

不規則波のカオスの生成とその特性について

安田孝志¹・森 信人²

¹正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

²学生会員 工修 岐阜大学大学院 工学研究科 日本学術振興会特別研究員 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

深海ストークス波のカオス化の過程について検討するとともに、カオス化によって生成される不規則波の性質について調べた。その結果、ストークス波は、側帯波不安定とモード干渉のために初期擾乱の条件に関係なくカオス化し、不規則波に転化することが明らかとなった。生成された不規則波は初期波形勾配のみで決まるスペクトルを持つが、ピークモードより高波数側で非分散性となることが見い出された。

Key Words : nonlinear interaction, chaos, sideband instability, random wave, dispersion relation

1. 緒言

海の波は、極めて日常的な現象であるが、海岸・海洋構造物の設計外力として工学的だけでなく、大気と海洋の相互作用を媒介する海面境界過程として地球環境的にも重要である。このため、これまで海の波に対する数多くの研究がなされて来たが、基本的には海の波を無数に多くの独立な成分波(フーリエモード)の重ね合わせとして表現する点で共通している。これに中心極限定理を適用することによって海の波をガウス過程として扱う根拠が与えられ、その統計理論が展開されて来た。ただし、発達した海の波においては、その水位分布がガウス分布から若干ずれ、中心極限定理が必ずしも成り立っていないことは良く知られている。このため、Gram-Charlier分布が代わって用いられることもあるが、一般にはずれは微小として無視され、ガウス過程に基づく取り扱いが依然としてなされている。

しかしながら、風波の発達過程のスペクトル変化や Ramamonjarisoa¹⁾によって示された風洞水槽内での風波の分散関係を理解するには、フーリエモード間の非線形干渉だけでなく、無数のフーリエモードが励起される機構まで含めてその振舞いを正しく評価した海の波の描像が必要となる。また、風波の周波数スペクトルがその発生の初期において線スペクトルに近い形状を示す事実²⁾から理解されるように、外力が不規則であることが直ちに波の不規則性につながる訳ではなく、不規則性の問題もフーリエモードの振舞いに関連して捉える必要があると言える。

このような問題を解明し、より正しい海の波の描像を築き上げて行くには、フーリエモードを海の波の成分波とする扱いに変更はなくても、フーリエモードに

非線形干渉の影響を反映させ、非線形干渉下のフーリエモードの振舞いをまず明らかにする必要がある。非線形干渉を考慮したフーリエスペクトルの時間発展については、波浪予知に関連した Hasselemann³⁾を初めとした多くの研究があるが、位相も含めたフーリエモードそのものの振舞いについては計算上の制約もあって数は少なく、ほとんどは準単色波の問題に限られている。

水の波をポテンシャル波として扱った場合であるが、Yuen・Lake⁴⁾や Caponiら⁵⁾によって2組以上の不安定側帯波を伴うストークス波は最終的にカオスとなり、フーリエモードが不規則な振舞いを示すことが明らかにされた。これは、外力を一切加えなくても水の波は不規則になり得ることを初めて示したものとして高く評価されている。しかし、現実には碎波を伴うような大きな波形勾配の波を対象にしているのに加え、ピークモードを中心とした $0.4 \leq k/k_p \leq 1.6$ (k_p はスペクトルのピーク波数)の波数空間上に7個のフーリエモードしか存在しない狭帯少数自由度系による近似の下で計算が行われているため、その結論に一般性を欠いていた。しかしながら、非線形干渉によってストークス波がカオス化することを示した彼等の結果は、海の波の不規則化の1つの過程を説明するものとして重要であり、十分な広さと自由度を持つ波数空間上でストークス波のカオス化およびこれに伴う不規則波の生成過程を検討する必要がある。

そこで、ここでは海の波の非線形的側面に着目し、これを鉛直2次元場の非圧縮・非粘性流体でのポテンシャル波として扱い、その不規則化の過程を明らかにするため、カオスによる不規則波の生成機構とその特性について検討を行う。具体的には、Dommermuth・Yue⁶⁾の手法にならって水面重力波の基礎方程式を4次の非

線形干渉まで厳密に評価して解き、十分な大きさの波数空間および自由度の下で所定の側帯波擾乱を伴うストークス波の長時間発展を調べる。この結果を基に、カオス化に伴う不規則波の生成過程を明らかにするとともに、生成された不規則波の特性を水位分布、スペクトル、分散関係および波形に関して解明する。

2. 計算手法

鉛直2次元無限水深の非圧縮・非回転流体場での水面重力波を考え、未知量を平均水面周りの水面変動 η および水面での速度ポテンシャル ϕ^s とすれば、支配方程式は次式のように書かれる。

$$\eta_t + \phi_x^s \eta_x - (1 + \eta_x^2) \phi_z = 0, \quad (1)$$

$$\phi_t^s + \eta + \frac{1}{2} \phi_x^{s2} - \frac{1}{2} (1 + \eta_x^2) \phi_z^2 = 0. \quad (2)$$

ここに、

$$\phi_z = \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{M-m} \frac{\eta^j}{j!} \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{j+1} \psi_n(x, z) \Big|_{z=0} \quad (3)$$

$$\psi_n(x, z) = \exp(k_n z + i k_n x) \quad (4)$$

であり、添字 x, z, t はそれぞれ偏微分、 k_n は n 番目のフーリエモードの波数、 N はフーリエモードの個数（自由度の大きさ）、 M は ϕ_z に対して評価する非線形干渉の次数、 $\phi_n^{(m)}(t)$ は次式を逐次解くことにより決定されるフーリエ係数である。

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(1)} \psi_n(x, 0) = \phi_s, \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)} \psi_n(x, 0) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^j \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m-j)} \psi_n(x, z) \Big|_{z=0}, \quad m=2, 3, \dots, M \quad (6)$$

時間発展については、式(1)および(2)をフーリエ空間上で4次のRunge-Kutta-Gill法で計算し、全ての非線形項について aliasing 誤差を除去した。また、時間刻み Δt は安定条件 $\Delta t^2 \leq 8\Delta x / (g\pi)$ を満たすように与えた。

これより得られる数値解の精度については、初期波としてストークス波の数値的厳密解⁷⁾を与え、その時間発展を厳密解と比較することにより行うとともに、エネルギー保存則に対する誤差を調べることによっても行った。前者に対しては $\varepsilon_1 = |k[\eta_n(x, t) - \eta_e(x, t)]|_{max}$ 、後者に対しては $\varepsilon_2 = |1 - E(t)/E(0)|_{max}$ によってストークス波が100周期伝播する間の精度評価を行った。ここで、 η_n は数値解、 η_e は厳密解および $E(t)$ は全エネルギー

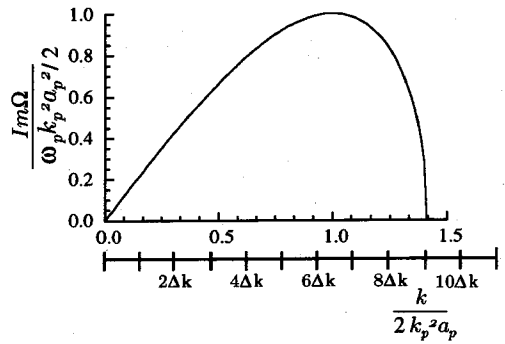


図-1 離散化された不安定波数域と不安定増幅率； Ω は不安定モードの角周波数、 ω_p は k_p に対応したピークモードの波数

ギーの時間変化を示す。その結果、 $M=4, N=16$ の下で $ka=0.2$ のストークス波を初期波と与えたときの ε_1 および ε_2 の値はそれぞれ 6.7×10^{-4} および 2.4×10^{-5} となり、 $M=4$ とすれば厳密解に近い精度を持つ解が得られることがわかった。ただし、ここでは所定の初期擾乱の下で側帯波不安定によるカオス化の問題を扱うため、フーリエ変換などの数値計算によって生み出される不確定誤差が側帯波擾乱となって不安定成長し、カオス化に関与してくることを避ける必要がある。このため、波数空間上での初期状態を与えるフーリエ変換については4倍精度で計算し、その後の時間発展は倍精度で行った。

3. 計算条件

Yasuda・Mori⁸⁾によって、カオスの振舞いを示す準単色波の記述には、最低でも $0 \leq k/k_p \leq 4$ の領域の波数空間と不安定領域内 $|k - k_p| < 2\sqrt{2} k_p^2 a_p$ に4組以上のモードが存在できる自由度が必要となることが明らかにされている。そこで、 $0 \leq k/k_p \leq 4$ の波数空間上に128もしくは256個のフーリエモードを与え、 $\Delta k = k_p/32$ の間隔で波数を離散化して計算を行うことにした。ここで、添字の p は主波のモードであることを示す。

初期擾乱としては図-1に示す非線形シュレディンガー(NLS)方程式に基づく不安定波数域内の全モードに主波(ストークス波)の1/100の振幅を持つ側帯波を与えるほか、 $k=k_p \pm 2\Delta k, 3\Delta k$ および $6\Delta k$ の位置にそれぞれ1組、および $k=k_p \pm 10\Delta k$ & $\pm 11\Delta k$ の位置に2組の同格の振幅を持つ側帯波を与え、初期波形勾配 $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の時間発展を調べることにした。なお、 $k_p a_p$ の値の影響を調べるため $k_p a_p = 0.15$ および 0.05 のストークス波の不安定波数域内の全モードにも同様の

振幅を与え、それらの時間発展計算を行うことにした。また、側帯波の位相は Stiasnie・Kroszynski⁹⁾の結果より増幅率が最大となるようにストークス波に対して $-1/4\pi$ とした。

4. 不規則波のカオスの生成

ここでは、深海でのストークス波が長時間伝播の過程でカオス化し、外力の作用なしに不規則波に転化することを数値シミュレーションによって明らかにする。なお、カオスの厳格な判定は、時間発展の非周期性および初期値に対する鋭敏性によって行われ、前者についてはフーリエスペクトルあるいは相関関数、後者についてはリャプノフ指数あるいはセパレーションディスタンスがそれぞれ用いられるが、ここではフーリエモードの振舞いが見掛け上不規則（無秩序）になればカオス化したと判定する。ただし、これによる判定結果は厳格な判定の結果⁸⁾と何ら変わらない。

(1) ストークス波の長時間発展とカオス化

ストークス波が側帯波攪乱に対して不安定なことは Lighthill¹⁰⁾によって既に指摘されていたが、Benjamin・Feir¹¹⁾によってこの不安定（側帯波不安定あるいは Benjamin-Feir の不安定と呼ばれる）が実証されて広く認められるようになった。その後、緒言で述べたように側帯波不安定がカオスに結び付くことが明らかにされたが、一定の条件を満たす側帯波攪乱が与えられた場合のみにストークス波がカオス化するという結論になっていた。このため、上述したような十分な広さと自由度を持つ波数空間上でストークス波を長時間発展させ、初期攪乱に関係なくストークス波がカオス化し、不規則波に転化することを明らかにし、ストークス波によるカオスの正しい描像を示す必要がある。

まず、3. で述べた側帯波攪乱を $k_p a_p = 0.10$ のストークス波に与え、これを $t/T_p = 2500$ まで伝播させた場合のスペクトルの時間変化について調べる。図-2 はその結果を示したものである。伝播の極く初期段階ではいずれの場合も定常性が保たれ、エネルギーも主波モードに集中しているが、徐々に側帯波不安定によって側帯波との間でエネルギーの授受が生じ、FPU 再帰現象が始まる場合も見られるようになる。このように、時間発展の初期段階では側帯波攪乱に応じてスペクトルの振舞いは異なったものになっているが、 $t/T_p \geq 1500$ ではいずれの場合も共通して非周期変動を示すようになり、カオス化することがわかる。これは、上述の Yuen・Lake⁴⁾の結論と異なり、十分な自由度の下では何らかの初期攪乱があればストークス波は必ずカオス化することを示している。

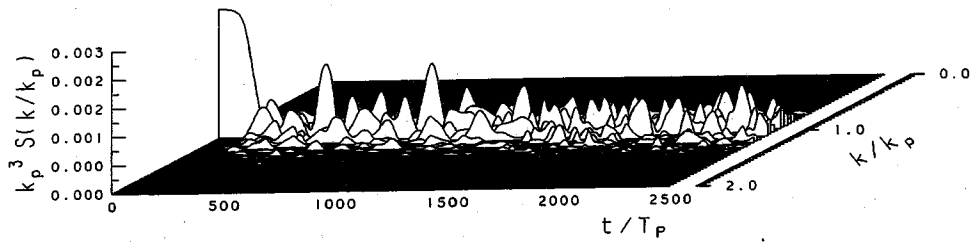
ついで、 $k_p a_p = 0.05$ のストークス波の不安定波数域の全モードに同様な攪乱を与えた場合について調べる。図-3 は、これを $t/T_p = 5000$ まで伝播させ、その間の各スペクトルの時間発展を示したものである。この場合、非線形性が弱くなっているため、図-2(a)の場合と比べて定常性が比較的長時間 ($t/T_p \approx 400$) 保たれているが、その後は不完全な再起を繰り返しつつ $t/T_p \approx 800$ においてほぼカオス化している。これは、図-2(a) ($k_p a_p = 0.10$) の場合と比べてカオス化に4倍以上の時間を要することを示しているが、この問題は上述した NLS 方程式に基づく最大増幅率 $\Omega_{max} = (gk)^{1/2} (k_p a_p)^2 / 2$ の比が $k_p a_p = 0.05$ と 0.10 で4になることを考慮すれば容易に理解できる。したがって、 $k_p a_p$ の値が減少するに従ってストークス波のカオス化に要する時間が増大するものの、カオス化自体は $k_p a_p$ の値に関係なく生じるものと判断される。

現実の海の波を考えた場合、様々な攪乱の下にあるため、ここで与えたような側帯波程度のノイズが存在すると考えることはむしろ自然である。これを考えると、側帯波不安定が生じる浅海から深海域 ($k_p h > 1.36; h/L_p > 0.22$) の水面重力波が伝播の過程でカオス化することに何ら不思議はなく、深海においては定常波や FPU 再起が永続することはあり得ず、不規則外力が加わらなくても波は必ずカオス化すると言える。

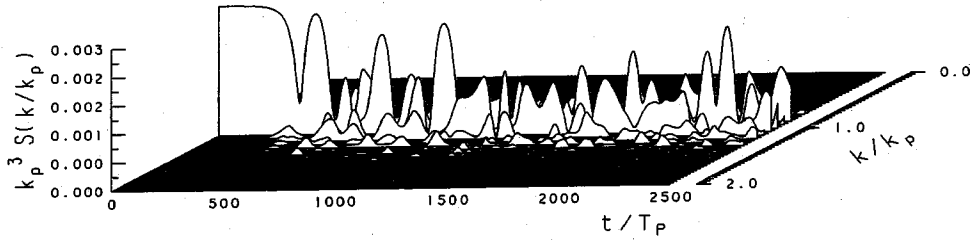
(2) フーリエモードの不規則性

カオス化した波の不規則性は成分波であるフーリエモードの不規則性に支配される。この時のフーリエモードの時間発展は所定の初期値の下で上述の式(1)および(2)に従いつつ進んでおり、各モードの振舞いは力学法則に支配される。しかしながら、共鳴を伴う非線形干渉があれば多波相互作用のために各モードの振舞いは確率論的となり、特に自由度の大きい系では容易に不規則系となる。ただし、各モードのエネルギーは非線形干渉によりストークス波の主波モードから供給されたものであるため、完全に独立ではあり得ず、各モードを独立とするガウス過程とは相容れない。このため、この時のフーリエモードの不規則性を振幅および位相定数に関して検討し、その特性を明らかにしておく必要がある。このことは、逆に非線形性が卓越した高波浪時の海の波の諸性質の理解に有用となろう。そこで、ここでは $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の不安定波数域内の全モードおよび $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ の2組の側帯波モードにそれぞれ攪乱を与えた場合のフーリエモードの振幅および位相定数の振舞いについて調べる。

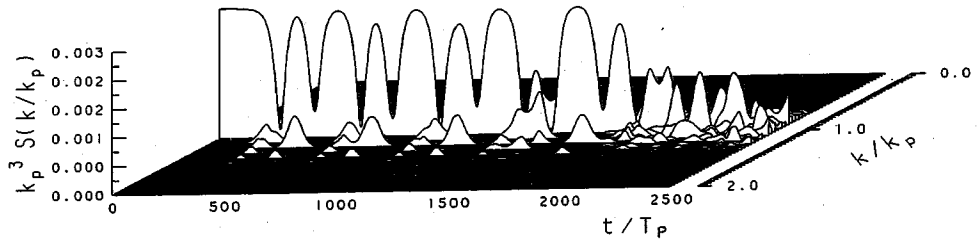
図-4 は、これらの $t/T_p = 1000$ からの遅れ時間 τ に対するフーリエ振幅の相関関数 $R(\tau)$ を示したものである。これから、前述の図-2 において見られたように、い



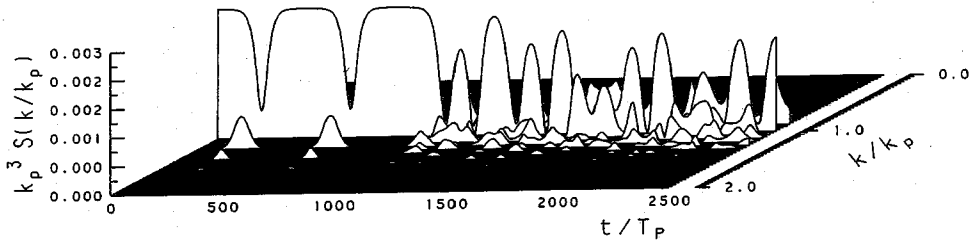
(a) $|k - k_p| < 2\sqrt{2}k_p^2 a_p$ (不安定域内の全モード)



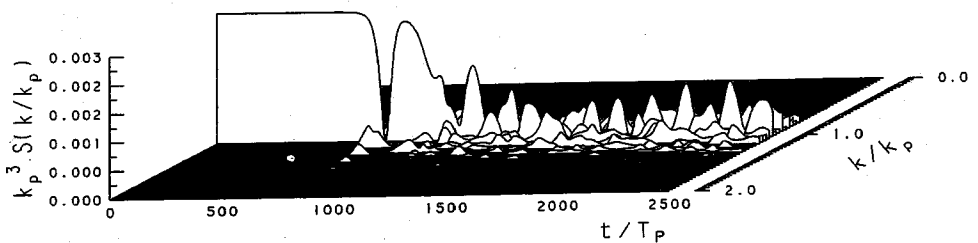
(b) $k = k_p \pm 2\Delta k$



(c) $k = k_p \pm 3\Delta k$



(d) $k = k_p \pm 6\Delta k$



(e) $k = k_p \pm (10, 11)\Delta k$

図-2 初期攪乱を $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の不安定波域内の全モード, $k_p \pm 2\Delta k$, $k_p \pm 3\Delta k$ および $k_p \pm 6\Delta k$ の1組のモード, さらに不安定域外の $k_p \pm 10\Delta k$ および $\pm 11\Delta k$ の2組のモードにそれぞれ付与した場合のフーリエスペクトルの時間発展

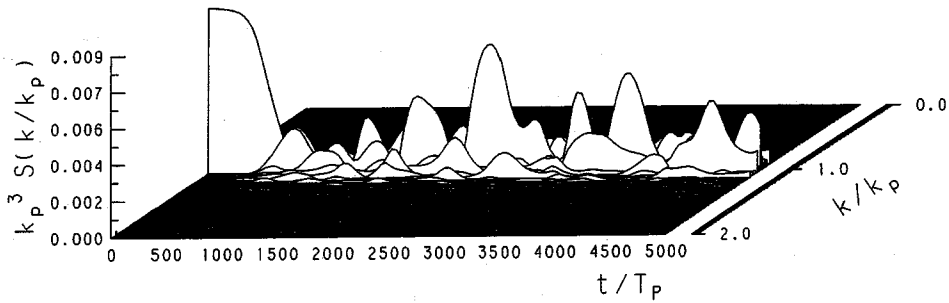


図-3 初期攪乱を $k_p a_p = 0.05$ のストークス波の不安定域内の全モードに付与した場合のフーリエスペクトルの時間発展

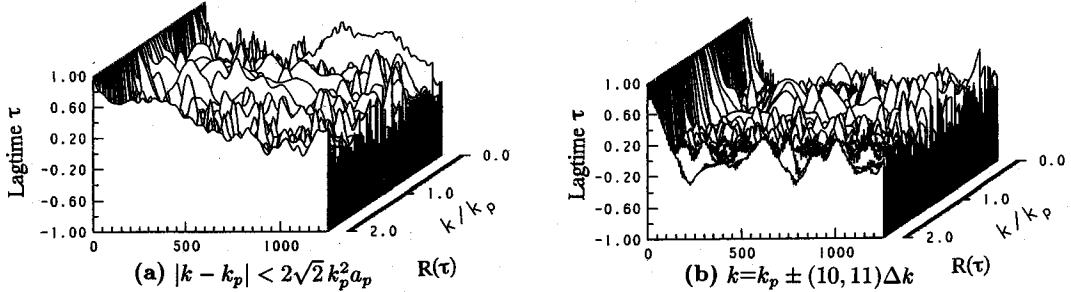


図-4 初期攪乱を持つ $k_p a_p = 0.10$ のストークス波のフーリエ振幅の自己相関関数 $R(\tau)$

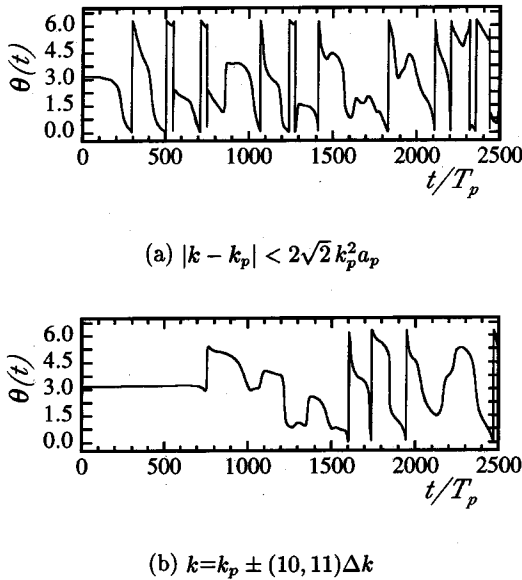
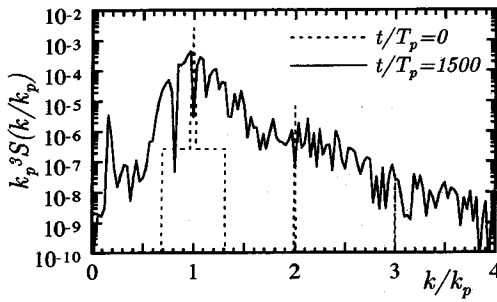


図-5 初期攪乱を持つ $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の主波モード k_p の位相定数 θ_p の時間変化

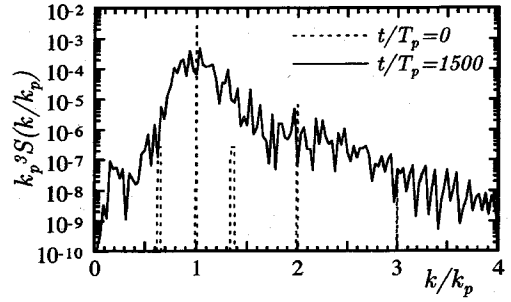
ずれのフーリエ振幅の時間発展も非周期的であり、フーリエモードの振舞いはその振幅に関して不規則であると言える。

ついで、この時のピークモードのフーリエ係数 d_p より $\theta_p = \tan^{-1}[\text{Im}(d_p)/\text{Re}(d_p)] - \omega_p t$ によって与えられる位相定数 θ_p の時間変化について調べる。ここで、 ω_p は波数 k_p に対応した角周波数である。図-5 はその結果であり、側帯波攪乱が $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ の場合は、 $t/T_p \approx 700$ 程度まで定常波として進むため、主波の位相定数 θ_p は一定値を保っているが、カオス化が始まる $t/T_p \geq 700$ より変化し始め、 $t/T_p \geq 1500$ になると変化は不規則となり、 $0 \sim 2\pi$ の間を急変することがわかる。同様に、不安定波数域内の全モードに攪乱を与えた場合でも、カオス化が始まる $t/T_p \geq 200$ から位相定数 θ_p は変動を始め、不規則変動を繰り返すことがわかる。このときのフーリエモードの生因は非線形干渉であっても、生成されたフーリエモードのカオス化した段階での振舞いには主波のものも含めて何ら規則性は見られない。このように、振幅および位相の変化は確率的であり、この点に関してはフーリエモードの振幅および位相を確率変数として扱う従来の波浪スペクトル法に適合し、この結果はむしろ振幅や位相が確率変数として扱われる物理的基礎を与えるものと言って良い。

ついで、これらの振幅および位相定数の波数空間上での分布について検討する。図-6 および 7 は、カオス化した $t/T_p = 1500$ での波数スペクトル $S(k)$ と位相定

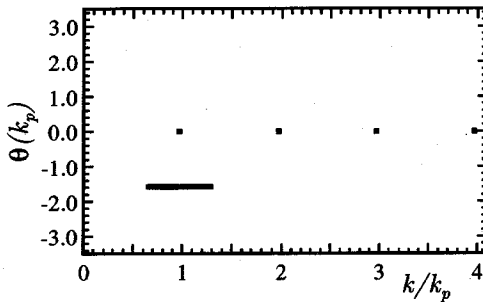


(a) $|k - k_p| < 2\sqrt{2} k_p^2 a_p$

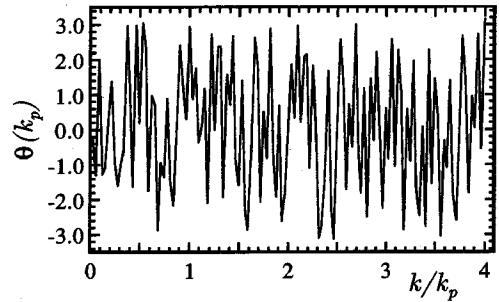


(b) $k = k_p \pm (10, 11)\Delta k$

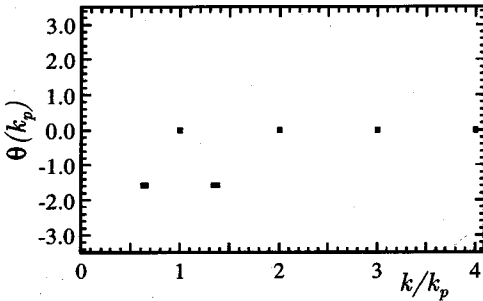
図-6 初期攪乱を伴う $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の $t/T_p = 0$ および 1500 における波数スペクトル



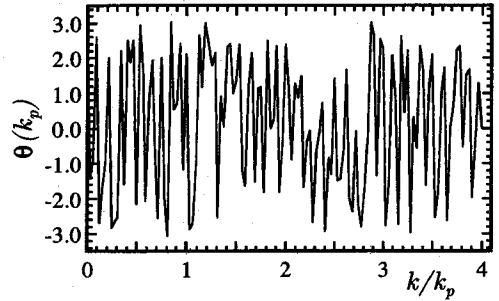
(a) $t/T_p = 0, |k - k_p| < 2\sqrt{2} k_p^2 a_p$



(b) $t/T_p = 1500, |k - k_p| < 2\sqrt{2} k_p^2 a_p$



(c) $t/T_p = 0, k = k_p \pm (10, 11)\Delta k$



(d) $t/T_p = 1500, k = k_p \pm (10, 11)\Delta k$

図-7 初期攪乱を伴う $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の $t/T_p = 0$ および 1500 における位相定数の波数空間上の分布

数 $\theta(k)$ の分布を初期状態 ($t/T_p = 0$) のものと共を示したものである。 $t/T_p = 0$ ではスペクトルおよび位相定数が所定の初期モードに固定されていたが、 $t/T_p = 1500$ では $0 \leq k/k_p \leq 4$ の全域にエネルギーが拡がり、高波数側のスペクトルが一定のベキ則に従う一方、位相定数は全域にわたって不規則に分布している。この結果は、海の波を無数の独立なフーリエモードの重ね合わ

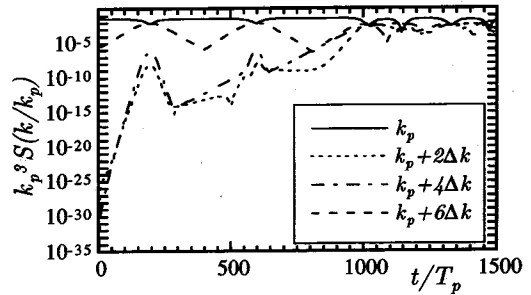
せとして表現するこれまでの描像と何ら矛盾せず、初期値を含めて一切の不確定要因や不規則外力を加えず、ストークス波に若干の微小攪乱を加えただけで、見かけ上これまでの描像と矛盾しない不規則波が生成されるという驚くべき結果であり、実際の海の波の生成過程がカオス的であることを示すものと言える。

(3) 側帯波不安定とモード干渉の役割

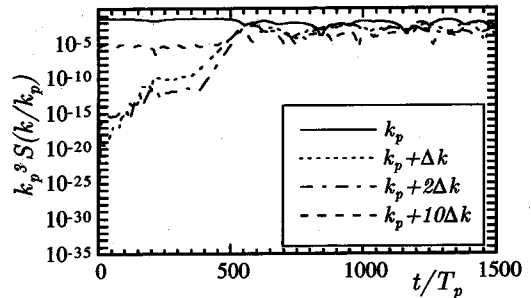
上述したようにストークス波は初期攪乱に関係なくカオス化し、不規則波に転化するが、その過程で側帯波不安定だけでなくモード干渉が重要な役割を果たしていることを明らかにしたい。このため、 $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の $k_p \pm 6\Delta k$ の位置に1組の攪乱、 $k_p \pm 10\Delta k$ および $11\Delta k$ の位置に2組の攪乱をそれぞれ与えた場合の主波とその側帯波モードに着目し、これらのスペクトルの時間変化を対数目盛上で調べる。

前述の図-1 からわかるように $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の不安定波数領域は $|k - k_p| < 0.283k_p (\doteq 9.05\Delta k)$ となるから、 $k_p \pm 6\Delta k$ に1組の攪乱を置いた場合には不安定域内の側帯波は1組のみとなり、Yuen・Lake⁴⁾の結果によればFPU再起が予想される。事実、前述の図-2(d) に示したように $t/T_p \approx 1000$ までに2回のFPU再起が生じている。しかしながら、その後は予想に反してカオス化している。これは、図-8(a) からわかるように、初期に与えた $k_p \pm 6\Delta k$ の側帯波以外に $k_p \pm 2\Delta k$ および $\pm 4\Delta k$ の2組の側帯波が励起され、これらが急速に発達して $t/T_p \approx 1000$ 付近において主波のものと同オーダーとなることによっている。このような、不安定側帯波の励起と急速な成長については次のように説明される。例えば、波数 k_p の主波と $k_p \pm 6\Delta k$ の側帯波の干渉において波数 $6\Delta k$ の低波数モードが励起され、さらに、 $30\Delta k$ の波数を持つこれの5倍高調波モードと $k_p (=32\Delta k)$ の波数を持つ主波との干渉によって $2\Delta k$ の波数を持つ低波数モードが励起される。この $2\Delta k$ およびその高調波モードが主波と干渉することによって、離散的ではあるが不安定領域内に $k_p \pm 2\Delta k$ 、 $\pm 4\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ の側帯波を新たに励起し、これらが主波とのエネルギー分配に関与することによってカオス化することになる。この場合、図-8(a) からわかるように、初期攪乱として与えられた $k_p \pm 6\Delta k$ のモードに比べてこれらの側帯波モードの成長がきわめて早く、このことが $t/T_p \approx 1000$ 付近でカオス状態になる大きな原因となっている。このような早い成長が生じる理由は次のように説明される。 $k_p \pm 2\Delta k$ の側帯波はそれが励起されるまでに高調波の励起を含めて5回のモード干渉を経るため、励起直後の無次元スペクトルは $(10^{-6})^5$ と微小であるが、成長率は逆に $k_p \pm 6\Delta k$ の初期側帯波のもの6倍となり、スペクトルは $t/T_p \approx 1000$ において主波のオーダーに到達することによる。

これに対し、図-8(b) の後者の場合について見ると、 $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ の2組の側帯波は不安定域外に置かれているため、不安定は生じずストークス波は定常波として安定的に伝播するはずである。しかしながら、 $k_p \pm 10\Delta k$ と $k_p \pm 11\Delta k$ の両側帯波の干渉によって Δk の波数を持つ低波数モードが励起されると、直ちにこ



(a) $k = k_p \pm 6\Delta k$



(b) $k = k_p \pm (10, 11)\Delta k$

図-8 主波および側帯波の振幅の時間変化 ($k_p a_p = 0.10$)

れと主波との干渉によって不安定波数域内の $k_p \pm \Delta k$ から $k_p \pm 9\Delta k$ の全モードが励起され、これが主波とのエネルギー分配に加わってカオス化を引き起こすことになる。この場合、波数 Δk のモードが励起され、さらにそれがピークモードに拘束されて $k_p \pm \Delta k$ のモードを励起されるまでに2回の非線形干渉を経るだけであるため、励起直後の $k_p \pm \Delta k$ のモードの無次元スペクトルは $(10^{-6})^2$ となる。この結果、上述の $k_p \pm 6\Delta k$ の場合に比べて大きなエネルギーを持ち、結果的にカオス化に到達する時間も短縮されることになる。このように、不安定域内に最初は攪乱が存在していなくても、十分な自由度があればモード干渉によって一定のエネルギーを持つ攪乱が不安定域内に励起され、これらに不安定が生じてカオス化すると同時にそれがモード干渉を介して全域に広がることになる。このことは、モード干渉が初期攪乱に関係無くカオス化を引き起こす上で重要であるだけでなく、多波相互作用によってカオス化を直ちに系全体の変動に拡大し、ストークス波のカオス化において本質的役割を担っていることを示している。

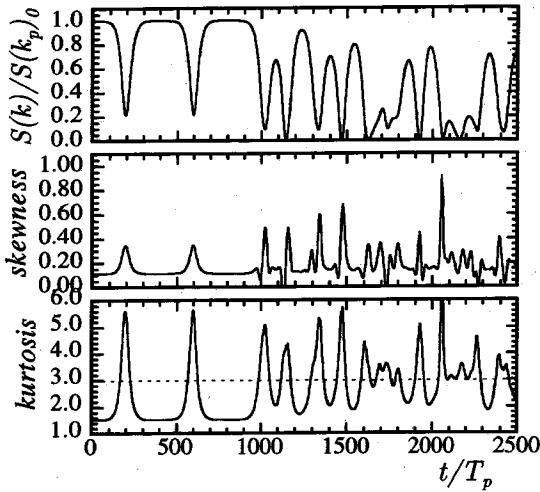


図-9 初期攪乱 ($k_p \pm 6\Delta k$) を伴う $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の主波モード, skewness および kurtosis の時間変化

5. カオスによる不規則波の性質

ここでは、カオスによってストークス波から生成された不規則波の性質について検討を行う。この場合、各モードは非線形干渉を通して決定論的に励起されるため、相互に結びついているが、上述したように不安定を伴う多波相互作用のためにその振舞いは不規則であり、性質は独立なフーリエモードの重ね合わせによる不規則波と類似している可能性がある。このため、水位分布、スペクトル、分散関係および波形に関してその性質の解明を図る。

(1) 水位分布

図-9 は、 $k_p a_p = 0.10$ のストークス波に対して、不安定波数領域内の $k_p \pm 6\Delta k$ に 1 組の初期攪乱を与えた場合のピークモードのスペクトル $S(k_p)$ 、水位変動の skewness および kurtosis の時間変化を示したものである。 $t/T_p \leq 1000$ では、skewness および kurtosis は比較的 $S(k_p)$ に連動して変化しているが、カオス状態に陥った $t/T_p \geq 1500$ では両者の間に直接的な関連を見つめることは出来ない。上述したように、カオス状態においては、多数のモード間の多波相互作用系に移行しており、skewness および kurtosis の時間変化とピークモードのエネルギー変化の関係にこれらが現われていると言える。

また、振幅 a を持つ正弦波の水位分布の確率密度関数

およびガウス分布はそれぞれ次式のように与えられる。

$$p(z)dz = \frac{dz}{\pi\sqrt{a^2 - z^2}} \quad (-a < z < a), \quad (7)$$

$$p(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right). \quad (8)$$

これより、skewness はいずれにおいても 0 であるが、kurtosis は正弦波の場合 1.5、ガウス分布では 3 となる。

$$\begin{aligned} \text{kurtosis} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^4 p(z) dz}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) dz \right]^2}, \quad (9) \\ &= \begin{cases} 1/2 & : \text{正弦波} \\ 3 & : \text{ガウス分布} \end{cases} \end{aligned}$$

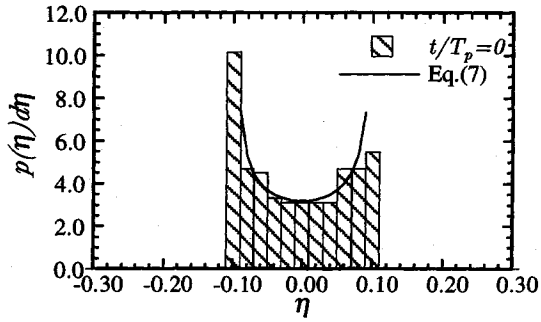
図-9 より、初期および FPU 再帰の間は基本的に kurtosis の値が 1.5 であるのに対し、 $t/T_p \geq 1000$ では 3.0 周りで変動しており、水位変動が不規則化していることがわかる。ただし、skewness の値は 0.1~0.3 程度となっており、その分布形状は対称とはなっていない。また、skewness は、カオス状態である $t/T_p \geq 1000$ で FPU 再帰の場合と比較して最大 2~3 倍大きな値を取っており、カオス状態では波形の上下非対称性が増加することがわかる。

ついで、この場合の図-10 に示すのは、先に示したケースの $t/T_p = 500$ および $t/T_p = 1000$ における水位変動の確率密度分布について調べる。図-10 はこの結果を理論分布とともに示したものである。 $t/T_p = 500$ では、FPU 再帰の過程にあるため、計算値は水位変動の上下非対称性を除き、式(7)にはほぼ一致しているが、カオス化した $t/T_p = 1500$ では Gram-Charlier 分布やガウス分布に近い分布形状を持つことがわかる。

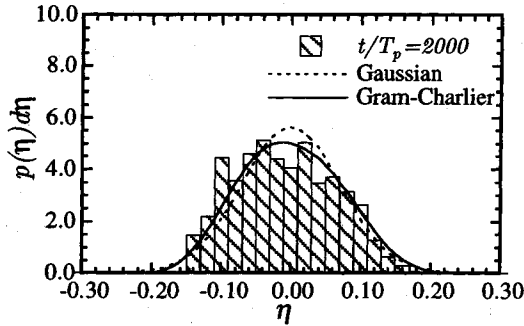
(2) スペクトル

図-11 は、初期の攪乱を $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の不安定波数領域内の全モード、 $k_p \pm 6\Delta k$ の 1 組および $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ の 2 組にそれぞれ与えた場合のカオス状態におけるスペクトルの比較を行ったものである。これから、初期攪乱に関係なくカオス状態のスペクトルは共通した形状を持ち、いずれもおおよそ $k^{-7.5}$ のべき則に従っていることがわかる。これは周波数スペクトルに換算すれば f^{-15} となり、風波の平衡スペクトルが $f^{-4} \sim f^{-5}$ であることに比べて相当に狭帯であるが、エネルギーの供給や逸散なしに一定のべき則に従うスペクトルが形成されることは興味深い。このことが、実海域においてスペクトル形状が類似性を持つ原因の 1 つになっているのではないかと推察されるが、今後の検討課題である。

ついで、図-12 は、 $k_p a_p = 0.05, 0.10$ および 0.15 の場合のストークス波のそれぞれの不安定波数領域内の全モードに初期攪乱を与えた場合のカオス状態における



(a) $t/T_p=500$



(b) $t/T_p=1000$

図-10 水位の確率密度分布 ($k_p a_p = 0.10$, $k = k_p \pm 6\Delta k$)

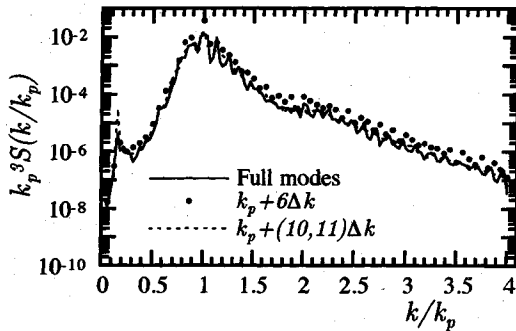


図-11 初期攪乱を不安定域内の全モード、 $k_p \pm 6\Delta k$ および $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ と与えた場合の $t/T_p=1500$ でのスペクトルの比較 ($k_p a_p = 0.10$)

スペクトルを比較したものである。この場合は、 $k_p a_p$ の値に応じてスペクトル形状に明瞭な差異が認められ、カオスによって生成される不規則波は $k_p a_p$ の初期値、すなわち、波列の非線形性のみによって決まるある普遍的

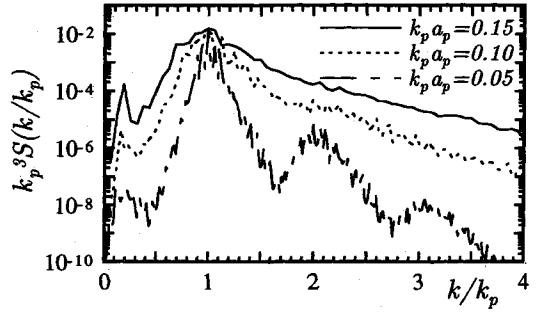


図-12 カオス状態のスペクトル形状に及ぼす初期波形勾配 $k_p a_p$ の影響

なスペクトルを持つことがわかる。そして、 $k_p a_p = 0.15$ になると依然として狭帯スペクトルであるが、見掛け上は海の波一般のスペクトルに似たものとなり、スペクトルの形状だけでは風などの不規則外力によるものや無数の波源域からの重ね合わせによるものと何ら区別がつかない。このため、各モードの独立性についての検討が必要となる。

(3) 分散関係

スペクトルでは各フーリエモードの位相の情報が捨てられているため、各モードの独立性を評価することは出来ない。いま、対象としている不規則波が線形重ね合わせによっているとするなら、各モードの位相は線形分散関係に従うことになる。したがって、海の波の水位分布がガウス分布に従うとするなら、各モードの位相速度も当然ながら線形分散関係に支配されることになる。しかしながら、前述の Ramamonjariisoa¹⁾ によって示されたように、風波のスペクトルのピークモードの波速は線形分散関係を満足するが、ピークより高周波側のモードはピーク付近のモードの波速に近い一定速度で伝播し、分散関係を満たさなくなる。この問題については、その後、光易らのグループ¹²⁾ によって解明が試みられ、非線形性の強い風波では、高周波モードの大部分が独立な自由波ではなく非線形干渉による拘束波となり、そのために分散関係を満たさなくなることが明らかにされた。したがって、カオスによって生成された不規則波ではその影響が分散関係に現れてくるものと考えられる。

図-13 は、 $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の $k_p \pm 6\Delta k$ のモードに初期攪乱を与えた場合の各伝播段階での平均分散関係 (各段階でのそれぞれ $100T_p$ の伝播時間の平均) を示したものである。定常性が保たれ、ストークス波として伝播している $t/T_p < 100$ においては当然ながら

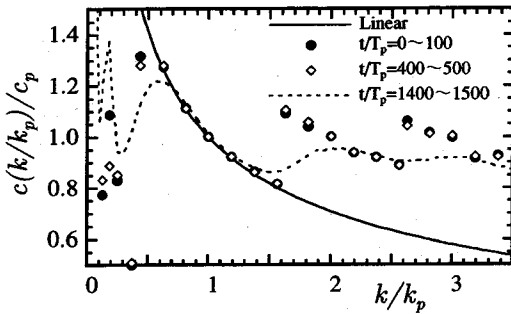


図-13 $k_p \pm 6\Delta k$ に初期攪乱を与えた場合の分散関係の時間変化

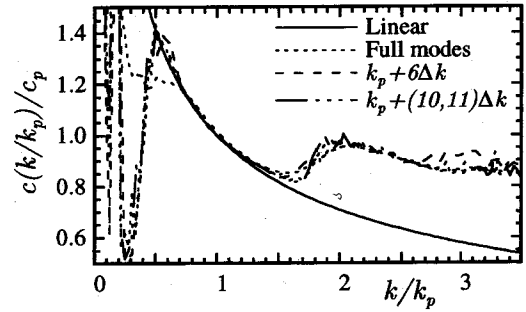


図-14 分散関係に及ぼす初期攪乱の影響 ($k_p a_p = 0.10$)

ら高波数部分で線形分散関係からずれているが、FPU再起の段階の $t/T_p = 400 \sim 500$ においてもほとんど同じ分散関係が保たれていることがわかる。このように、ストークス波として伝播している場合と変調が生じている場合では、スペクトルに関しては大きな差異が生じているものの、分散関係に関しては全く違いが無く、FPU再起が振幅変調のみによっていることがわかる。これに対し、カオス化した $t/T_p > 1000$ では、 $k/k_p \geq 1.9$ の高波数モードの波速はほぼ完全に非分散性となり、ピークモードの波速に近い一定値を持つことがわかる。したがって、カオス化によってスペクトル形状だけでなく分散関係も変化し、特に高波数部分の分散関係が非分散性化する点にカオスによる不規則波の特色があるといえる。これは、スペクトルに関してはカオス化によって広帯化し、不規則性が增大するが、位相に対してはむしろ拘束性が強くなって均一化が進むことを意味している。

ついで、このようなカオス状態における分散関係に及ぼす初期攪乱の影響について検討するため、初期攪乱を $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の不安定波数領域内の全モード、 $k_p \pm 6\Delta k$ の1組のモードおよび $k_p \pm 10\Delta k$ & $11\Delta k$ の2組のモードにそれぞれ与えた場合の $t/T_p = 1000 \sim 1100$ での平均分散関係を比較した。図-14はその結果であり、スペクトルと同様、カオス状態においては分散関係は初期攪乱に全く依らず一定となることわかる。

最後に、このような分散関係に及ぼす $k_p a_p$ の影響について検討を行うため、 $k_p a_p = 0.15, 0.10$ および 0.05 のストークス波の不安定波数領域内の全モードに初期攪乱を付与した場合のカオス状態における分散関係を比較した。図-15はその結果であり、スペクトルと同様、 $k_p a_p$ に対する依存性が明瞭に現れている。 $k_p a_p = 0.05$ では

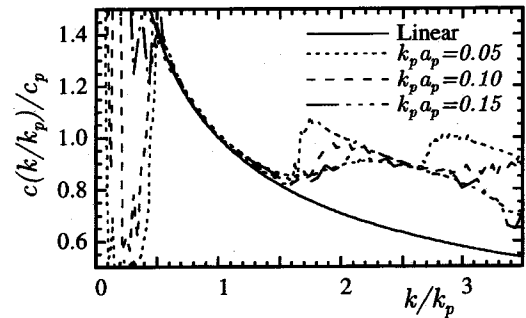
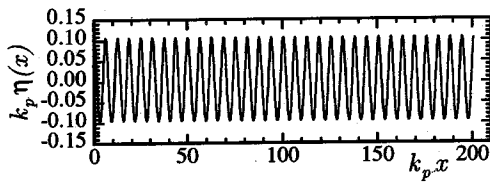


図-15 分散関係に及ぼす初期波形勾配 $k_p a_p$ の影響

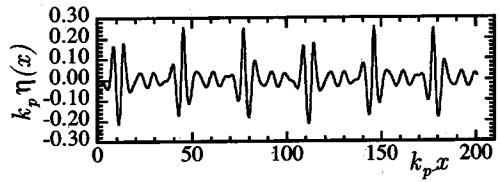
ピーク付近のモードの2倍および3倍高調波成分の影響が現れ、線形分散関係とは大きくずれているものの若干の分散性は残っている。これに対し、 $k_p a_p = 0.10$ ではそのような高調波成分の影響は弱まり、 $k/k_p \lesssim 2$ の高波数モードの波速はほぼ一定となる。さらに $k_p a_p = 0.15$ となると、 $k/k_p \geq 1.6$ の高波数モード全体がほぼ一定の波速を持ち、高波数モードの非分散性がさらに進んで来ることがわかる。特に、この結果は Ramamonjiarisoa¹⁾ によって示された実験結果に良く対応しており、分散関係から捉える限り、風洞水槽内の風波は単に風の不規則性によって不規則化しているのではなく、カオス化によっても同時に不規則化し、外因(風)と内因(非線形干渉)の両面からその不規則波の生成や性質を捉える必要があると言えよう。

(4) 波形

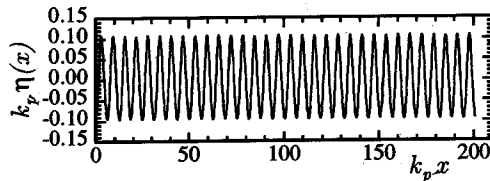
これまで示してきたようにストークス波のカオスによって生成される不規則波は、一定のスペクトルを持ち、それらの分散関係に際だった特色を持っている。これは、フーリエモードの振幅や位相定数が確率的に変



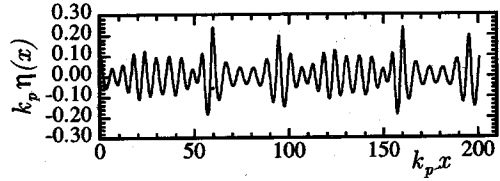
(a) $t/T_p=0$



(b) $t/T_p=200$



(a) $t/T_p=400$



(b) $t/T_p=1500$

図-16 初期攪乱 ($k_p \pm 6\Delta k$) を伴う $k_p a_p = 0.10$ のストークス波の伝播過程における波形の変化

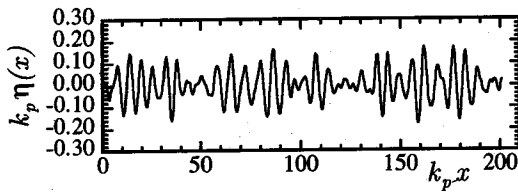


図-17 図-16(d) の波形と同一のスペクトルを持ち、位相を一様乱数で置き換えた線形波

化するとしても各モードの位相速度が主波に近い一定値を持つため、波形に関しては何らかの秩序が残ることを意味している。そこで、この点について検証するため、FPU 再帰を伴いながらカオス化する $k_p a_p = 0.10$ のストークス波に $k_p \pm 6\Delta k$ の側帯波攪乱を与えた場合の波形変化を調べる。

図-16 は、この波の $t/T_p = 0$ 、FPU 再帰の過程で変調が最も強くなった $t/T_p = 200$ 、FPU 再帰が見られる $t/T_p = 400$ 、さらにカオス化した段階の $t/T_p = 1500$ でのそれぞれの波形を示したものである。1 組の側帯波モード $k_p \pm 6\Delta k$ の変調によって、 $t/T_p = 200$ では初期波の波高に比べて 2 倍近い波高を伴う波峰の突出が生じるが、 $t/T_p = 400$ においては波形が完全に元に戻る FPU 再帰が生じていることがわかる。しかし、カオス化するとこのような再帰は消え、 $t/T_p = 1500$ におけるような不規則波列となる。

これに対するこの時の分散関係の影響を調べるため、

$t/T_p = 1500$ でのスペクトルと同一のスペクトルを持ち、位相定数を一様乱数で置き換えた波列を合成し、図-16(d) の波形との比較を行う。図-17 はこれによる波形を示すが、前述の図-16(d) におけるものに比べれば波形の不規則性が明瞭に現われていることがわかる。この時のスペクトルからすれば、波形はこの程度の不規則性を持ってよいが、カオスによる不規則波ではその非分散性のために波形の細かい水面変動が消え、波形に秩序構造が現われて規則波に近くなる。この結果、カオス化した波ではそのスペクトルに比べて狭帯モデルの適用性が改善されることになる。

6. 結語

非線形性が無視できない海の波の不規則化の過程や非分散性などの諸特性を、その非線形的側面に着目して解明するため、海の波を鉛直 2 次元の非圧縮・非粘性流体場でのポテンシャル波として扱い、カオスによる不規則波の生成機構とその性質について検討を行った。その結果、以下の諸点が明らかとなった。

- i) 側帯波不安定を伴うストークス波においては、モード干渉によって初期攪乱の波数に関係無く不安定域内に側帯波が励起され、これが主波とのエネルギー分配に関与することによってカオス化すると同時に、それが波数空間全域に広がり、ストークス波の不規則波への転化が生じる。このような側帯波不安定とモード干渉がストークス波のカオス化において本質的役割を果たし、何らの不規則外力の作用なしに不規則波を生成する。したがって、

無限の自由度を持ち、種々の攪乱の下にある現実の海の波が不規則となることは、風などの不規則外力を考えなくても容易に理解できる。

- ii) カオスによって生成される不規則波は、波数空間全域にわたって励起されるフーリエモードの振幅および位相定数が側帯波不安定とモード干渉を介して確率的に変動することによって特徴づけられる。すなわち、フーリエモードの励起およびそれらの振舞いが正準方程式に支配されながら、不安定を伴う多波相互作用によって不規則となる点に特色があり、不規則波の生成機構の解明に手掛かりを与えるものとなっている。
- iii) カオス化に伴うスペクトルは初期波形勾配によって決まるべき則に従い、初期攪乱に関係なく、ある一定の普遍的な形状を持つ。
- iv) カオス化によって高波数モードの非分散性が進み、その分散関係は風洞水槽内で計測された風波の分散関係に極めて類似したものとなる。これは、カオスによる不規則波の生成が非線形干渉によっていることから当然であり、カオス化によってスペクトルに関しては広帯化し、不規則性が増大するが、位相に関してはむしろ拘束が強くなって一様化が進むことを示している。このような分散関係に対するカオス化の影響は波形に現われ、カオスによる不規則波はそのスペクトルに比較して秩序を保っている点に特徴がある。

謝辞： 本研究は文部省科学研究費特別研究員奨励費(0440)および一般研究C(06650559)による成果であることを付記し深謝する。

参考文献

- 1) Ramamonjariisoa, A. : Contribution à l'Etude de la Structure Statistique et des Mécanismes de génération des Vagues de Vent, *Thèse de doctorat d'état*, Univ. de Provence, France, 1974.
- 2) Kawai, S. : Generation of initial wavelets by instability of a coupled shear flow and their evolution to wind waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.93, pp.661-703, 1979.
- 3) Hasselmann, K. : On the nonlinear energy transfer in gravity-wave spectrum. I. General theory, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.12, pp.481-500, 1962.
- 4) Yuen, H.C. and B.M. Lake : Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, *Advances in Applied Mech.*, Vol.22, pp.67-327, 1982.
- 5) Caponi, E.A., P.G. Saffman and H.C. Yuen : Instability and confined chaos in a nonlinear dispersive wave system, *Phys. Fluids*, pp.2159-2166, 1982.
- 6) Dommermuth, D.G. and D.K.P. Yue : A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.184, pp.267-288, 1987.
- 7) Tanaka, M. : The stability of steep gravity waves, *Jour. Phys. Soc. Japan*, Vol.52., pp.559-568, 1983.
- 8) Yasuda, T. and N. Mori : Roles of sideband instability and mode coupling in forming a water wave chaos, submitted to *Jour.*
- 9) Stiassnie, M. and U.I. Kroszynski : Long-time evolution of an unstable water-wave train, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.116, pp.207-225, 1982.
- 10) Lighthill, M.J. : Contribution to the theory of waves in non-linear dispersive systems, *Jour. Inst. Math. Applic.*, vol.1, pp.269-306, 1965.
- 11) Benjamin, T.B. and J.E. Feir : Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, *Proc. Roy. Soc. London, Ser.A*299, pp.59-75, 1967.
- 12) Mitsuyasu, H., Y.Y. Kuo and A. Masuda : On the dispersion relation of random gravity waves. Part 2. An experiment, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.92, pp.731-749, 1979.

(1995.4.11 受付)

CHAOTIC GENERATION AND CHARACTERISTICS OF RANDOM WAVES

Takashi YASUDA and Nobuhito MORI

Computations using a high-order spectral method with sufficient resolution are performed to describe the long-time evolution of deep-water Stokes waves. Investigations are made on the roles of sideband instability and mode coupling in forming chaos and further on the characteristics of the waves in chaos. The computational results show that the Stokes waves turn to random waves through chaos and that the resultant waves own converged spectra obeying power laws of wavenumber and bound dispersion relations dependent on the initial steepness alone.