものである。全てのパラメータで、事前情報を用いることにより同定結果のばらつきが小さくなっている。これは、事前情報として与えた同定パラメータの分散が拘束条件として働いていることを示している。また、事前情報を

用いなかった時には殆ど相関の見られなかった減衰係数(c_1-c_2)は、事前情報を用いることにより強い正の相関が見られる。その他のパラメータ間においても、事前情報を用いなかった時に比べて相関が高くなっている。図より同定結果の分布と理論から求めた確率楕円は良く一致していることが分る。図中の矩形枠内の分数は1000組の同定結果のうち確率楕円内に含まれるもの数である。各ケースとも信頼度95%の確率楕円に含まれる同定結果は950/1000に近い値を示しており、理論値との一致度は良いと言える。この時の、同定パラメータの質量誤差に対する感度を表-3に示す。表-1の場合と比べて殆どの感度が小さくなっていることが分かる。このことから、同定結果の分散が小さくなることが分る。同定パラメータの分散・共分散および相関係数の比較を表-4に示す。両者は非常に良く一致していることが分る。

先験的情報を用いなかった時に比べて、 k_1 を除くパラメータの同定結果の分散が小さくなっている。 k_1 については、先験的情報を用いた場合に比べてやや大きくなっているが、これは k_1 に対する事前情報の値(分散)がまだ十分小さくなく、重みとして働いていないことによるものと思われる。しかし、先験的情報を用いなかった場合との同定結果の分散・共分散行列のトレースの比較においては、先験的情報を用いた場合の方が小さくなっており、得られた解が全分散(total variance)を最小とする最小分散解となっていることが分る。また、相関係数が1.0に近い値になっており、各パラメータ間の相関が高くなっていることが定量的に分る。

4. 結 論

本論文は、動的な構造パラメータの同定問題において、既知パラメータの誤差に影響される同定パラメータの信頼性領域を推定する手法を提案し、数値実験により理論の検証を行った。理論の定式化および数値実験の結果より、結論を以下のように要約できる。

- (1) 既知パラメータの誤差に影響される同定パラメータの信頼性領域は、確率楕円として評価することができる。
- (2) 既知パラメータの誤差が同定パラメータに及ぼす影響を小さくすることを目的として、先験的情報を用いた評価関数の定式化をした場合の同定パラメータの信頼性領域を推定する理論式の定式化を行った。
- (3) 本論で提案した同定結果の信頼性領域の推定値は、実際の同定結果の分布と良く一致する。
- (4) 先験的情報を考慮した同定を行うことにより、既知パラメータの誤差に影響された同定結果の分散を小さくすることが可能である。

(5) 既知パラメータが誤差を有する場合、同定パラメータ間の相関が低かったものが、先験的情報を用いた同定を行うことによって、同定パラメータ間の相関が高くなることが分った。

本研究では、既知パラメータの誤差の影響のみを取り扱っている。しかし、実問題における観測量はノイズに汚染されており、同定パラメータの信頼性領域の評価においては、両者を考慮する必要がある。観測ノイズによる影響についても、本論文で示した手法を拡張することによって評価できる。ここでは、観測ノイズによる影響が既知パラメータの誤差による影響に比べて小さいため、既知パラメータの誤差の影響のみを考えている。最終的には両方の影響を考慮した総合的な評価手法が望ましく、今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 星谷勝, 斎藤悦郎: 拡張カルマン・フィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文報告集, 第339号, pp.59-67, 1983年11月.
- 2) 星谷勝, 斎藤悦郎: データ解析と応用—カルマンフィルタを中心として—, 鹿島出版会, 1991年7月.
- 3) Toki, K., Sato, T. and Kiyono, J.: Identification of structural parameters and input ground motion from response time histories, *Proceedings of JSCE, Structural Engineering/Earthquake Engineering*, No.410/I-12, pp.243-251, October 1989.
- 4) 松井邦人, 栗田哲史: 応答加速度波を用いた構造特性の同定, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.689-698, 1989年3月.
- 5) 佐藤智美, 佐藤俊明, 川瀬博: 堆積盆地におけるS波伝播の識別と非線形性の同定, 日本建築学会構造系論文報告集, 第449号, pp.55-68, 1993年7月.
- 6) Udawadia, F.E.: Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.120, No.2, pp.368-390, February 1994.
- 7) 沢田勉, 岡本康, 平尾潔, 辻原治: 地盤のS波速度とQ値の部分同定法の開発, 土木学会論文集, No.495/I-28, pp.111-118, 1994年7月.
- 8) Ott, N. and Meder, H.G.: The Kalman filter as a prediction error filter, *Geophysical Prospecting* 20, pp.549-560, 1970.
- 9) Distefano, N. and Pena-Pardo, B.: System identification of frames under seismic loads, *Journal of The Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.102, No.EM2, pp.313-330, April 1976.
- 10) Koh, C.G. and See, L.M.: Identification and uncertainty estimation of structural parameters, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.120, No.6, pp.1219-1236, June 1994.
- 11) 吉田郁政, 星谷勝: 既知条件の不確定性を考慮した逆解析, 土木学会論文集, No.501/I-29, pp.213-216, 1994年10月.
- 12) Matsui, K. and Kurita, T.: Sensitivities of parameters due to model errors and measurement noises in structural identification problems, *Proceedings of JSCE, Structural Engineering / Earthquake Engineering*, No.422 / I-14, pp.145-154, October 1990.
- 13) 吉田郁政, 黒瀬浩公, 福井史朗: 確率論に基づく逆解析手法の基礎的研究, 土木学会論文集, No.483/I-26, pp.61-68, 1994年1月.
- 14) 田島稔, 小牧和雄: 最小二乗法の理論とその応用, 東洋書店, 1986年2月.
- 15) 村上征勝, 田村義保編: パソコンによるデータ解析, 朝倉書店, 1992年9月.
- 16) 中川徹, 小柳義夫: 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982年5月.
- 17) 松浦充宏: 地球物理学におけるインバージョン理論の発展, 地震, 第2輯, 第44巻, pp.53-62, 1991年.
- 18) Jackson, D.D. and Matsu'ura, M.: A Bayesian approach to nonlinear inversion, *Journal of Geophysical Research*, Vol.90, No.B1, pp.581-591, January 1985.
- 19) Honjo, Y., Wen-Tsung, L. and Guha, S.: Inverse analysis of an embankment on soft clay by extended Bayesian method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.18, pp.709-734, 1994. (1995.7.24 受付)

CONFIDENCE REGION OF IDENTIFIED PARAMETERS DEPENDING UPON KNOWN PARAMETER ERRORS

Tetsushi KURITA and Kunihito MATSUI

This paper deals with the effect of known parameter errors on structural identification problems by using the estimation formula of confidence region. Numerical experimentation is conducted to examine the validity of the proposed method by mean of the sensitivity analysis of identified parameters with respect to model parameter errors and the propagation law of errors. In this paper, a method, which estimates the confidence region of identified parameters based on the concept of prior information about unknown model parameters, is proposed. The investigation of proposed method is performed by numerical simulation. The validity of the proposed method is verified with the numerical results.