

逆対称アングルプライ積層長方形板の振動, 座屈 および動的安定特性

高橋和雄¹・佐藤栄司²・前田悟雄³・阿比留勝吾⁴

¹正会員 工博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)

²正会員 工修 三井建設(株) 土木本部 (〒101 千代田区岩本町3-10-1)

³正会員 パシフィックコンサルタンツ(株) 九州支社 (〒819 福岡市西区姪浜町33-1)

⁴学生員 長崎大学大学院 土木工学専攻 (〒852 長崎市文教町1-14)

本研究はせん断変形を考慮した逆対称アングルプライ積層した長方形板の振動, 座屈および動的安定特性を明らかにする。解析においては, 曲げに対して全周辺単純支持, 面内変位に対して固定された境界条件に異方性の異なる3つの材料を用い Rayleigh-Ritz 法により振動, 座屈解析を行う。次いで, Hamilton の原理により時間に関する運動方程式を誘導する。この運動方程式に単純共振と結合共振が同時に得られる厳密な解法を用い積層数, 配向角, 板厚等をパラメーターとして動的不安定領域を明らかにする。

Key Words : laminated rectangular plate, vibration, buckling, Rayleigh-Ritz method, dynamic unstable regions, Hamilton method

1. ま え が き

複合材料からなる積層板は, 比強度および比弾性率に優れる。この優れた力学的特性を持つ材料を用い, 材質, 積層数および配向角などを変化させることにより, さらに優れた特性を持つ様々な構造部材の設計が可能となる。これまで, 構造重量や強度が特に問題となる航空, 宇宙産業や耐久性が問題となる船体, 自動車の部材に利用されてきた¹⁾。最近では, 土木の分野においても海洋構造物や積層コンクリート, 衝撃緩衝部材として利用され, 今後さらに大規模な構造物に利用されることと思われる。積層板は異方性を示し, その取り扱いが複雑となるが, 現在, 静力学や振動に関する力学的特性はかなり明らかにされてきた^{2), 3), 4)}。しかし, 軽構造物において動的安定性の問題は重要な課題となるにもかかわらず, 積層板の動的安定性を取り扱った研究は極めて少ない^{5), 6)}。このため, 積層板の動的安定に及ぼすパラメーターの影響は明らかにされていない。

以上のような現状に基づいて著者らは, 単純共振と結合共振が同時に得られる動的安定解析の厳密な解法⁷⁾を用い, アングルプライ(斜交)積層された長方形板の動的安定性を明らかにすることを目的としている。すでに対称アングルプライ積層板を対象に, 曲げ-ねじりカップリング剛性を無視した解析を, 幾何学的な境界条件と力学的境界条件をともに満足する試行関数を用い

Galerkin 法により行った⁸⁾。曲げ-ねじりカップリング剛性を考慮した場合⁹⁾には, 力学的境界条件が複雑となるため, 幾何学的境界条件のみ満足する試行関数を用いて解が得られる Rayleigh-Ritz 法を用いた解析を行った⁹⁾。これより対称積層板の動的安定性が明らかにされた。

逆対称アングルプライ積層板の場合, その支配方程式において, たわみと面内変位が連成する。また積層板では, 平板のせん断変形の影響を評価しておくことが必要である。そこで, 本研究ではせん断変形を考慮した逆対称アングルプライ積層板の振動, 座屈および動的安定特性を明らかにする。解析の第一段階として, Rayleigh-Ritz 法を用いた固有振動解析および座屈解析を行い, 材料, 積層数および配向角などをパラメーターとして, 固有振動特性および座屈特性を明らかにする。次いで, 固有振動解析により得られた固有振動形を用いて, Hamilton の原理を適用し, 動的安定問題に関する運動方程式を誘導する。この得られた運動方程式に, 著者らによって開発された固有値問題に変換する方法により2倍サイズの固有値問題に変換して動的安定解析を行う⁶⁾。なお, 数値計算においては, 異方性の異なる3種類を対象とし, 曲げに対して単純支持, 面内変位に対して固定の境界条件および任意の配向角のもとに明らかにする。

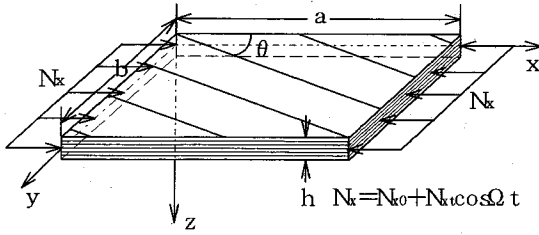


図-1 一般図

2. 解析モデル

図-1に本研究で使用するL層積層板の一般図を示す。x軸方向の長さをa、y軸方向の長さをb、配向角を θ 、x軸方向の静的面内力 N_{x0} と変動面内力 $N_{x1} \cos \Omega t$ の和を N_x （圧縮力を正とする）で表わす。境界条件には、面外に対して全周単純支持、面内固定の $w_n = M_n = u_{on} = N_{ni} = 0$ （ w_n ：面外たわみ、 u_{on} ：面内中央面変位、 M_n ：曲げモーメント、 N_{ni} ：面内合応力、 n ：端辺に垂直方向、 t ：端辺に接する方向）を用いる。

3. 解法

(1) 固有振動解析および座屈解析

L層からなるせん断変形を考慮した逆対称アングルブライ積層板のひずみエネルギー V は、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 V = & \iint_A \left\{ \frac{A_{11}}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_{11}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right)^2 + A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\} \\
 & + B_{16} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right] \\
 & + B_{26} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right] \\
 & + D_{12} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + \frac{1}{2} k A_{44} \left[\bar{\beta}^2 + 2 \bar{\beta} \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{A_{22}}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} k A_{55} \left[\bar{\alpha}^2 + 2 \bar{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{D_{22}}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 & + D_{66} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial x} \right)^2 \right] \} dA \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここに、 A_{ij} ：面内剛性、 B_{ij} ：カップリング剛性、 D_{ij} ：曲げ剛性、 k ：せん断補正係数、 x, y ：平板中央面の座標系、 w, u_0, v_0 ：平板中央面の変位、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ ： x, y 方向の回転角

次に、運動エネルギー T およびx軸方向の静的面内力 N_{x0} がなす仕事 U は次のように与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial(u_0 + z\bar{\alpha})}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(v_0 + z\bar{\beta})}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA dz \quad (2)$$

$$U(w) = -\frac{1}{2} \iint_A N_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (3)$$

ここに、 ρ ：板の密度、 h ：板厚

面外たわみ、 x および y 軸方向の面内変位、および回転を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} W_{mn}(\xi, \zeta) \\
 u_0(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} B_{mn} U_{mn}(\xi, \zeta) \\
 v_0(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} C_{mn} V_{mn}(\xi, \zeta) \\
 \bar{\alpha}(\xi, \zeta, t) &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} D_{mn} A_{mn}(\xi, \zeta) \\
 \bar{\beta}(\xi, \zeta, t) &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} E_{mn} B_{mn}(\xi, \zeta) \quad (4)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\xi = \frac{x}{a}$ 、 $\zeta = \frac{y}{b}$ 、振動解析において、 A_{mn} 、 B_{mn} 、 C_{mn} 、 D_{mn} 、 E_{mn} ：時間に関する未知の関数であり、固有振動数を ω_{mn} とおくと

$$\begin{aligned}
 A_{mn}(t) &= \bar{A}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t), \quad B_{mn}(t) = \bar{B}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t), \\
 C_{mn}(t) &= \bar{C}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t), \quad D_{mn}(t) = \bar{D}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t), \\
 E_{mn}(t) &= \bar{E}_{mn} \exp(i\omega_{mn}t) \text{ と表される。}
 \end{aligned}$$

式(4)において $W_{mn}(\xi, \zeta)$ 、 $U_{mn}(\xi, \zeta)$ 、 $V_{mn}(\xi, \zeta)$ 、 $A_{mn}(\xi, \zeta)$ 、 $B_{mn}(\xi, \zeta)$ は、幾何学的境界条件を満足する関数（Appendix A 参照）。

Rayleigh-Ritz法を適用すると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \bar{A}_{rs}} (V - T + U) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{B}_{rs}} (V - T + U) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{C}_{rs}} (V - T + U) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{D}_{rs}} (V - T + U) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{E}_{rs}} (V - T + U) &= 0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

ここに、 $r, s = 1, 2, \dots, L$ 、 L ：級数の項数
式(5)に式(1)、(2)、(3)を代入し、偏微分を実行した後さらに式(4)を代入し、積分してまとめると、次のように行列表示される。

$$([E] - \lambda^4 [F] - \lambda_b [G]) \{x\} = \{0\} \quad (6)$$

ここに、 $[E] : E(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = E_{mrns}$
 $[F] : F(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = F_{mrns}$
 $[G] : G(s+(r-1)L, n+(m-1)L) = G_{mrns}$
 $\{X\} : \{\bar{A}_{11} \bar{A}_{12} \dots \bar{A}_{1L} \bar{A}_{21} \bar{A}_{22} \dots \bar{A}_{LL} \dots \bar{E}_{LL}\}^T$

$$\lambda^4 = \rho h \omega_{mn}^2 \frac{b^4}{D_{11}^0}, \quad \lambda_b = N_{x0} \frac{b^2}{D_{11}^0}$$

$E_{mrs}, F_{mrs}, G_{mrs} : W_{mn}, U_{mn}, V_{mn}, A_{mn}, B_{mn}, W_{rs}, U_{rs}, V_{rs}, A_{rs}, B_{rs}$ およびこれらの微分からなる関数の積分

式 (6) で $\lambda_b = 0$ とおけば, 自由振動の固有値が得られ, $\lambda = 0$ とおけば座屈固有値 λ_b が行列の固有値問題として得ることができる。

本論文においては, 次のような無次元化を行う。
 $\beta = a/b$ (縦横比), $\gamma = b/h$ (板厚比)

$$A_{11}^* = h^2 A_{11} / D_{11}^0, \quad A_{12}^* = h^2 A_{12} / D_{11}^0, \quad A_{22}^* = h^2 A_{22} / D_{11}^0,$$

$$A_{66}^* = h^2 A_{66} / D_{11}^0, \quad B_{16}^* = h B_{16} / D_{11}^0, \quad B_{26}^* = h B_{26} / D_{11}^0,$$

$$D_{11}^* = D_{11} / D_{11}^0, \quad D_{12}^* = D_{12} / D_{11}^0, \quad D_{22}^* = D_{22} / D_{11}^0,$$

$D_{66}^* = D_{66} / D_{11}^0$ ($D_{11}^0 : \theta = 0^\circ$ の場合の D_{11} の板剛性) とする無次元化を行う。

(2) 動的安定解析

x 軸方向に一樣の静的面内力 N_{x0} と, 変動面内力 $N_{xi} \cos \Omega t$ が作用する場合を考えると, 面内力がなす仕事は

$$U = -\frac{1}{2} \iint_A (N_{x0} + N_{xi} \cos \Omega t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (7)$$

ここに, N_{x0} : 静的面内力, N_{xi} : 変動面内力の振幅, Ω : 変動面内力の円振動数

面外たわみ, x および y 軸方向の面内変位および回転を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} w(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{T}_{mn}(t) \bar{W}_{mn}(\xi, \zeta) \\ u_0(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{T}_{mn}(t) \bar{U}_{mn}(\xi, \zeta) \\ v_0(\xi, \zeta, t) &= h \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{T}_{mn}(t) \bar{V}_{mn}(\xi, \zeta) \\ \alpha(\xi, \zeta, t) &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{T}_{mn}(t) \bar{A}_{mn}(\xi, \zeta) \\ \beta(\xi, \zeta, t) &= \sum_{m=1} \sum_{n=1} \bar{T}_{mn}(t) \bar{B}_{mn}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに, $\bar{T}_{mn}(t)$: 時間に関する未知の関数
 $\bar{W}_{mn}(\xi, \zeta), \bar{U}_{mn}(\xi, \zeta), \bar{V}_{mn}(\xi, \zeta), \bar{A}_{mn}(\xi, \zeta), \bar{B}_{mn}(\xi, \zeta)$: 座標関数で, Rayleigh-Ritz 法で得られた積層板の固有振動形を用いる。

運動方程式を誘導するために Hamilton の原理を適用する。すなわち,

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} (T - (V + U)) dt = 0 \quad (9)$$

ここに, $\delta \bar{T}_{mn}(t_1) = \delta \bar{T}_{mn}(t_2) = 0$

式 (9) の変分を行い, $\delta \bar{T}_{mn}$ が任意の大きさであることから時間に関する運動方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{T}}_{kl}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{T}_{kl}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{T}_{kl}} = 0 \quad (10)$$

($k, l = 1, 2, 3, \dots, P$)

ここに, P : 級数の項数

式 (10) に式 (1), (2), (7) を代入し, 時間および面内力を無次元化しまとめると

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} \sum_{k=1} \sum_{l=1} \left\{ \bar{A}_{mn}^{kl} \ddot{\bar{T}}_{mn} + \left(\frac{1}{\lambda_{11}^{04}} \bar{B}_{mn}^{kl} \right) \bar{T}_{mn} - \frac{\lambda_b^0}{\lambda_{11}^{04}} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xi} \cos \bar{\omega} \tau) \bar{C}_{mn}^{kl} \bar{T}_{mn} \right\} = 0 \quad (11)$$

ここに, $\tau = \omega_{11}^0 t$, $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}^0$, $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$, $\bar{N}_{xi} = N_{xi} / N_{cr}$, $\lambda_b^0 = N_{cr} b^2 / D_{11}^0$, $\lambda_{11}^{04} = \rho h b^4 \omega_{11}^{02} / D_{11}^0$, $\bar{A}_{mn}^{kl}, \bar{B}_{mn}^{kl}, \bar{C}_{mn}^{kl} : \bar{W}_{mn}, \bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}$ の積分からなる関数と $\bar{W}_{kl}, \bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{A}_{kl}, \bar{B}_{kl}$ の積分からなる関数の積を各係数のもとに足し合せたもの, $\omega_{11}^0 : \theta = 0^\circ$ の 1 次の固有振動数, $N_{cr} : \theta = 0^\circ$ の座屈面内力

式 (11) を行列表示すると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} [A] \{\bar{T}\} + [B] \{\bar{T}\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xi} \cos \bar{\omega} \tau) [C] \{\bar{T}\} &= \{0\} \\ \{\bar{T}\} &= \{\bar{T}_{11}, \bar{T}_{12}, \dots, \bar{T}_{1P}, \bar{T}_{21}, \bar{T}_{22}, \dots, \bar{T}_{2P}, \dots, \bar{T}_{PP}\}^T \\ [A] : A \{j + (i-1)P, n + (m-1)P\} &= \bar{A}_{mn}^{kl} \\ [B] : B \{j + (i-1)P, n + (m-1)P\} &= \frac{1}{\lambda_{11}^{04}} \bar{B}_{mn}^{kl} \\ [C] : C \{j + (i-1)P, n + (m-1)P\} &= -\frac{\lambda_b^0}{\lambda_{11}^{04}} \bar{C}_{mn}^{kl} \end{aligned} \quad (12)$$

($i, j, k, l = 1, \dots, P$)

[A] および [B] は対角行列となるが, 動的不安定領域の性質を表わす係数励振行列 [C] は配向角 $\theta = 0^\circ$ を除いて対角行列とはならない。しかし, 行列要素 $C \{j + (i-1)P, n + (m-1)P\}$ が零となるものが含まれる。このような場合, 行列要素を並べ替えることによって行列の分割ができ, 式 (12) の自由度を減らして計算することが可能である⁹⁾。本ケースも行列 [C] を 2 つに分解することができる。

式 (12) は連立の Mathieu の方程式であり, その一般解を次式のように仮定する⁷⁾。

$$\{\bar{T}\} = \exp(\lambda \tau) \left[\frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \{ \mathbf{a}_q \sin(q\bar{\omega}\tau) + \mathbf{b}_q \cos(q\bar{\omega}\tau) \} \right] \quad (13)$$

ここに, λ : 未定定数, $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_q, \mathbf{b}_q$: 未知のベクトル
式 (12) に式 (13) を代入して, 調和バランス法を適用することにより 2 倍サイズの固有振動問題に変換できる。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここに, $[M_0], [M_1], [M_2]$: λ の各次数の係数行列,
 $\{Y\} = \lambda \{X\}$, $\{X\} : \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_q, a_1, a_2, \dots, a_q\}^T$ 。

式 (14) は, 非対称行列の固有値問題の基礎式である。つまり, 与えられた加振振動数 $\bar{\omega}$ と変動面内力の振幅 \bar{N}_{xi} の組み合わせに対して得られた固有値 λ の値がすべて負ならば一般解中の $\exp(\lambda \tau)$ が時間とともに収束す

表-1 材料定数

材 料	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	μ_{12}
(1) EGLASS / EP	60.7	24.80	11.99	0.23
(2) GRAPHITE / EP	138	8.96	7.1	0.30
(3) BORON / EP	209	19.00	6.4	0.21

表-2 固有振動数の比較 ($L=8, \theta=45^\circ, \beta=1.0$)

γ	本解析	比較解	誤差 (%)
10	19.284	19.266	0.093
20	23.266	23.239	0.116
50	24.923	24.905	0.072
100	25.191	25.174	0.067

るため安定、逆に一つでも正ならば発散してしまうため不安定であるという条件から安定性が評価される⁷⁾。

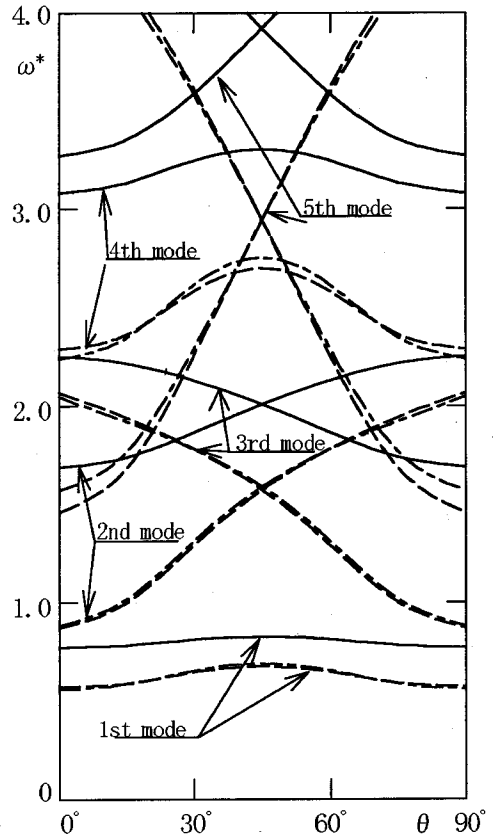
4. 材料定数および剛性

本研究では、比較的異方性の度合いが小さい EGLASS/EP と異方性の度合いの大きい GRAPHITE/EP (EP: EPOXIES の略) および BORON/EP の 3 種類の材料を使用し解析を行う。各材料定数の値は、表-1 に示す文献¹⁰⁾ で使用されている値を用いる。また、せん断弾性係数およびポアソン比については、 $G_{23}=G_{31}=G_{12}$ 、 $\mu_{23}=\mu_{31}=\mu_{12}$ を用いる。なお、 k は各材料とも 5/6 を用いる。

5. 固有振動特性

表-2 に境界条件が面外全周単純支持、面内固定正方形板の積層数 $L=8$ 、配向角 $\theta=45^\circ$ の 1 次の振動数を同じく Rayleigh-Ritz 法により解析を行った文献¹¹⁾ の解と比較したものである。各板厚比とも 1% 以内の比較的小さい誤差で一致することが確かめられた。以上の結果より、本解析法がパラメーターを変えた振動解析や、同手法により解析した座屈解析および振動解析により得られた固有振動モードを用いて行う動的安定解析にも有効であると考えられる。

図-2 は、異方性の異なる 3 種類の材料 (異方性の比較的小さい EGLASS/EP および異方性の強い GRAPHITE/EP, BORON/EP) の配向角の変化による固有振動数の変動を示す。積層数は $L=4$ 、板厚比は $\gamma=100$ の正方形板を示す。縦軸 ω^* は強い繊維方向の板剛度を用いた等方性板の 1 次の固有振動数で無次元化



	EGLASS/EP	GRAPHITE/EP	BORON/EP
1st mode	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
2nd mode	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
3rd mode	(2, 1)	(1, 3)	(1, 3)
4th mode	(2, 2)	(2, 1)	(2, 1)
5th mode	(1, 3)	(2, 2)	(2, 2)

— EGLASS/EP
 - - - GRAPHITE/EP
 - · - BORON/EP

($L = 4, \gamma = 100, \beta = 1.0$)

図-2 固有振動曲線

した無次元固有振動数、横軸 θ は配向角をとり、 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲で計算する。図面の下に示してある表は、配向角 $\theta=0^\circ$ の時の x 軸方向と y 軸方向の半波数を示したものである。配向角の変化により固有振動数が変動する。

これは、異方性が大きい材料で顕著に表われる。また、 x 軸方向の半波数が y 軸方向の半波数よりも小さい固有振動数は、配向角の増加とともに高くなり、 x 軸方向の半波数が y 軸方向の半波数よりも大きい振動数は配向角の増加とともに低くなる。各軸方向の半波数が等しい固有振動曲線は、配向角 $\theta=45^\circ$ で線対称となり、各軸方

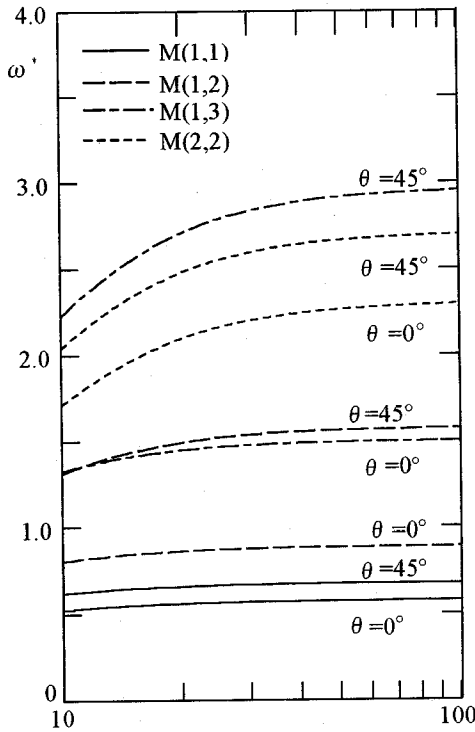


図-3 固有振動数と板厚比の関係 (GRAPHITE/EP, $L=4$)

向に異なる半波数を持つ振動数に比べ振動数の変動は小さい。

なお、積層数 L が大きくなると、振動数は高くなり、配向角の影響が大きくなる。この特性は対称配置についても言え、アングルプライ積層板特有の性質である。

図-3は積層数 $L=4$ の GRAPHITE/EP の正方形板の固有振動数 ω^* と板厚比 γ との関係を示す。板厚比が小さいほど厚い板を意味する。図のように板厚比の影響は、板厚比が小さい領域の高次振動に効いてくる。板厚比が小さいときにせん断変形の影響が現われ、固有振動数を低下させる。

6. 座屈特性

図-4に境界条件が面外全周辺単純支持、面内に対し固定の材料 GRAPHITE/EP, $L=4$, $\gamma=50$ の座屈曲線を示し、図-5に同じ条件の $\gamma=10$ の結果を示す。縦軸 λ_b は座屈固有値、横軸 β は縦横比をとる。板厚比に関係なく、座屈固有値の最大値は、縦横比 $\beta=0\sim 0.8$ では配向角 $\theta=0^\circ$ であり、0.8以上では配向角 $\theta=45^\circ$ である。また、板厚比が小さい場合、縦横比の増加とともに座屈固有値は減少する。しかし、板厚比が大きい場合、面外せん断変形の影響が小さくなり、等方性板の薄

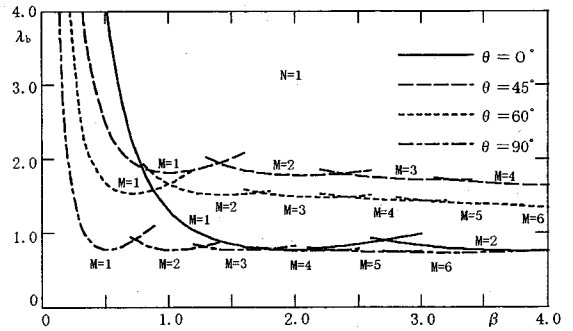


図-4 座屈曲線 (GRAPHITE/EP, $L=4$, $\gamma=50$)

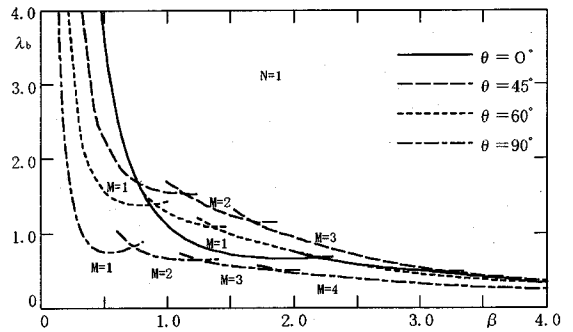
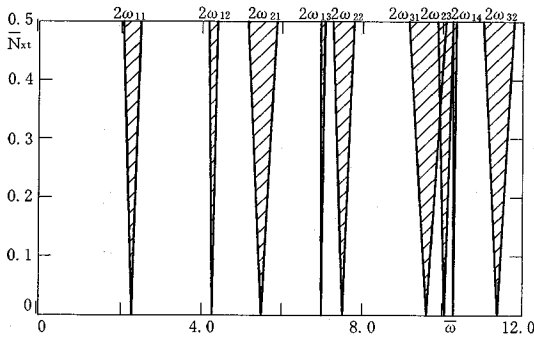


図-5 座屈曲線 (GRAPHITE/EP, $L=4$, $\gamma=10$)

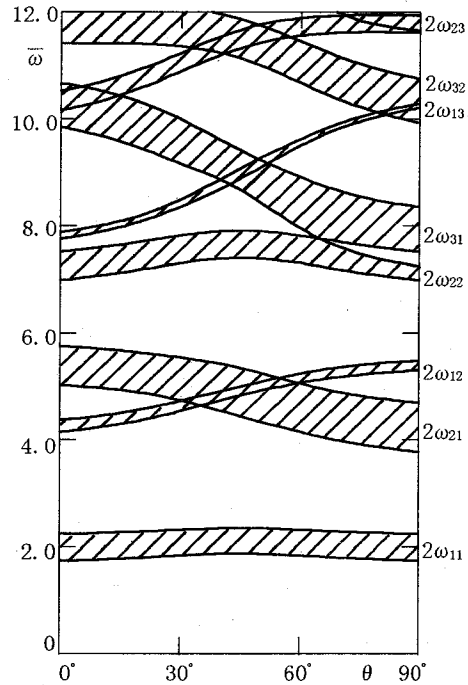
板の場合と同じパターンをもち、各配向角ごとに座屈波形は一定の最小値を持つ。

7. 動的安定特性

図-6, 7に、境界条件が面外全周辺単純支持、面内に対し固定の材料 GRAPHITE/EP, 配向角 $\theta=30^\circ$ の正方形板に作用する変動面内力の変化による動的不安定領域の変動を $L=4$ (逆対称配置), および 3 (対称配置) について示す。なお、静的面内力 \bar{N}_{x0} は作用しないものとする ($\bar{N}_{x0}=0$)。縦軸 \bar{N}_{xi} は、変動面内力 N_{xi} を各積層板の配向角 $\theta=0^\circ$ における座屈面内力 N_{cr} で無次元化した無次元変動面内力の振幅、横軸 ω は励振振動数を配向角 $\theta=0^\circ$ のときの1次の固有振動数 ω_{11} で無次元化した無次元励振振動数である。無次元変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xi}=0.5$ の時に動的不安定領域の幅が、0.1未満のものは無視している。動的不安定領域には、 $2\omega_{ij}/q$ ($q=1, 2, \dots$) で表される単純共振による動的不安定領域と $(\omega_{ij} + \omega_{ki})/q$ ($q=1, 2, \dots$) で表される結合共振による動的不安定領域が存在する。このうち、 $q=1$ を主不安定領域、 $q \geq 2$ を副不安定領域という。図中では右上がりの斜線部が単純共振を示し、右下がりの斜線部が結合共振を示す。図-6に示す逆対称配置では、面内と面外カップリ

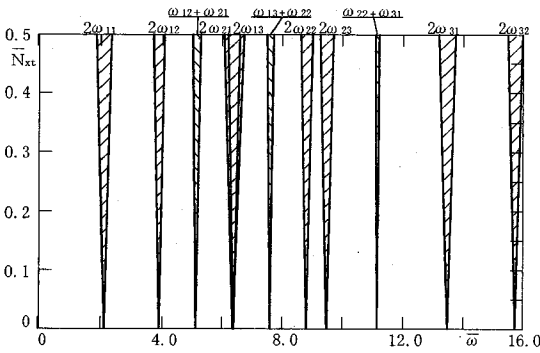


GRAPHITE/EP, $L=4$, $\theta=30^\circ$, $\gamma=10$, $\beta=1$, $\bar{N}_{x0}=0$
 図-6 動的不安定領域 (逆対称配置)



EGLASS / EP, $L=4$, $\gamma=10$, $\beta=1$, $\bar{N}_{x0}=0$, $\bar{N}_{xr}=0.5$

図-8 動的不安定領域の変動

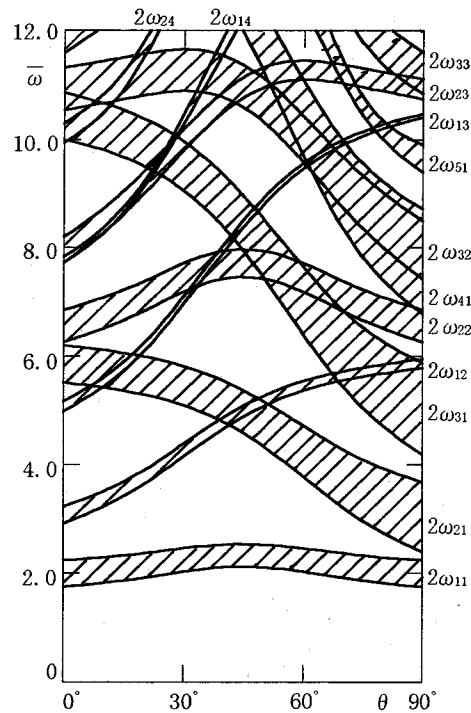


GRAPHITE/EP, $L=3$, $\theta=30^\circ$, $\beta=1$, $\bar{N}_{x0}=0$

図-7 動的不安定領域 (対称配置)

ング剛性 B_{11} , B_{22} の影響により $2\omega_{ij}$ で表わされる単純共振に加え $\omega_{ij} + \omega_{kl}$ で表わされる結合共振の主不安定領域による動的不安定領域が存在する。しかし、非常に狭いため図上には主不安定領域しか表われない。図-7 に示した対称配置の場合⁹⁾にはカップリング剛性はすべて零となるが、曲げねじりカップリング剛性が零ならずこの影響で比較的幅の広い結合共振による動的不安定領域が発生する。したがって、面内と面外のカップリング項の影響は曲げねじりカップリング項よりも小さいことがわかる。

図-8, 9 は、静的面内力 $\bar{N}_{x0}=0$ の場合の材料 EGLASS/EP および GRAPHITE/EP の正方形板について $L=4$, $\gamma=10$ を用いた配向角の変化による $\bar{N}_{xr}=0.5$ における動的不安定領域の変動を示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数、横軸 θ は配向角をとり、 $\theta=0^\circ\sim 90^\circ$ の範囲で計算する。配向角の変化により動的不安定領域は変動し、その変動は、異方性の大きい材料で顕著に表われる。また、 x 軸方向の半波数 i が y 軸方向の半波数 j よりも大きい ($i>j$) 励振振動数の動的不安定領域は、配向角の増加とともに低い振動数領域に移動し、不安定



GRAPHITE / EP, $L=4$, $\gamma=10$, $\beta=1$, $\bar{N}_{x0}=0$, $\bar{N}_{xr}=0.5$

図-9 動的不安定領域の変動

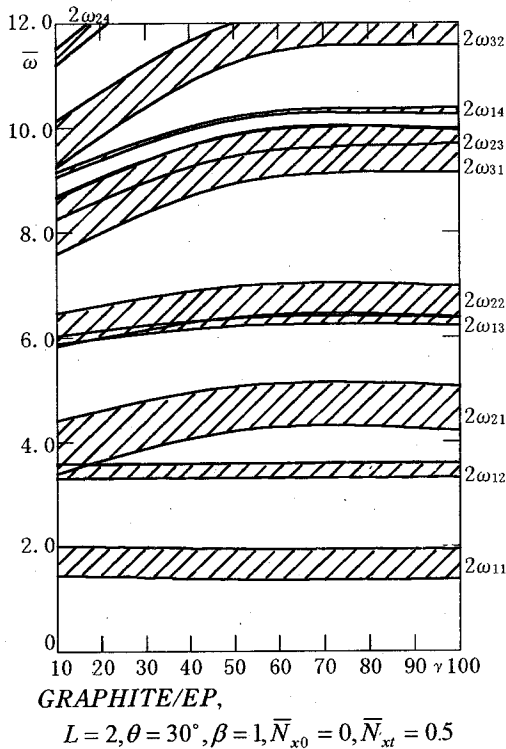


図-10 動的不安定領域の変動

領域の幅は広がる。逆に x 軸方向の半波数 i が y 軸方向の半波数 j よりも小さい励振は、配向角の増加とともに高い振動数領域に移動し、不安定領域の幅は狭くなる。これは、異方性の大きな材料で高次の振動数の動的不安定領域で、顕著に表われる。図-10は、 $\bar{N}_{xt}=0.5$ における $\theta=30^\circ$ の板厚比の変化による動的不安定領域の変動を示す ($\bar{N}_{x0}=0$)。縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数、横軸 γ は板厚比である。無次元励振力 \bar{N}_{xt} および無次元励振振動数 $\bar{\omega}$ はいずれも各材料の配向角 $\theta=0^\circ$ の座屈荷重および固有振動数を用いる。板厚比 γ が比較的小さい $\gamma=50$ までは、板厚比の増加とともに動的不安定領域は高次の振動数領域に移動する。これに伴って、動的不安定領域の幅はわずかに狭くなる。これは、高次の振動数の動的不安定領域で顕著に見られる。板厚比が $\gamma=50$ を越えると各振動数の不安定領域とも変動は小さくなる。

8. 結 論

本論文では、異方性の異なる3種類の材料を用い、逆対称アングルプライ積層した長方形板を対象に面外全周辺単純支持、面内固定の境界条件の場合について固有振動特性、座屈特性および動的安定特性を明らかにした。

(1) アングルプライ積層板は力学的に異方性を示すた

め、配向角の変化により固有振動数、座屈固有値および動的不安定領域が変動する。これは、異方性が大きい材料の、高次の振動数領域で顕著に表われる。これは積層板固有の性質で対称、逆対称配置とも成り立つ。

(2) 板厚比が増加すると、面外せん断変形の影響が小さくなり、固有振動数は高くなる。また、動的不安定領域は高次の振動数領域に移動する。この傾向は、高次の振動数ほど顕著に表われる。

(3) 板厚比が小さい場合、縦横比の増加とともに座屈固有値は減少する。しかし、板厚比が大きい場合、面外せん断変形の影響が小さくなり、各座屈波形ごとに一定の最小値をもつ。

(4) 非対称アングルプライ積層板に、面内と面外カップリング剛性の影響により結合共振による動的不安定領域が発生する。しかし、単純共振に比べ非常に狭く、無視できる。

なお、数値計算には、長崎大学総合情報処理センターのV-1200を使用したことを付記する。

Appendix A 幾何学的境界条件を満足する座標関数

$$W_{mn} = \sin m\pi\xi \sin n\pi\zeta$$

$$U_{mn} = \sin m\pi\xi \cos n\pi\zeta$$

$$V_{mn} = \cos m\pi\xi \sin n\pi\zeta$$

$$\bar{A}_{mn} = \cos m\pi\xi \sin n\pi\zeta$$

$$\bar{B}_{mn} = \sin m\pi\xi \cos n\pi\zeta$$

参考文献

- 1) 島村, 宮入: 複合材料, 実教出版, pp.1-21, 1986.9.
- 2) 三上, 朴, 芳村: 逆対称クロス・アングルプライ積層板の振動特性に及ぼす初期応力の影響, 土木学会北海道支部論文報告集, 平成3年度, pp.233-238, 1991.
- 3) 松本, 鈴木: 対称積層構造材の振動特性解析法の研究, 日本機械学会論文集(C編), 56巻532号, pp.3167-3173, 1990.12.
- 4) 水澤, 鬼頭: スプライン帯板法を用いたアングル・プライ積層円筒パネルの振動解析について, 土木学会第49回年次学術講演会第I部, pp.18-19, 1994.9.
- 5) R.S.Srinivasan and P.Chellapandi: Dynamic Stability of Rectangular Laminated Composite Plates, *Computer & Structures*, Vol.24, No.2, pp.233-238, 1986.
- 6) V. Birman: Dynamic Stability of Unsymmetrically Laminated Rectangular Plates, *Mechanics Research Communications*, Vol.12 (2), pp.81-86, 1985.
- 7) K. Takahashi: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.85, pp.257-262, 1982.
- 8) 江島, 横山, 高橋, 夏秋: 対称積層長方形板の動的安定性, 構造工学論文集, Vol.39 A, pp.13-21, 1993.3.
- 9) 高橋, 江島, 佐藤, 瀬戸: 対称アングルプライ積層長方形板の動的安定性, 構造工学論文集, Vol.41 A, pp.49-58, 1995.3.

- 10) 一ノ宮, 成田, 丸山: FRP 積層長方形板の定常応答, 日本機械学会論文集 (C 編), 55-511, pp. 549-555, 1989. 3.
- 11) T. Kant and Mallikarjuna : Vibration of Unsymmetrically Laminated Plates Analyzed by Using a Higher Order-

Theory with a C° Finite Element Formulation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.134 (1), pp.1-16, 1989.
(1995. 5. 22 受付)

VIBRATION, BUCKLING AND DYNAMIC STABILITY OF ANTI-SYMMETRIC ANGLE-PLY LAMINATED RECTANGULAR PLATES

Kazuo TAKAHASHI, Eiji SATO, Norio MAEDA and Shogo ABIRU

The vibration, buckling and dynamic stability of anti-symmetric angle-ply laminated rectangular plate is studied. The effect of shear deformation is considered. This problem is studied by using Rayleigh-Ritz method and Hamilton principle. The dynamic stability is solved by the harmonic balance method.

Natural frequencies and buckling properties are shown at first for various parameters of the anti-symmetric laminated rectangular plate. The regions of instability which contain simple parametric resonances and combination resonances are discussed.