

薄層要素-離散化波数法を用いた重力場における 弾性固体と圧縮性流体層との連成解析

東平光生¹

¹正会員 工博 東京理科大学講師 理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎2641)

本論文では、薄層要素-離散化波数法を用い、重力場における弾性固体と圧縮性流体層との連成解析手法を展開している。重力の影響を考慮するため、流体領域には、重力場における変位ポテンシャルに関する支配方程式を用い、固体-流体の相互作用方程式についても重力の影響を取り入れている。重力場における固体-流体系の時間領域 Green 関数はこの系における正規モードの重ね合わせで表現される。本論文では半無限弾性体上に分布した薄い流体層のモデルを用い、正規モードに現れる Rayleigh 波ならびに重力波のモードの Green 関数への寄与や固体-流体の相互作用への影響について検討を行っている。

Key Words : thin-layered element method, discrete wave number method, solid-fluid interaction, gravity waves

1. はじめに

著者は一連の研究で、薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の衝撃応答解析手法を示してきた¹⁾⁻³⁾。この中で、前論文³⁾では、固体-流体間を伝播する表面波動の解明という問題設定の下で、圧縮性流体層を含む成層弾性体の Green 関数を誘導した。そこでは、圧縮性流体層の支配方程式に圧力に関するスカラー場の波動方程式を用いることで、流体層の影響が比較的容易に取り入れられることを示している。ただし、前論文では固体-流体波動場への重力の影響については論じていない。

一方、圧縮性流体層に対して重力の影響を問題にしなければならない場合も存在する。その一例としては、軟弱地盤が大地震によって流動化し、重力に基づく波動が生じる場合が挙げられる。1960年のChilie地震においては、弾性波とは異なる短い波長(10-30 m)の速度の遅い波動が目撃され、これが重力波ではないかと指摘されている⁴⁾。こうしたケースでは、軟弱地盤は固体よりもむしろ流体として扱うべきであり、GarciaとBardも1985年のMexico地震の非常に長い継続時間を有する地震記録の解釈を流体中の重力波に求め、数値計算を行っている⁵⁾⁶⁾。

本研究は、弾性体上に分布した圧縮性流体層の重力波の計算のための Green 関数を求めるという観点で、重力場における弾性固体と圧縮性流体層の連成解析手法を展開する。ここで用いる手法は薄層要素-離散化波数法である。この手法を用いる理由は、Green 関数が正規モードの重ね合わせで表現されるため、重力波のモードや Rayleigh 波のモードの Green 関数への寄与の大きさ

やこれらのモードと固体-流体の相互作用の関係が明らかになるためである。本論文では、Green 関数のこの性質を用いて、固体-流体の相互作用と重力波との関係を明らかにすることが目的である。

2. 重力場の固体-流体の連成解析のための薄層要素-離散化波数法

(1) 基礎方程式

前論文³⁾と同様、ここでも議論の出発点を明確にするため、基礎方程式を与えることから始める。以下の議論では、方程式はすべて3次元空間で考える。

固体については、次の弾性波動方程式を用いる。

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla^2 \mathbf{u} - \rho\partial_t^2 \mathbf{u} = -\mathbf{f} \quad (1)$$

ここに、 λ , μ は Lamé の定数、 ∇ は勾配演算子、 ρ は質量密度、 \mathbf{u} は固体の変位場、 \mathbf{f} は固体に作用する物体力場を示す。また、 ∂ は偏微分の演算子で下付きの添字で偏微分を行うことを示す。重力場での議論を厳密に行うためには、固体の支配方程式にも重力の影響を組み入れるべきである。しかし、扱う弾性波の波長が通常の Rayleigh 波の波長と同程度の場合には支配方程式から重力の影響を取り除ける⁷⁾ことを用い、重力の影響は無視することにする。

静止した過去を持つ理想流体が、一様重力場におかれるとき、支配方程式は Lamb によって次のように与えられている⁸⁾。

$$\rho_0 \partial_t^2 \varphi = \kappa \nabla^2 \varphi - \rho_0 g \partial_z \varphi \quad (2)$$

ここに、 ρ_0 は流体の質量密度、 φ は変位ポテンシャル、 κ

は体積弾性率, g は重力加速度, z は鉛直上向きの空間座標を示す。

なお, Lambはその著書で一樣物体力場にある圧縮性流体の支配方程式を速度ポテンシャルを用いて表している。しかしここでは, 速度ポテンシャルに関する支配方程式を変位ポテンシャルに読み替えて式(2)を用いている。これは, 流体が微小振幅の運動を行うと仮定するので, 流体力学で用いる微分演算子⁸⁾ D/Dt は $\partial/\partial t$ に置き換えることができることによる。すなわち, 流体粒子の速度を変位から求めるためには, 変位に通常の時間に関する偏微分演算を施せばよい。これより, 流体の速度ポテンシャル $\dot{\varphi}$ と φ の関係は次式となる。

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi \quad (3)$$

ここでは静止した過去を前提条件とするから, 式(3)を満足する変位ポテンシャルについては, 積分定数による任意性はない。したがって, 速度ポテンシャルに関する支配方程式を変位ポテンシャルによる式に読み替えることが可能となる。

Lambが与えた速度ポテンシャルと圧力の関係式⁸⁾より, 変位ポテンシャルと圧力の関係式が次のように導かれる。

$$p = -\rho_0 \partial_t^2 \varphi - \rho_0 g \partial_z \varphi \quad (4)$$

ここに, p は流体圧力である。

固体と流体の境界面では固体と流体が相互作用を行う。固体と流体の境界面の法線方向の変位は等しいので次式が成立する。

$$n \cdot \nabla \varphi = n \cdot u \quad (5)$$

ここに, n は固体と流体の境界面の法線ベクトルで, その向きは固体から見て, その外側取るものとする。

また, 固体の表面力と流体圧力は釣り合うので, 次式が成立する。

$$\sigma + \rho g n \cdot u = -np \quad (6)$$

ここに, σ は弾性変形によって生じる固体の表面力ベクトルである。また, 式(6)の左辺第2項は重力によって生じる表面力ベクトルの増分である。式(6)は成層構造のように重力の作用する方向と境界面の法線ベクトルが平行の場合に得られる方程式である。なお, 式(6)の左辺第2項のうち, $n \cdot u$ は鉛直方向の変位成分を意味するから, $\rho g n \cdot u$ は固体の変位が重力によって表面力の増分となることを示している。

(2) 重力場での固体-流体連成系の薄層要素-離散化波数法

まず, 前論文と同様に, 固体変位場, 物体力場および流体の変位ポテンシャルを次のように展開する。

$$u(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [R_{k_n}^m(r, \phi) U_{z k_n}^m(z, t) + S_{k_n}^m(r, \phi) U_{r k_n}^m(z, t) + T_{k_n}^m(r, \phi) U_{\phi k_n}^m(z, t)] \quad (7)$$

$$f(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [R_{k_n}^m(r, \phi) F_{z k_n}^m(z, t) + S_{k_n}^m(r, \phi) F_{r k_n}^m(z, t) + T_{k_n}^m(r, \phi) F_{\phi k_n}^m(z, t)] \quad (8)$$

$$\varphi(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{k_n}^m(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \quad (9)$$

ここに, r, ϕ および z は円筒座標系の座標成分, k_n は離散化波数, m は ϕ に関する Fourier 成分の次数である。また, R, S および T は surface vector harmonics であり, その具体的な形については Olson らの論文⁹⁾で与えられている。さらに,

$$Y_{k_n}^m(r, \phi) = J_m(k_n r) \exp(im\phi) \quad (10)$$

であり, $J_m(k_n r)$ は第1種の Bessel 関数である。

弾性波動方程式を surface vector harmonics で展開し, その方程式に薄層要素法を適用することで, 次の形式の方程式を得る。

$$\left[[M_s] \frac{d^2}{dt^2} + [K_s] \right] \{U_{k_n}^m\} = \{F_{k_n}^m\} \quad (11)$$

ここに, $[M_s], [K_s]$ は質量および剛性マトリックスで, 添字の s は固体領域を表すのに用いられている。また, マトリックス $[K_s]$ は離散化波数の値に応じて成分を変化させる。ベクトル $\{U_{k_n}^m\}$ および $\{F_{k_n}^m\}$ は変位場および物体力場の surface vector harmonics の係数をベクトル化したものである。

同様に, 流体領域では, 薄層要素法による方程式は以下のようなになる。

$$\left[[M_f + \nu] \frac{d^2}{dt^2} + [K_f] \right] \{\Phi_{k_n}^m\} = \{G_{k_n}^m\} \quad (12)$$

ここに, $[M_f], [K_f]$ は質量および剛性マトリックスで, 添字の f は流体領域を表すのに用いられている。また, ベクトル $\{\Phi_{k_n}^m\}$ および $\{G_{k_n}^m\}$ は変位ポテンシャルおよびその勾配に関連したベクトルである。

マトリックス $[\nu]$ は流体の自由表面の境界条件に関連して現れる付加質量マトリックスである。流体自由表面では, 流体圧力がゼロとなるので, 式(4)より, ポテンシャルの勾配は次式で表せる。

$$\partial_z \Phi_{k_n}^m(z, t) = -\frac{1}{g} \partial_t^2 \Phi_{k_n}^m(z, t) \quad (13)$$

したがって, $[\nu]$ の成分は次式となる.

$$[\nu] = \text{diag.} \left[0 \dots 0, \frac{\kappa}{g}, 0 \dots 0 \right] \quad (14)$$

ここに, i は流体自由表面の節点番号を示す.

式(12)を構成する要素マトリックスは次式で示される.

$$[M_f]^e = \frac{\rho_0 h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K_f]^e = \frac{\kappa k_n^2 h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\kappa}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\rho_0 g}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここに, 添字の e は要素マトリックスであることを示す.

また, h は薄層要素の層厚である.

固体および流体領域の薄層要素方程式を結合するために, 固体-流体の境界面における相互作用方程式も波数領域で考える. まず, 流体と固体の鉛直変位の連続条件は次式で示される.

$$\partial_z \Phi_{k_n}^m(z, t) = U_{z k_n}^m(z, t) \quad (17)$$

また, 固体表面力と流体圧力の釣り合いは次式となる.

$$\begin{aligned} & (\sigma_{z k_n}^m(z, t) + \rho g U_{z k_n}^m(z, t)) R_{k_n}^m(r, \phi) \\ & = (-\rho_0 \partial_t^2 \Phi_{k_n}^m(z, t) - \rho_0 g \partial_z \Phi_{k_n}^m(z, t)) Y_{k_n}^m(r, \phi) n \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, $\sigma_{z k_n}^m(z, t)$ は表面力ベクトルの $R_{k_n}^m(r, \phi)$ 成分である.

以上の相互作用方程式をそれぞれの領域の薄層要素方程式に組み入れると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left[[M_s] \frac{d^2}{dt^2} + [K_s] \right] \{ U_{k_n}^m(t) \} \\ & = \rho_0 [\alpha] \frac{d^2}{dt^2} \{ \Phi_{k_n}^m(t) \} - g(\rho - \rho_0) [\beta] \{ U_{k_n}^m(t) \} \\ & \quad + \{ F_{k_n}^m(t) \} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left[[M_f + \nu] \frac{d^2}{dt^2} + [K_f] \right] \{ \Phi_{k_n}^m(t) \} \\ & = -\kappa [\alpha]^T \{ U_{k_n}^m(t) \} + \{ G_{k_n}^m(t) \} \end{aligned} \quad (20)$$

ここに, $[\alpha]$ および $[\beta]$ は固体と流体の相互作用を表すマトリックスでその成分は次のようになる.

$$[\alpha] = \begin{matrix} & i & & j \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \dots & +1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (21)$$

$$[\beta] = \text{diag.} \left[0 \dots +1 \dots \dots 0 \right] \quad (22)$$

ここに, i は固体と流体の境界面における固体の鉛直変位の自由度を表す番号, j はこの境界面における流体側の節点番号を示す. 式(19)と式(20)を結合することで次式を得る.

$$\left[[M] \frac{d^2}{dt^2} + [K_{k_n}^m] \right] \begin{Bmatrix} U_{k_n}^m(t) \\ \Phi_{k_n}^m(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{k_n}^m(t) \\ G_{k_n}^m(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ここにマトリックス $[M]$ と $[K_{k_n}^m]$ は以下のとおりである.

$$[M] = \begin{bmatrix} M_s & -\rho_0 \alpha \\ 0 & M_f + \nu \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[K_{k_n}^m] = \begin{bmatrix} K_s + g(\rho - \rho_0) \beta & 0 \\ \kappa \alpha^T & K_f \end{bmatrix} \quad (25)$$

式(25)の左辺で添字の m と k_n をつけたのは, 剛性マトリックスがこれらの添字の関数であることを強調するためである.

前論文と同様な方法を適用すれば, 式(23)の解は以下ようになる.

$$\begin{Bmatrix} U_{k_n}^m(t) \\ \Phi_{k_n}^m(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t [V_{k_n}^m] [\Lambda_{k_n}^m(t - \tau)] [V_{k_n}^m]^{-1} \times [M]^{-1} \begin{Bmatrix} F_{k_n}^m(\tau) \\ G_{k_n}^m(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \quad (26)$$

ここに, $[V_{k_n}^m]$ は $[M]^{-1} [K_{k_n}^m]$ に対するモーダルマトリックスであり, $[\Lambda_{k_n}^m(t - \tau)]$ は正規モードの時間変動を記述する対角マトリックスである.

式(26)を離散化波数法を用いて重ね合わせることで重力場における固体-流体連成系の時間領域解を得ることができる. この解は以下のように示すことができる.

$$\begin{Bmatrix} u(r, \phi, t) \\ \varphi(r, \phi, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{k_n}^m(r, \phi)] \times \int_0^t [V_{k_n}^m] [\Lambda_{k_n}^m(t - \tau)] [V_{k_n}^m]^{-1} \times [M]^{-1} \begin{Bmatrix} F_{k_n}^m(\tau) \\ G_{k_n}^m(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \quad (27)$$

ここに $[C_{k_n}^m(r, \phi)]$ surface vector harmonics および $Y_{k_n}^m(r, \phi)$ を成分とするマトリックスで波数領域の解を空間領域に変換する役割を持っている.

3. 数値計算例

(1) 解析モデル

ここでは, Fig. 1 に示す解析モデルを用いて数値計算を行う. Fig. 1 に示す解析モデルは半無限弾性体上に30 mの水深を持つ流体層が分布したものであり, Garcia と Bard⁵⁾⁶⁾ が Mexico 地震での重力波の存在を

検討したモデルを参考にしている。Fig. 1の流体層の質量密度は $\rho_f = 1.2 \text{ g/cm}^3$ 、音速を $c = 1.5 \text{ km/s}$ とする。流体の音速を考慮すれば、流体層の水深30 mは、かなり薄いものであると言える。また、半無限弾性体の質量密度は $\rho_s = 2.0 \text{ g/cm}^3$ 、S波の伝播速度は 0.5 km/s 、P波の伝播速度は 1.5 km/s とする。また、固体表面から深さ1.0 kmの位置に鉛直上向きに作用する階段関数で表される時間関数を持つ点振源を与えることにする。

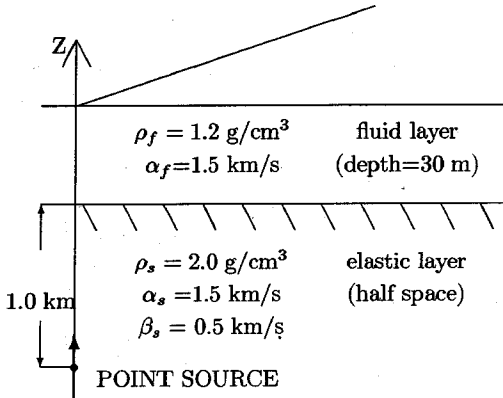


Fig. 1. Layered solid-fluid model.

Table 1 Thickness of the thin-layered elements in the solid

depth (km)	thickness of the elements (km)
0.0-0.1	0.01
0.1-0.2	0.02
0.2-0.4	0.05
0.4-1.0	0.1
1.0-2.0	0.2
2.0-5.0	0.25
5.0-10.0	1.0
10.0-20.0	2.5
20.0-40.0	5.0
40.0-60.0	10.0

薄層要素の層厚の設定に関しては、流体層では1 mとする。このような、細かい層厚を採用した理由は流体のポテンシャルの空間微分で流体の変位や圧力を求める際、数値微分による精度の低下を極力抑えるためである。また、固体部分の薄層要素分割で考慮すべきことは前論文³⁾で述べたことと全く同一である。固体部分の薄層要素の層厚をTable 1に示す。ここでは、正規モードを求めるための仮定の剛基盤を固体表面から深さ60 kmに設定する。これによって、仮定の剛基盤からの反射

P波が固体表面に到達しないTime-windowは約80 sec.となる。

(2) 固有値解析結果

まずはじめに、固有値解析によって正規モードが正確に求められているかどうかの検討を行う。定式化からも明らかなように、ここでは非対称マトリックスの固有値解析を行う必要がある。固有値解析には、前論文³⁾で述べたように、非対称マトリックスをヘッセンベルクマトリックスに変換してからダブルQR法を適用する方法¹⁰⁾を用いる。

固有値解析に基づく正規モードの分散曲線をFig. 2に示す。Fig. 2に示す分散曲線は正規モードの振動数と位相速度の関係である。ここで位相速度は固体S波の伝播速度で除して無次元化している。

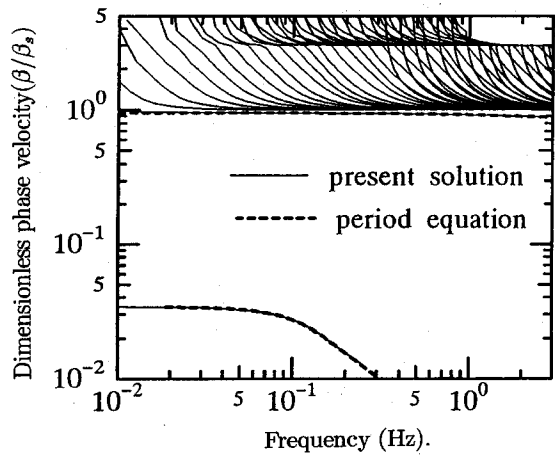
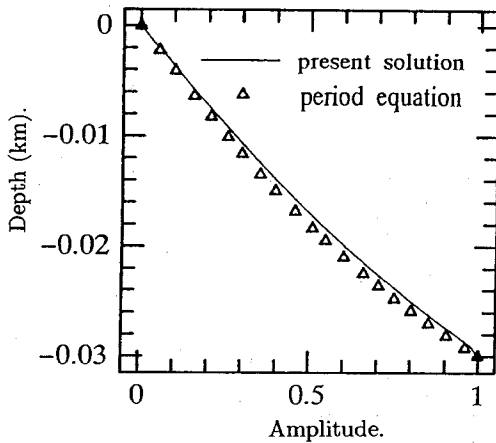
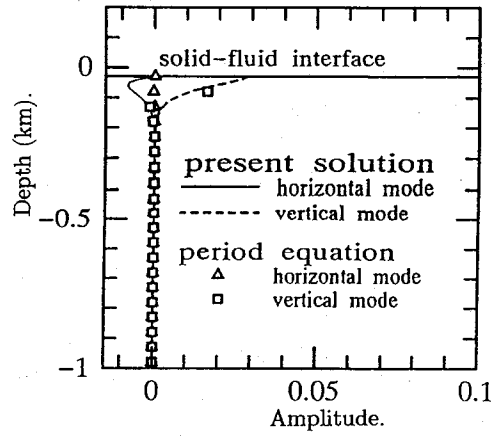


Fig. 2 Dispersion curves of the normal modes.

Fig. 2より明らかなように、正規モードの大部分は固体のS波とP波のところで折れ曲がり1本の直線を形成している。これは、分散性の正規モードの重ね合わせによって、非分散性の実体波が合成されるメカニズムを表すと同時に、大部分の正規モードが実体波の合成に関与することも示している。これらの正規モードの中で、2つの正規モードだけがS波の位相速度よりも小さくなることを示している。位相速度がS波の速度よりも小さくなる正規モードの内、一つの正規モードはS波の位相速度よりもわずかに小さい。このモードは半無限弾性体で定義されるRayleigh波の位相速度に近く固体-流体連成系のRayleigh波のモードを与えている。そして、もう一つのモードは位相速度ならびに振動数が非常に小さいところに位置しており、Rayleigh波とは別のモードである。振動数がゼロに近いところでのこのモードの位相速度は $\sqrt{gH}/\beta_s = 0.034$ にほぼ等しく、重力波のモードであることを示している。ただし、ここに H は水

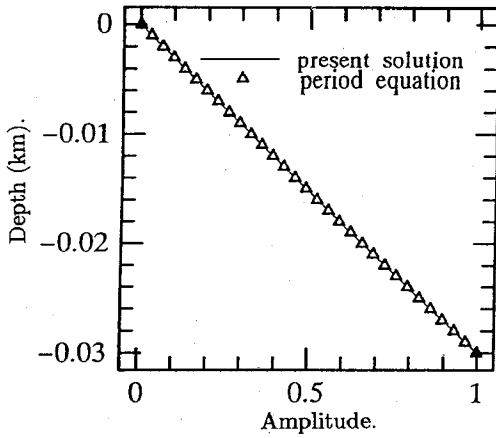


(a) fluid pressure

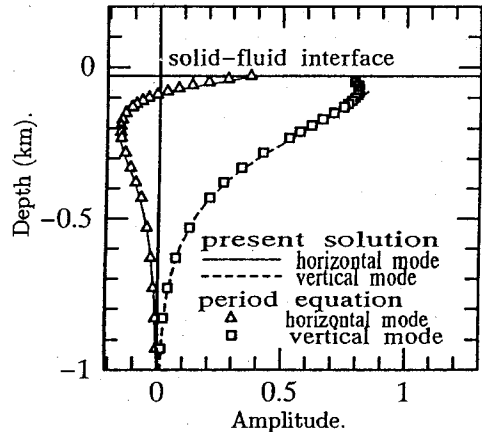


(b) solid displacement

Fig. 3 Modal shapes for the gravity wave mode (0.1 Hz).



(a) fluid pressure



(b) solid displacement

Fig. 4 Modal shapes for the Rayleigh wave mode (1.0 Hz).

深を示す。

振動数がゼロに近いところでの重力波の位相速度を与える式 $c = \sqrt{gH}$ は、付録で述べたように流体の圧縮性と弾性固体の変形を無視して得られるものである。したがって、ここで得られた重力波のモードでは固体-流体の相互作用は小さく、流体の圧縮性もほとんど問題にならないと推測できる。

また、Rayleigh 波ならびに重力波のモードが正確に求められていることを示すために、付録で述べた特性方程式から得られる解を分散曲線に重ね描きしている。これらから、Rayleigh 波と重力波のモードは共に正確に求められていることが分かる。

なお、定式化で示したように、ここでも前論文³⁾と同様、非対称マトリックスの固有値解析から正規モードを計算している。一般に、非対称マトリックスの固有値は複素数となるが、ここで得られた固有値はすべて実数で

ある。これは媒質に減衰を考慮しない場合の正規モードの物理的要請とも一致している。

なお、前論文³⁾では固体-流体連成系の Rayleigh 波のモードが多数(可算個)得られることを述べたが、ここで得られた Rayleigh 波のモードは一つだけである。これは付録で述べたように、流体の音速よりも固体 S 波が小さい場合の特性方程式の性質に基づくものであり、得られる Rayleigh 波のモードは基本モードだけである。

次に、Fig. 3 および Fig. 4 に固有値解析から得られた固体-流体連成系のモード形状を示す。ここで、流体のモードについては、物理的な意味が明確な圧力を用いて示している。また、流体圧力と弾性固体の変位振幅の相対的な大小関係が明確になるよう、流体圧力の最大値が 1 となるように、流体圧力と固体変位振幅を正規化している。

Fig. 3 は 0.1 Hz の重力波のモードである。このモー

ドでは流体が大きく振動する一方、固体は固体-流体の境界面近くで局所的に小さく振動するほかは、ほとんど振動しない。また、流体圧力は流体自由表面でゼロであり、固体-流体の境界面で最大振幅1をとる。重力波のモードでは固体-流体の相互作用は非常に小さく、流体重力波は固体にほとんど影響を及ぼさないことが分かる。この相互作用の性質は前述の分散曲線を用いて行った重力波の検討で述べたことと一致する。

Fig. 2の分散曲線からも明らかなように、重力波は非常に小さな振動数によって特徴付けられている。このため、式(4)より流体圧力のモードに寄与するものは、流体の圧縮性に基づく変形よりもむしろ重力である。また、モード形状は流体圧力の振幅が大きいても固体のわずかな変形で固体-流体の力の釣りが保たれることを示している。固体のわずかな変形で流体圧力と釣り合うためには大きな波数が必要である。重力波の位相速度はこのため小さなものになる。固体-流体の相互作用が小さいことと位相速度が小さいことは表裏一体である。

Fig. 3には、付録で示した特性方程式から得られる振動モード形状も合わせてプロットしている。特性方程式から得られる振動モードと本手法による振動モードは良く一致しており、本手法により振動モードが正確に求められていることが分かる。

Fig. 4は1.0 HzのRayleigh波の振動モードである。重力波とは異なり、Rayleigh波では固体と流体の相互作用は大きい。Rayleigh波は重力による復元力に基づく波動ではなく、弾性変形に基づく固体-流体の力の釣りに基づく波動であることがその理由である。Fig. 4のモード形状にも特性方程式から求められるモード形状を合わせてプロットしている。ここでも、特性方程式から求められるモード形状と本手法による結果は良好に一致していることが分かる。

(3) 時刻歴応答解析

固有値解析結果から、重力場における固体-流体連成系の固有振動数ならびに振動モード形が正確に求められていることが分かった。また、重力波とRayleigh波のモード形状の違いも明らかとなった。以上の結果を受けて、正規モードを重ね合わせ時刻歴応答解析を行う。ここでの時刻歴応答解析は流体自由表面の変形に着目して行う。このため、まず流体自由表面の変位に寄与する重力波とRayleigh波の変位振幅の大きさの概略をつかむことにする。

Fig. 5に重力波とRayleigh波の伝達関数を示す。Fig. 5の横軸はそれぞれの波動の振動数を示し、縦軸は固体-流体の境界面に鉛直上向きに単位階段関数で表される荷重を加えた場合の流体自由表面の波動の振幅

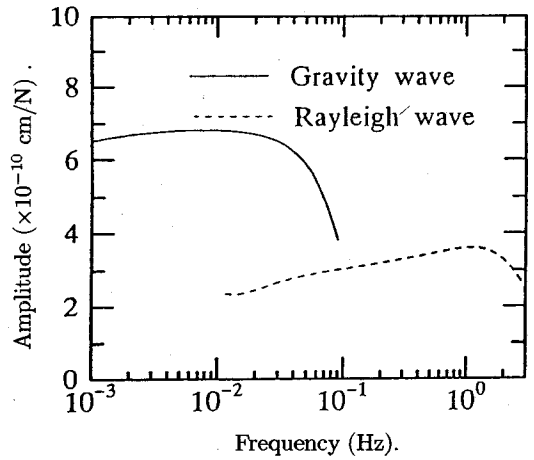


Fig. 5 Amplitude spectra.

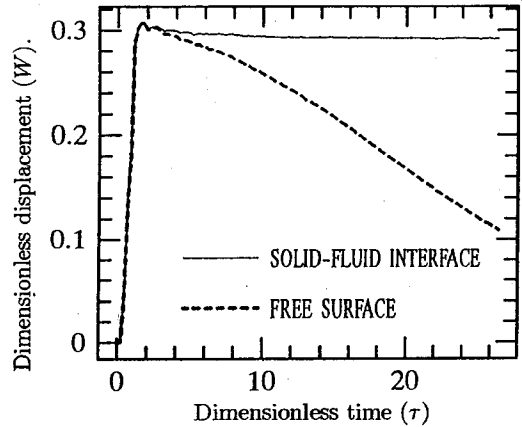


Fig. 6 Comparison of displacement ($\Delta = 0.05$ km).

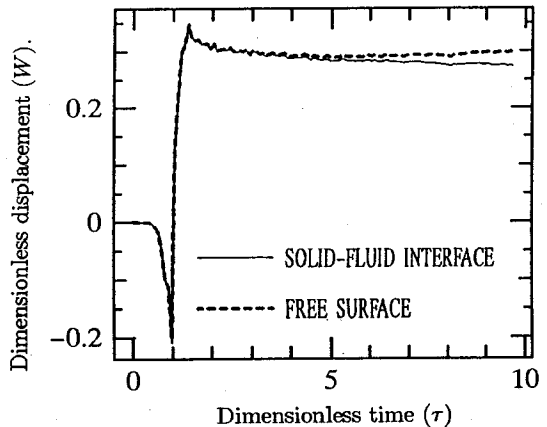
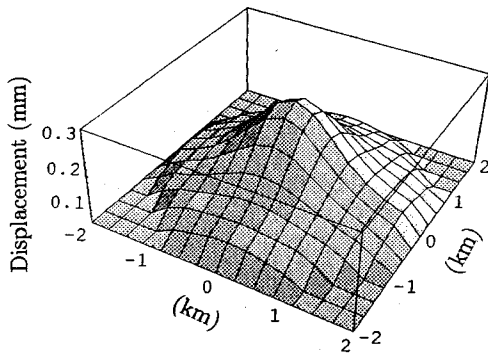
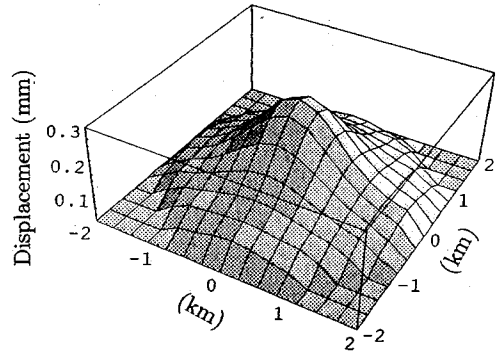


Fig. 7 Comparison of displacement ($\Delta = 2.9$ km).

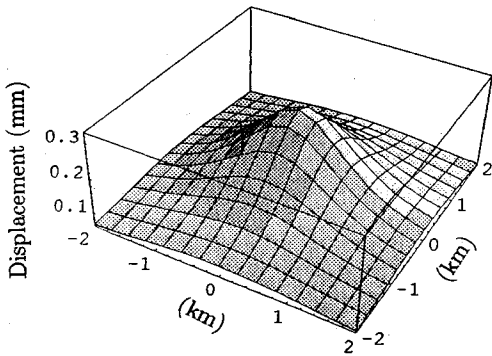


(a) Free surface.

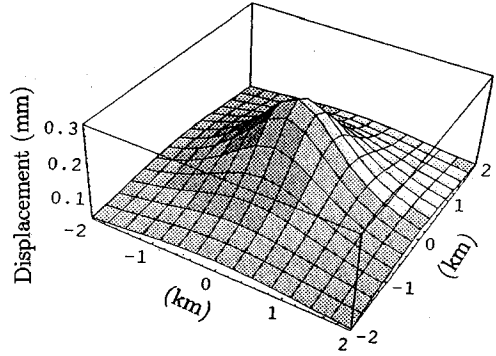


(b) Solid-fluid interface.

Fig. 8 Displacement snapshots (5.0sec.).



(a) Free surface.



(b) Solid-fluid interface.

Fig. 9 Displacement snapshots (10.0sec.).

を示している。この伝達関数は式(26)を用いて合積演算を行った結果である。式(26)で得られる解は波数領域のものであるが、Fig. 5では重力波とRayleigh波の分散性より波数から振動数を定めている。

Fig. 5の伝達関数によれば、重力波の振幅は0.03 Hz近傍の非常に低い振動数でピークをむかえ、それ以上の振動数になると急激に減少する。また、Rayleigh波の増幅特性は1 Hz前後でピークを有するものの重力波の増幅特性に比べれば低くフラットである。流体自由表面の変位に寄与するものは、1 Hz前後ではRayleigh波であり、非常に低い振動数領域では重力波である。

次に、流体自由表面と固体-流体境界面における鉛直変位時刻歴をFig. 6およびFig. 7に示す。図中の Δ は振源からの水平距離を示す。また、図中の実線は固体-流体の境界面の変位を、破線は流体自由表面の変位を示している。

時刻歴の時刻ならびに変位は次のようにPekeris¹¹⁾に

ならい無次元化している。

$$\tau = \frac{crt}{L}, \quad W = \frac{\pi^2 \mu L}{3F} w \quad (28)$$

ここに、 τ は無次元の時刻、 L は振源と観測点との距離、 W は無次元の鉛直変位、 w は実際の鉛直変位、 F は振源の荷重の大きさを示す。ここでは、無次元時刻の1はS波の到着時刻になっていることに注意する。

なお、Fig. 6およびFig. 7では時間を無次元化したため、時間軸のスケールが異なっている。しかし、これらの図では60 sec.まで解析を行った結果を示している。

Fig. 6においては、S波到着後のRayleigh波による時刻歴の急激な変動は見られない。これは観測点が振源に近くRayleigh波が発生していないことを示す。また、S波到着前までの流体自由表面の変位は固体-流体境界面の変位に等しい。これは、固体実体波の伝播に伴う固体の動きに流体が追随するためである。しかし、S波到着後、固体-流体境界面の変位と流体自由表面の変位は異なる挙動を示すようになる。

すなわち、固体-流体の境界面の変位はわずかな減少

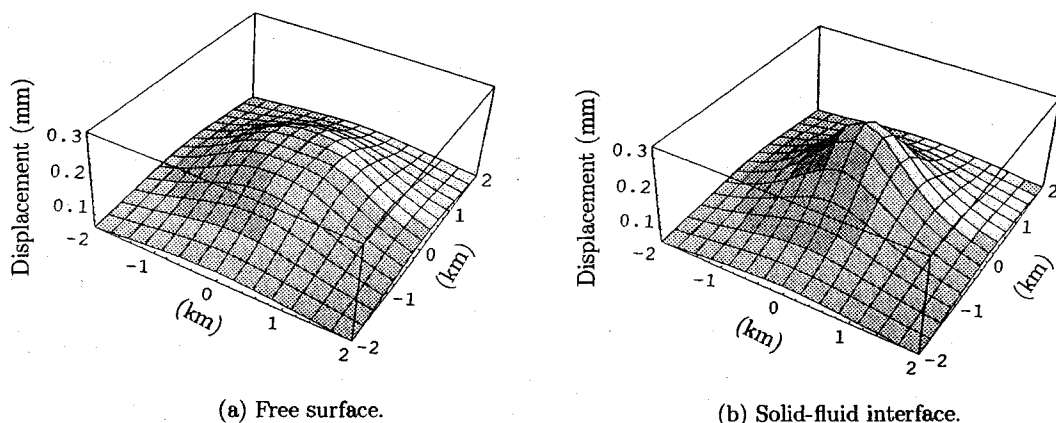


Fig. 10 Displacement snapshots (30.0sec.).

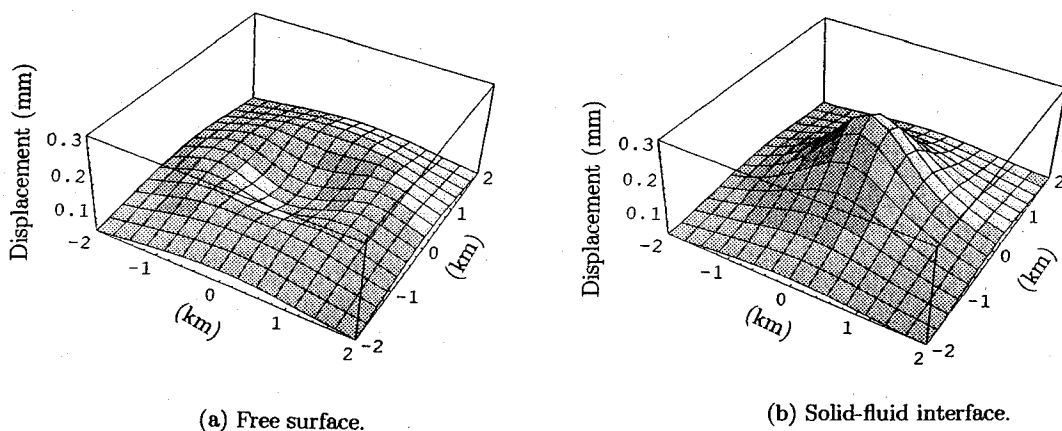


Fig. 11 Displacement snapshots (60.0sec.).

を見せる一方、流体自由表面の変位は大きく減少する。流体自由表面の変位の大きな減少は重力波によるものと考えられるが詳細な考察は後述する。

Fig. 7 においては、S波のみならずRayleigh波の影響が見られるようになる。ここではRayleigh波到着前までは流体自由表面の変位は固体-流体の自由表面の動きに追随している。そして、Rayleigh波到着後二つの時刻歴は異なる挙動を示す。すなわち、流体自由表面の変位は緩やかに減少するものの、固体-流体の境界面の変位の減少に比べればほぼ一定である。

Fig. 6とFig. 7を比較することで、Fig. 7では流体自由表面の大きな変位の減少が見られないことが分かる。これは後述するように解析時間内に重力波の影響が及ばないためである。

通常、階段関数で表される時間関数を持つ振源を与えた場合、時刻歴はS波やRayleigh波が到着した後、永久変位に収束し、変位は減少することはない。しかし、ここで得られた時刻歴は永久変位にとどまることなく、減

少する傾向を示している。これは、流体の支配方程式や固体-流体の相互作用方程式に重力を考慮したことで、重力の効果が現れていることによる。

なお、前述のように固体-流体の境界面の変位が急激に変動する間は、この変位に流体の変位は追随した。このことは、流体の圧縮性がほとんど現れていないことを示す。流体の音速が流体の層厚に比べ非常に大きいため流体の圧縮が見られないと考えられる。

最後に、各時刻における固体表面および流体自由表面の鉛直変位分布図をFig. 8からFig. 11に示す。ここでは、振源の直上の座標を(0,0)にとっている。そして振源で与えた荷重が 1.0×10^8 kNのときの変位をmmの単位で示している。

Fig. 8およびFig. 9によると時刻5 sec.および10 sec.では流体自由表面の変位が固体-流体の境界面の変位に追随して動くことが良く分かる。一方、Fig. 10に示すように時刻が30 sec.になると、固体表面では変位分布がそれほど変化が見られないのに対し、流体自由表

面では中央部がつぶれ始めることが分かる。前述のように、重力の影響を考慮しなければ生じない現象であり、重力の効果が現れている。特に、中央部の変位は周囲に比べて大きいので、重力の効果で初期の形状を保ちにくい状況が理解できる。

Fig. 11 に示すように解析時刻が 60 sec. になると流体自由表面中央部は初期の形状が完全に崩れている。そして、その影響が周囲に波及し波動として伝播をはじめている。この波動は重力によって生じており、いわゆる重力波である。Fig. 6 の流体自由表面の大きな変位の減少は、これまで見てきた中央部の形状の崩れに対応した重力波の生成のプロセスで起きたものである。また、Fig. 7 の流体自由表面の変位に大きな減少が見られなかった理由は、重力波の影響がまだ及んでいないためであると理解できる。

Fig. 8 から Fig. 11 より明らかなように、重力波の現象は弾性波に比べて非常にゆっくりとしたものである。これは分散曲線からも分かるように重力波が弾性波のモードと比べ非常に低い振動数と低い位相速度を持つことに対応している。また、重力波の現象は重力によって初期の自由表面の形状が崩れてゆく過程であると捕えることも可能であろう。

4. 結論

本論文では、薄層要素-離散化波数法を用いて、重力場における弾性固体と圧縮性流体層との連成解析手法を展開した。そして、その手法の妥当性を検証するために、半無限弾性体上に分布する薄い圧縮性流体層の解析を行った。

手法の定式化からも明らかなように、重力場における固体-流体連成系の Green 関数は正規モードの重ね合わせによって前論文³⁾で示したものと同一の形式で得られた。しかしながら、数値計算結果には重力波のモードが現れ、Rayleigh 波と重力波の性質の比較が可能になった。数値計算結果から得られる結論をまとめると次のようになる。

- 1) 重力波のモードは弾性波のモードと比べ、非常に低い振動数と位相速度によって特徴づけられる。そして、固体-流体の相互作用は非常に小さく、流体の運動が卓越している。また、流体の圧縮性も重力波にはそれほど影響を及ぼさないと考えられる。
- 2) 一方、Rayleigh 波は固体と流体の変形に伴う弾性的な復元力に基づく波動で固体-流体の相互作用も大きくなっている。分散曲線上においても Rayleigh 波と重力波は互いに離れた位置にあり、二つの波動は異質なものである。

3) 流体の音速に比べ、層厚が薄い流体層では流体自由表面の変位は固体表面が急激な変動を示す場合にはその動きに追従する。これは、流体層がほとんど非圧縮性流体として振る舞うためである。

4) 今回の数値計算では、初期の流体自由表面の形状が崩れて行く過程を重力波の伝播とみなすことができた。初期の流体自由表面の形状は実体波や Rayleigh 波によって作られていることから、実体波や Rayleigh 波の伝播が重力波の生成に寄与したと考えることもできる。

付録

重力場における固体-流体系波動場の特性方程式は本文で示した基礎方程式と境界条件から誘導することができる。誘導のプロセスは標準的な方法を用いれば良く、その過程は Ewing のテキスト⁷⁾にも詳細に述べられている。したがって、ここでは誘導過程を省略し、誘導された特性方程式をここに直接記述する。そして、本文で論じた事項と関連することについて補足説明を行う。まず、重力場における固体-流体系波動場の特性方程式は次のように表せる。

$$\begin{aligned} & \left\{ (2p^2 - 1)^2 - 4p^2 \xi \zeta - \frac{gk}{\omega^2} \frac{\xi}{p} \right\} \\ & \times \left\{ 1 - \left(\frac{gk^2}{\omega^2} - \frac{g}{2\alpha_f^2} \right) \frac{\tan \eta H}{\eta} \right\} \\ & + \frac{\rho_0}{\rho} k_\beta \xi \left\{ 1 - \left(\frac{gk}{\omega^2} \right)^2 \right\} \frac{\tan \eta H}{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ここに、 ρ_0 および ρ は流体および固体の質量密度、 k は正規モードの波数、 ω は角振動数、 α_f は流体の音速である。また、その他の変数は次のように定義されている。

$$\begin{aligned} p &= k/k_\beta \\ k_\beta &= \omega/\beta_s \\ \xi &= \sqrt{p^2 - \alpha_s^{-2}} \\ \zeta &= \sqrt{p^2 - \beta_s^{-2}} \\ \eta &= \sqrt{k_{\alpha_f}^2 - k^2 - 0.25g^2 \alpha_f^{-4}} \\ k_{\alpha_f} &= \omega/\alpha_f \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ただし、 α_s および β_s は固体の P 波および S 波の伝播速度である。

本文で示した解析モデルのように流体の音速よりも固体 S 波の伝播速度が小さい場合、Rayleigh 波を与える特性方程式の解では一般に η は虚数になることに注意しなければならない。なぜなら、

$$\eta = \omega \sqrt{\alpha_f^{-2} - c_R^{-2} - 0.25g^2 \alpha_f^{-4} \omega^{-2}} \quad (\text{A.3})$$

であり、 $\alpha_f > c_R$ 、 $g^2 \alpha_f^{-4} \sim 0$ となるためである。ただし、 c_R は Rayleigh 波の伝播速度である。このため式 (A.1) の

特性方程式の解には \tan の周期性に基づく Rayleigh 波の分岐は現れず、Rayleigh 波には基本モードしか現れない。

式(A.1)から重力の影響を除去する、すなわち $g = 0$ とすると Biot¹²⁾の与えた固体-流体波動場の特性方程式が得られる。Biot の原論文と変数の使い方が異なるがこの特性方程式は次式となる。

$$(2p^2 - 1)^2 - 4p^2 \xi \zeta + \frac{\rho_f}{\rho_s} \xi \frac{k \tan \eta H}{p \eta} = 0 \quad (\text{A.4})$$

本文で与えた Rayleigh 波の分散曲線はこの方程式の解とほとんど変わらないことが確かめられる。ここからも、Rayleigh 波と重力の相互作用が小さいことが理解できる。

なお、式(A.1)で与えられる位相速度が非常に小さい場合、 p の値が大きくなることで、式(A.1)の方程式は近似的に次の方程式と等価になる。

$$1 - \frac{gk}{\omega^2} \tanh kH = 0 \quad (\text{A.5})$$

この方程式は流体力学のテキストに見られる剛な水底上での非圧縮性流体の重力波の特性方程式に他ならない。この方程式によって、振動数ゼロの重力波の位相速度は $c = \sqrt{gH}$ と与えられる。本文で述べたように、本解析による重力波の振動数ゼロでの位相速度はこの値で与えられた。これらの考察からも重力波においては固体-流体の相互作用は小さいことが理解できる。

参考文献

- 1) Touhei, T: A discrete wavenumber and normal mode superposition method for Synthetic Seismograms, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 84, pp. 1473-1483, 1994.
- 2) Touhei, T: Propagation of normal modes due to impulsive loading to 3-D medium on a rigid basement, *Earthq. Engn. Struct. Dyn.*, Vol. 24, pp. 937-949, 1995.
- 3) 東平光生: 薄層要素-離散化波数法による圧縮性流体層を含む成層弾性体の動的解析手法の展開, 土木学会論文集, No. 507/I-30, pp. 149-158, 1995.
- 4) Lomnitz, C.: Some observations of gravity waves in the 1960 Chile Earthquake *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 60, pp. 669-670, 1970.
- 5) Chavez-Garcia, F., J. and P. Bard: Gravity waves in Mexico City -I. Gravity perturbed waves in an elastic solid, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 83, pp.1637-1655, 1993.
- 5) Chavez-Garcia, F., J. and P. Bard: Gravity waves in Mexico City -II. Coupling between an anelastic solid and a fluid layer, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 83, pp.1656-1675, 1993.
- 7) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, pp. 255-263, McGraw-Hill, 1957.
- 8) Lamb, H.: *Hydrodynamics*, 6th ed., pp. 547-556, Dover Publications, New York, 1945.
- 9) Olson, A. H., Orcutte, J. A. and G. A. Frizer: The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol. 77, pp. 421-460, 1984.
- 10) 小国力 編: 行列計算ソフトウェア, 丸善, 1991.
- 11) Pekeris, C. C. and H. Lifson: Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse, *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 29, pp. 1233-1238, 1957.
- 12) Biot, M. A.: The interaction of Rayleigh and Stonley waves in the ocean bottom, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 42. pp. 81-92, 1952.

(1995.4 .6 受付)

WAVE PROPAGATION ANALYSIS FOR LAYERED SOLID-FLUID MEDIA IN A GRAVITY FIELD USING A THIN-LAYERED ELEMENT AND DISCRETE WAVE NUMBER METHOD

Terumi TOUHEI

Layered solid-fluid media in a gravity field were analyzed by a thin-layered element and discrete wave number method. The gravity effects were incorporated to the governing equation for fluid and solid-fluid interaction equations. Green's function for layered solid-fluid media in a gravity field was represented in terms of the normal modes, which were obtained from the thin-layered element matrices. Several investigations were applied to the differences between the Rayleigh wave mode and the gravity wave mode. Numerical calculations showed that the gravity waves, in which the phase velocity and frequency is very low, were caused as a result of the propagation of the body waves and the Rayleigh wave.