

ウェーブレット解析による波浪の非線形特性の推定

森 信人¹・安田孝志²

¹学生会員 工修 岐阜大学大学院 工学研究科 日本学術振興会特別研究員 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)
²正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

ウェーブレット変換による不規則波列の非線形特性の推定法を提案するとともに、数値シミュレーションおよび水槽実験より得られた波形に対してその適用性について検討を行った。その結果、初期のスペクトルに関係なく、ここで提案した推定法によって不規則波列の非線形性およびその分散関係への影響をよく表現できることが明らかとなっている。

Key Words : dispersion relation, Gaussian process, nonlinear interaction, orthonormal expansion, random waves, wavelet analysis

1. 緒言

海洋構造物の設計において波浪は主要な設計外力となるため、その合理的かつ適切な推定は重要である。このような波浪の基本的な振舞いを支配する要因として、スペクトル形状、波形勾配で代表される非線形性および水深が挙げられる。不規則波のスペクトル幅は、波列の大枠を決定づけるものであり、様々な表示法が提案されているが¹⁾、非線形干渉による拘束成分の存在により、その定義は困難なものとなっている。準単色波とは異なり、不規則波の非線形性は、水位変動の rms 値で定義される代表波形勾配だけでなくスペクトル幅と密接に関わっており、両者の影響により分散関係が変化することが Yuen & Lake²⁾により示されている。深海域において、波形勾配が大きくスペクトル幅が狭帯である場合、線形波と比較して連が短くなり突出した波高を持つ波である、‘Freak wave’の出現頻度が増大するが³⁾、水深が浅くなると逆に連が長くなり波群が偏平化する⁴⁾ことが明らかにされている。この様に不規則波列の振る舞いは、波形勾配、スペクトル幅および水深と共に特徴づけられるものであり、その定量的な評価は重要である。

例えば、非常に幅広いスペクトルを持った波であっても、位相が全て拘束されていれば実波形はデルタ関数になることから、不規則波の周波数や波数成分に含まれる非線形成分つまり拘束成分の割合およびその分布状況を調べることは重要である。このような不規則波列に及ぼす非線形干渉の影響について評価するには、分散関係を調べるのが一般的であり、Ramamonjiarisoa⁶⁾や光易ら⁷⁾により、風洞水槽内の風波はスペクトルのピーク周波数の 1.8 倍以上で線形分散関係からのずれが大き

く、ピーク周波数の 2 倍以上の高周波成分の大部分が非線形干渉による拘束波であることが明らかにされている。また、Crawford ら⁸⁾は Zakharov 方程式を数値的に解き、分散関係に及ぼすスペクトル幅と代表波形勾配の関係について調べ、初期のスペクトル幅が狭帯であるほど線形分散関係からのずれが大きいことを明らかにしている。理論的には、初めに Tick⁹⁾が 2 次の非線形伝達関数を提案し、Masuda ら¹⁰⁾は深海波を対象に 3 次の非線形干渉の影響まで組み込んだ方法を示し、光易ら⁷⁾によりこの 3 次の非線形モデルは水槽内の波列の分散関係を精度良く推定可能であることが明らかにされている。しかしながら、Masuda ら¹⁰⁾の方法は複雑な繰り返し計算が必要であり、また深海波のみを対象としているため一般には用いられていない。一方、波列の非線形特性を調べる方法としてパイスペクトルを用いる方法があるが、その物理的な解釈が困難であるため、その適用は限られたものとなっている。

そこで本研究では、分散関係に現われる不規則波列の非線形特性を 1 測点での時間波形データをもとに調べるため、ウェーブレット解析を用いた簡便な表示法を提案し、その適用性について検討を行う。さらに、高次の非線形干渉を考慮した数値シミュレーション結果より、波列の非線形特性に及ぼすスペクトル幅および波形勾配の影響を調べるとともに、水槽実験により得られた不規則波の非線形特性に与える碎波の影響について検討を行う。

2. 正規直交ウェーブレット展開

現在、波浪データのような不規則な時系列データから周期性や相似性などのマクロ的な関係を検出する方

法として、フーリエ変換を用いたフーリエスペクトル解析が広く用いられている。しかしながら、フーリエ変換の積分核が周期関数であるため、データ中に含まれる時間に関する情報はフーリエ変換の位相情報のみに与えられ、現象の時系列特性について有意な情報を得ることが出来ない。それゆえ多くの研究者により、非定常スペクトル解析に代表されるデータウィンドウを用いてフーリエ解析の欠点を補正しようとする試みが行われた¹¹⁾。しかし、これらの手法では、データウィンドウの幅を狭くして時間に対する分解精度を上げたとしても周波数分解能が落ちてしまうことになり、原理的に時間と周波数に対する情報を同時に精度良く得ることは出来ない。このため、時間的に局在化した関数を積分核として用いて時間-周波数解析を可能とするウェーブレット変換を用いることにより時間および周波数に対する情報の精度の改善が行われるようになってきた¹²⁾。

例えば、Shenら¹³⁾が、風波の実験データから局所的なエネルギー構造について、小林・高橋¹⁴⁾が不規則波列の波群構造について連続ウェーブレット変換を用いて解析した結果があるが、連続ウェーブレット変換を用いたスケール構造の解析は積分核(ウェーブレット)が一次従属かつ過剰完全系であるため、得られた結果の物理的解釈が難しく、その解釈が問題となっている¹⁵⁾。そこで、ここでは完全直交系の基底関数を持つ離散ウェーブレット展開を採用する。

任意のデータ $\eta(t)$ に対して正規直交ウェーブレット展開は、次式の様に定義される。

$$\eta(t) = \sum_j \sum_l \alpha_{j,l} \psi_{j,l}(t), \quad (j, l \in Z) \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_{j,l}$ はウェーブレット係数、 $\psi_{j,l}(t)$ はウェーブレットである。ウェーブレット $\psi_{j,l}(t)$ は、フーリエ変換における基底 $\exp(i\omega t)$ に相当するアナライジング・ウェーブレット $\psi(t)$ を l で表される離散的な平行移動と j で表示されるスケール変換を行うことにより、次式の様で作られる(ここでは、通常行われるように2のべきで離散化を行う)。

$$\psi_{j,l}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - l), \quad (j, l \in Z). \quad (2)$$

ウェーブレット $\psi_{j,l}(t)$ が完全直交系 $\{\psi_{j,l}(t) \in L(\mathbb{R}^2)\}$ であるならば、 $\psi_{j,l}$ とその複素共役 $\psi_{j',l'}^*(t)$ の関係は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j',l'}^*(t) \psi_{j,l}(t) dt = \delta_{j,j'} \delta_{l,l'}, \quad (j, j', l, l' \in Z). \quad (3)$$

であり、 $\eta(t)$ と $\psi_{j,l}^*(t)$ に対して次式が成り立つ。

$$\alpha_{j,l} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \psi_{j,l}(t) dt. \quad (4)$$

正規完全直交となるアナライジング・ウェーブレットは、現在 Meyer, Daubechies および Battle-Lemariés の3種類が存在するが、ここでは、フーリエ解析との対応を考慮し、台がフーリエ空間上で有界な Meyer のアナライジング・ウェーブレットを採用する。

Meyer のアナライジング・ウェーブレットの構成方法は以下のように定められている¹⁶⁾。

1. $\psi(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{\psi}(\omega)$ がフーリエ空間上でサポートコンパクト
2. $\psi(t)$ が実関数
3. $\psi(t)$ とその微分関数が $|t| \rightarrow \infty$ で急速に減少
4. 各オーダーでのモーメントがゼロ

であることを基本条件とし、その母関数として C^∞ 級な実関数 $\tilde{\phi}(\omega)$ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega) &\geq 0 \text{ かつ } \omega \geq 0 \text{ で単調減少関数} \\ \tilde{\phi}(\omega) &= \tilde{\phi}(-\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega) &= 1 \quad (|\omega| \leq 2\pi/3) \\ &= 0 \quad (|\omega| \geq 4\pi/3) \end{aligned} \right\}, \quad (5b)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{\phi}(\omega)\}^2 + \{\tilde{\phi}(\omega - 2\pi)\}^2 &= 1, \\ (2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3). \end{aligned} \right\}, \quad (5c)$$

このような $\tilde{\phi}(\omega)$ は一意的に決まらないが、ここでは、Yamada & Ohkitani¹⁷⁾の手法に従い、 $\tilde{\phi}(\omega)$ として、

$$\tilde{\phi}(\omega) = \sqrt{g(\omega)g(-\omega)}, \quad (6)$$

$$g(\omega) = \frac{h(4\pi/3 - \omega)}{h(\omega - 2\pi/3) + h(4\pi/3 - \omega)}, \quad (7a)$$

$$h(\omega) = \begin{cases} \exp(-1/\omega^2) & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega \leq 0) \end{cases}, \quad (7b)$$

を用い、母関数 $\tilde{\phi}(\omega)$ よりアナライジング・ウェーブレットのフーリエ係数 $\tilde{\psi}(\omega)$ を次式のように定義する。

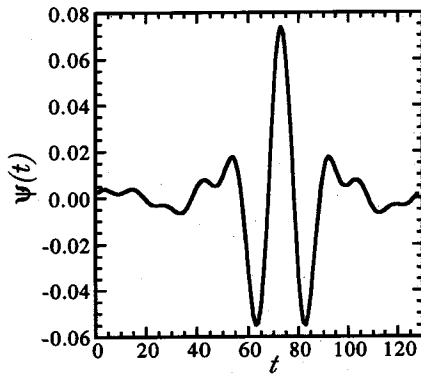
$$\tilde{\psi}(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega\right) \sqrt{\{\tilde{\phi}(\omega/2)\}^2 - \{\tilde{\phi}(\omega)\}^2}. \quad (8)$$

アナライジング・ウェーブレット $\psi(t)$ は、この $\tilde{\psi}(\omega)$ のフーリエ変換として構成される。

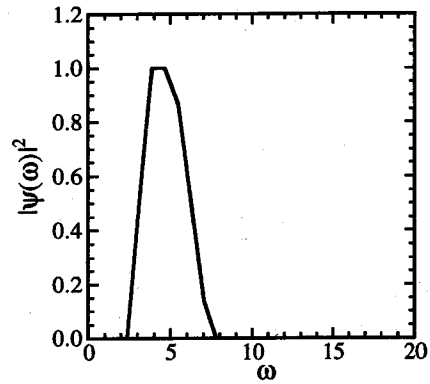
$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (9)$$

図-1に示すのは、Meyer のアナライジング・ウェーブレット $\psi_{j,l}(t)$ およびそのフーリエスペクトル $|\tilde{\psi}(\omega)|^2$ である。図より Meyer のアナライジング・ウェーブレットは、フーリエ空間でサポートコンパクトかつ実空間においても局所的な関数であることがわかる。

ここでは、ウェーブレット係数 $\alpha_{j,l}$ を求めるにあたり、式(4)の積分を直接解かず、データが周期性を持つと仮



(a) 実波形



(b) フーリエスペクトル

図-1 Meyerのアナライジング・ウェーブレットおよびそのフーリエスペクトル

定し、 $\tilde{\psi}(\omega)$ が領域 $[-8/3\pi, -2/3\pi] \cup [+2/3\pi, +8/3\pi]$ でサポートコンパクトであることを考慮することにより、式(4)を次式のようにフーリエ級数展開に書き換えたものを用いる¹⁷⁾。

$$\alpha_{j,l} = 2^{-\frac{j}{2}+1} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{2^j-1} a_n \tilde{\psi}^* \left(\frac{2\pi n}{2^j} \right) + a_{n+2^j} \tilde{\psi}^* \left(\frac{2\pi n}{2^j} + 2\pi \right) \right\} \exp \left(i \frac{2\pi n l}{2^j} \right), \quad (1 \leq j \leq N-1, 0 \leq l \leq 2^j-1). \quad (10)$$

ここで、 a_n は $\eta(t)$ の複素フーリエ振幅であり、

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi n t) \quad (11)$$

N はデータ数のべき 2^N であり、また簡単のためデータの周期を1と仮定している。

また、フーリエ解析との対応については、式(1)よりウェーブレット係数とフーリエスペクトル $S(\omega)$ は次の関係を持つことがわかる。

$$E_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\alpha_{j,l}|^2 \sim \omega S(\omega) \quad (\omega \sim 2^{j+2}\pi/3) \quad (12)$$

ここで、 E_j はウェーブレットスペクトルである。これより、ある時系列のスペクトルが何らかのべき則に従っている場合、式(12)よりウェーブレットとフーリエスペクトルは次式のように対応づけられる。

$$E_j \sim 2^{-j(p-1)} \iff S(\omega) \sim \omega^{-p} \quad (13)$$

ウェーブレット変換によって得られるウェーブレット係数は、フーリエ変換によって得られる周波数(波数)とそれぞれのスケールにおいて対応しており、その関係は式(13)により大枠において関連づけられる。

3. 解析方法

(1) ウェーブレット分布

離散ウェーブレット展開は直交関数展開であるから、フーリエ変換同様 Parseval の等式が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(t)|^2 dt = \sum_j \sum_l |\alpha_{j,l}|^2. \quad (14)$$

従って、フーリエ解析においてフーリエ振幅の2乗がエネルギーとして表せるように、ウェーブレット解析においてもウェーブレット係数の2乗をエネルギーとして考えることが可能である。この場合、ウェーブレット係数は時間スケールだけでなく時系列上においても分布しているため、各時間スケールに応じたエネルギーの時系列特性を調べることができる。そこで次式のように、ウェーブレット係数の2乗をウェーブレット分布 $A_{j,l}$ と定義する。

$$A_{j,l} = |\alpha_{j,l}|^2, \quad (1 \leq j \leq N-1, 0 \leq l \leq 2^j-1). \quad (15)$$

これより、それぞれのスケールでのエネルギーの時間分布を調べることが可能となる。

(2) ピークスケールとの相関

波浪のピーク周波数付近のエネルギーは共鳴干渉に代表される非線形干渉により高周波に向って移送されるため、水面波は弱い乱流構造を持つことが明らかにされつつあるが¹⁸⁾¹⁹⁾、この非線形干渉の影響は、異なるスケール間におけるエネルギーの空間(時間)分布に対する弱い相関関係として表れる。そこで、ウェーブレットスペクトルにおいてピークエネルギーを持つスケール j_p を基準とし、これより微細なスケールのウェーブレット係数の時間変化の相関を調べることにより、非

線形干渉の影響評価を試みる。

$$R_{j_p}(j) = \frac{2^{j^*} \sum_{l'=0}^{2^{j^*}-1} L_{j,l'} \times L_{j_p,l'}}{\sqrt{\sum_{l'=0}^{2^{j^*}-1} L_{j,l'}^2 \sum_{l'=0}^{2^{j^*}-1} L_{j_p,l'}^2}} \quad (16a)$$

$$L_{j,l'} = \sum_{l''=0}^* |\alpha_{j,l''}|^2, \quad (0 \leq l' \leq 2^{j^*}).$$

ここで、 \sum^* は $l/2^{j^*} \leq l'/2^{j^*} \leq (l+1)/2^{j^*}$ を満たす l についての部分総和を意味する。式 (16) の $R_{j_p}(j)$ より、ピークスケールとそれより微細なスケール間との関連をについて、次節以下で検討を行う。

(3) 各スケールにおける非線形性の評価

ピークスケールとそれ以外のスケール間の関係は、式 (16) で調べることが可能であるが、分散関係に顕われるようなスケール毎の非線形干渉の影響を評価することはできない。中心極限定理は、独立な確率変数の和の分布は和の数を増すにつれて Gauss 分布に近づくことを示しているが、水面変動がそれぞれのスケールで独立に変動している場合、各スケールでのウェーブレット係数もまた完全独立な確率変数として変動し、分布形状は Gauss 分布に収束するはずである。大気乱流については、Yamada & Ohkitani²⁰⁾ や She²¹⁾ により、速度差の確率密度関数が Kolmogorov の慣性域では Gauss 分布に従うのに対し、粘性が支配的になるスケールでは Gauss 分布から外れたものとなることが明らかにされている。また、水面変動の出現頻度分布については、現地観測や水槽実験結果によると、マクロ的には、非線形性により Gauss 分布ではなく、Edgeworth A 型の Gram-Charlier 分布に従うことが Loguet-Higgins²²⁾ や Huang & Long²³⁾ により確認されている。しかし、時間スケールに応じたエネルギーの時間分布は水位変動やフーリエ級数などの周期関数を展開関数として解析する方法では求めることは困難であるため、スケール毎の微細な構造変化についての検討は行われていない。ウェーブレット係数が水位変動と直接結びついていることを考慮すると、ウェーブレット係数の確率密度関数の Gauss 分布からのずれを量的に評価することにより各スケールにおける非線形性の影響を評価することが可能となるはずである。そこで、ウェーブレット係数 $\alpha_{j,l}$ の基準化された 4 次モーメントを非線形指標 K_α として次式のように定義する。

$$K_\alpha(j) = \frac{1}{(\alpha_{j,l})_{rms}^4} \cdot \frac{1}{2^j} \sum_{l=0}^{2^j-1} (\alpha_{j,l} - \bar{\alpha}_{j,l})^4 \quad (17)$$

ここで、 $\bar{\alpha}_{j,l}$ は $\alpha_{j,l}$ の平均値であり、 $\alpha_{j,l}$ の分布形状が Gauss 分布である場合は $K_\alpha=3$ となる。 K_α の値の

表-1 初期条件

Case	m	$k_p a$	skewness	kurtosis
1	4	0.05	0.096	2.883
2	10	0.05	0.045	2.837
3	20	0.05	0.082	2.878
4	30	0.05	0.038	2.862
5	30	0.07	0.038	2.862
6	30	0.10	0.038	2.862
7	100	0.05	0.000	2.745

増加は、各スケールでの線形理論からのずれを意味し、線形分散からの逸脱に相当するはずである。よって、スケール毎における非線形干渉の寄与の度合いは、ウェーブレット係数の分布形状の尖りにより推定することができる。 K_α と分散関係は互いに線形からのずれを表しているため強い関係がある筈であり、その対応については次節において検討を行う。

4. 数値シミュレーションによる検討

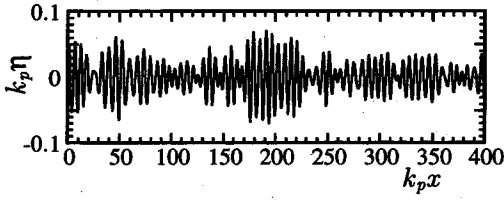
非線形波動場での波形およびその分散関係を求めるため、Dommermuth & Yue²⁴⁾ の手法に習い、断面 2 次元場において任意のオーダーまで非線形干渉を考慮可能な不規則波列の伝播スキームを用いてシミュレーションを実施し、その結果に対して先に定義した非線形指標の評価を行う。なお、計算精度およびその安定性についての詳細な検討については安田²⁵⁾ を参照されたい。

(1) 初期条件

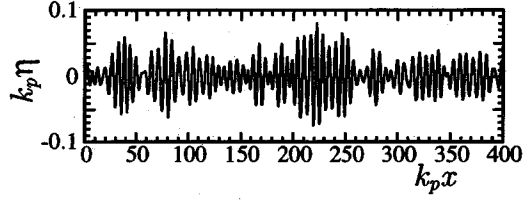
ここでは、速度ポテンシャルに対する摂動展開を 4 次まで取ることににより、最低 4 次の非線形干渉までは厳密に考慮している。また、平均水面回りの水面変動 $\eta(x, t)$ および自由表面回りの速度ポテンシャル $\Phi^s(x, t)$ を時間発展させているため、これより得られる $\eta(x, t)$ のフーリエ振幅の位相角 $\theta = k_i x - \omega(k_i) t + \delta_n$ を微小時間に対して時間差分することにより、4 次までの非線形分散関係 $\omega(k_i)$ および波速 $c(k_i)$ を直接計算することができる。

$$c(k_i) = \frac{\omega(k_i)}{k_i} = \frac{\theta(k_i, t) - \theta(k_i, t + \Delta t)}{k_i \Delta t} \quad (18)$$

初期波形および速度ポテンシャルについては、非線形不規則波に対する解が存在しないため線形解を用いる。初期波形としては、次式に示す波数空間上における Wallops 型スペクトルを初期スペクトルとして持つ不規則波を代表波形勾配 $k_p a$ およびスペクトルバンド

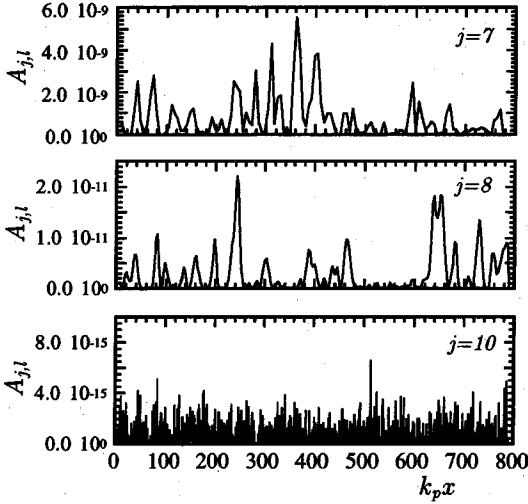


(a) 初期波形

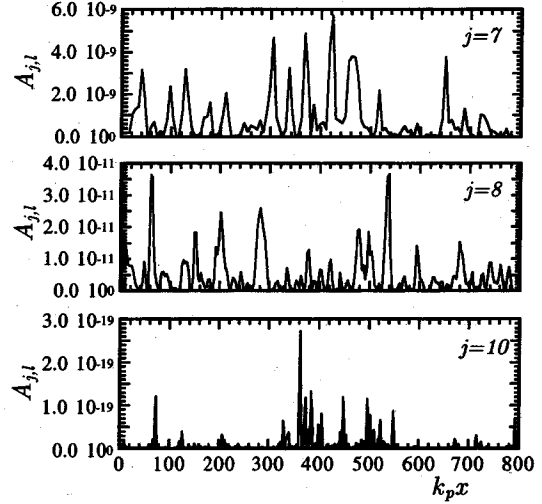


(b) 伝播波形 ($t/T_p = 10$)

図-2 Case 4 の初期波形および伝播波形 ($t/T_p = 10$)



(a) 初期波形



(b) 伝播波形 ($t/T_p = 10$)

図-3 Case 4 の初期波形および伝播波形 ($t/T_p = 10$) より計算されたウェーブレット係数の空間分布

幅パラメーター m を変化させ、表-1 に示す合計 7 ケースを与えた。

$$S(k) = \frac{1}{2} b H_{1/3}^2 \kappa^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{m}{4} \kappa^{-2}\right) \times \sqrt{\frac{4\pi^2}{k k_p \text{th} k h \text{th} k_p h}} \left[1 + \frac{2kh}{\text{sh} 2kh}\right] dk \quad (19)$$

ここに、 $\kappa = k \text{th} k h / k_p \text{th} k_p h$ 、 $\text{sh} x = \sinh x$ および $\text{th} x = \tanh x$ であり、これより $t/T_p = 0$ における空間波形は次式で与えられる。

$$\eta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2S(k_n) \Delta k} \sin(k_n x + \varepsilon_n) \quad (20)$$

ここで k_p は波数スペクトルのピーク波数、 a は $H_{1/3}$ の $1/2$ 、 h は水深、 b は

$$H_{1/3} = 4.004 \sqrt{\int_0^{\infty} S(k) dk}$$

を満たすように与えられる定数、 ε_n は $[0, 2\pi]$ の間で一様分布を持つ乱数列であり、式 (20) で与えられる成分波は各成分ごとに自由波として与えられる。この結果、時間発展の過程で非線形干渉により生まれる拘束波と自由波の比率により各波数成分ごとの分散関係が決まってくる。ここでは、無限水深 $k_p h = \infty$ 、フーリエモードの数を 1024、最大波数 k_{max} をスペクトルのピーク波数 k_p の 16 倍とし、ピーク周期 T_p の 10 倍である $t = 10T_p$ まで計算を行った。

(2) 不規則波列の非線形特性

不規則波列に及ぼす非線形干渉の影響について数値解をもとに調べるが、その比較対象として線形波である初期波についても合わせて解析を行う。

図-2 は、Case 4 ($m=30$, $k_p a=0.05$) の初期波および $t/T_p=10$ まで計算した後の空間波形である。このとき

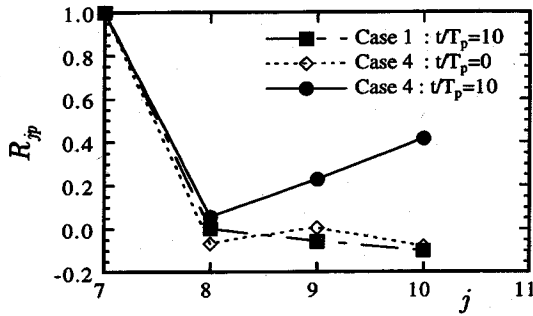


図-4 Case 1 および 4 の各スケールにおける R_{j_p} の変化

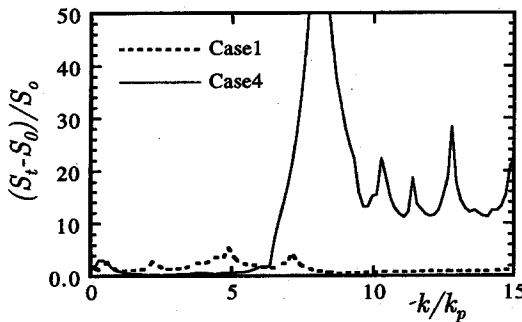


図-5 Case 1 および 4 の初期と $t/T_p = 10$ 伝播後のエネルギー変化

の skewness および kurtosis の値は、初期波についてはそれぞれ 0.096 および 2.883、伝播波形 ($t/T_p = 10$) では 0.326 および 2.995 である。数値解はこの後 $t/T_p = 50$ 程度まで伝播すると共鳴干渉の影響が活発となり、波群が発達するようになるが、図-2 の波形からはまだ影響を明瞭に読み取ることができない。

図-3 に示すのは、Case 4 の初期波および伝播波形 ($t/T_p = 10$) のウェーブレット分布であり、図中の j の値はスケールを示している。この場合、 $j=7$ が波数空間上でのピーク波数に相当し、 $j=8$ および 10 は 2 倍および 8 倍モードに対応したスケールである。 $t/T_p = 10$ の伝播波形においては、ピークスケールである $j=7$ および 8 の間に関連が見られないが、 $j=10$ では、エネルギーの空間的な分布に偏りが見られる。

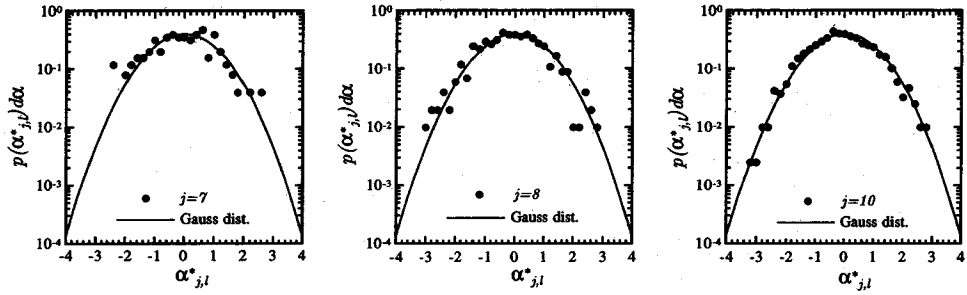
そこで、図-4 に Case 1 および Case 4 の初期波および伝播波形 ($t/T_p = 10$) に対する式 (16) で定義したピークスケール j_p とそれより微細なスケールのウェーブレット分布の時間変化の相関である R_{j_p} を示す。線形波である初期波および Case 1 の結果は、全てのスケールで無相関である。これに対し、Case 4 では $j=8$ において相関関係は 0.06 と無相関であるが、4 倍、8 倍高

調波と細かいスケールになるに従い、弱い相関が現われてくる。

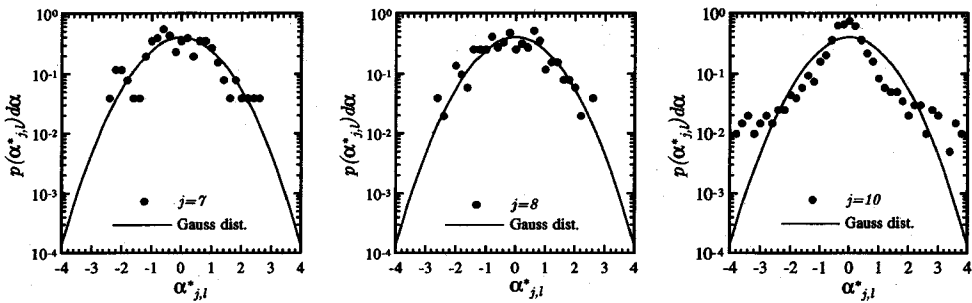
非線形干渉によるエネルギーの移送について調べるため、図-5 に Case 4 の初期と $t/T_p = 10$ 伝播後の波形のスペクトルの差を取ったものを示す。一般に共鳴干渉によって運ばれるエネルギーの時間スケールは $(k_p a)^2$ であり、10 周期程度では有意な量とならない。Case 4 では、共鳴を伴わない非線形干渉の影響により、初期と比較して 30 倍程度のエネルギーを受けとっているが、Case 1 の高波数モードの受けたエネルギー量は初期の 2 倍程度に留まっている。このように、低波数付近のエネルギーが非線形干渉により高波数に向けて移送された結果、ミクروسケールでのエネルギーの空間分布は大きなスケールの変動に拘束され、これが弱い相関関係として R_{j_p} にあらわれている。しかし、Case 1 の場合、初期のスペクトル幅が $m=4$ であるため、高波数成分においても自由波の占める割合が大きく、非線形干渉による拘束の度合いが相対的に小さくなり、相関は非常に弱くなっていることがわかる。

図-6 に示すのは、それぞれ初期波形と Case 4 の伝播波形 ($t/T_p = 10$) より計算したウェーブレット係数を分散で正規化した各スケール毎のウェーブレット係数の確率密度関数であり、図中の実線は Gauss 分布を示す。ピークスケールとそれより微少なスケールとの相関関係より明らかになったように、 $j=8$ の場合はピークスケールとの関係は弱く、その結果、 $j=8$ の分布はほぼ Gauss 分布に従っている。しかし、 $t/T_p = 10$ の伝播波形では $j=10$ で分布形状が Gauss 分布から著しくずれており、指数分布に近い形状となっている。ウェーブレット係数は水位変動と直接結びついているため、ウェーブレット係数の確率密度関数の Gauss 分布からのずれは、非線形干渉による拘束の影響であり、これを評価することにより各スケールにおける非線形性の影響を調べることができる。

波数成分中の自由波と拘束波の割合が波列の非線形特性を決めるならば、その影響は分散関係に強く現われることになる。そこで、図-7 に式 (18) によって計算される各ケースの位相速度を示す。図-7(a) より、分散関係に現われる非線形干渉の影響は、初期のスペクトル幅が最も狭い $m=100$ である Case 7 が最も顕著に表れ、初期のスペクトル幅が広くなるに従い線形解に漸近していくことがわかる。また、図-7(b) より同じスペクトル幅を持つ波列の場合、初期の波形勾配が大きい波列ほど線形分散関係からのずれは大きいことがわかる。波列の分散関係からスペクトル中の有効成分の割合を調べることができ、波列の詳細な振舞いを把握することが可能であるが、波動場の分散関係を得るためには、時間・空間波形を同時に観測する、代表周期に

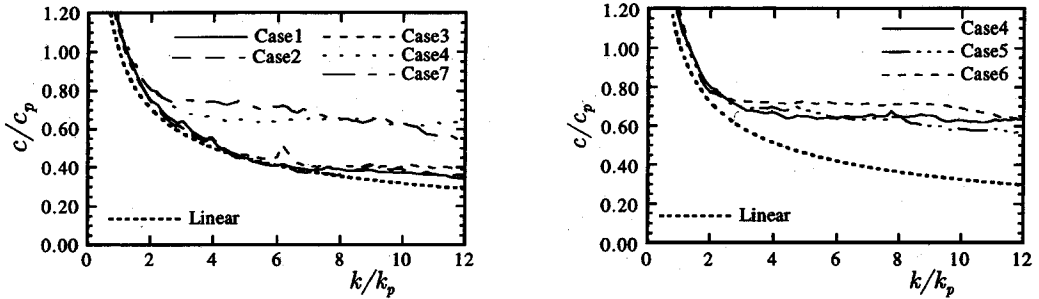


(a) 初期波形



(b) 伝播波形 ($t/T_p = 10$)

図-6 Case 4 の初期と $t/T_p = 10$ 伝播後のウェーブレット係数の確率密度関数



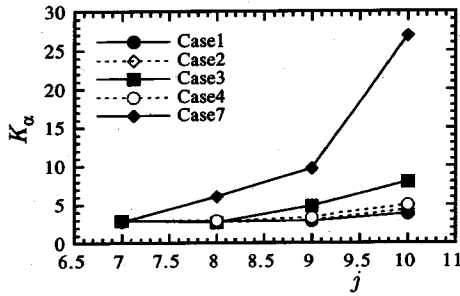
(a) スペクトル幅の影響

(b) $k_p a$ の影響

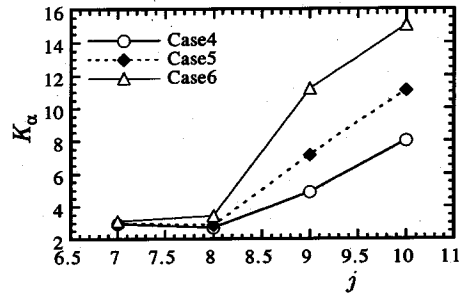
図-7 非線形分散関係

対して非常に密に波高計を設置する、もしくは繰り返し計算によって非線形伝達関数を計算するといった方法を取る必要があり、一般的なデータから波数・周波数特性を調べるとことは非常に難しい。

図-8 は、式(17)により計算された非線形指標 K_α をそれぞれのスケール毎に示したものである。図-8(a)より、非線形指標 K_α に現われる非線形干渉の影響は初期のスペクトル幅が最も狭い Case7 において最も強く



(a) スペクトル幅の影響



(b) $k_p a$ の影響

図-8 非線形指標 K_α のスケール分布

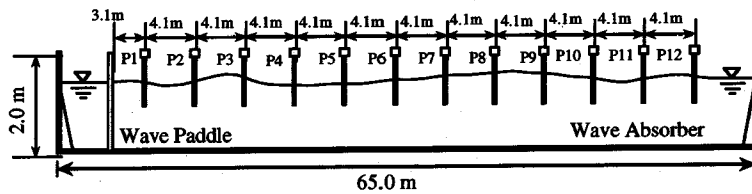


図-9 実験水槽の概略と波高計の設置位置

現われており、初期のスペクトル幅が広がるにつれて完全独立な場合の値である 3 に漸近することがわかる。また、図-8(b)において初期の波形勾配が強い波列ほど各スケールの K_α の値は増大しており、いずれの場合も先の図-7 の分散関係と同様の傾向を見ることができる。

5. 水槽実験データへの適用

前節では、数値シミュレーションによって得られた水面変動の空間波形に対して解析を行い、非線形指標 K_α と分散関係の関係について明らかにした。本節では、水槽実験により得られた波形データに対してこれらの手法を適用しその考察を行う。また、水槽実験では初期条件の与え方により造波する波を伝播の過程の碎波をコントロールすることが可能であり、碎波のような強非線形現象が波列のミクロスケールに及ぼす影響についても検討をする。

(1) 実験の概要

実験は、西松建設(株)技術研究所に設置された幅 1m、高さ 2m および長さ 65m の片面ガラス張りの 2 次元水槽内に、容量式波高計 12 台 (P1~P12) を図-9 に示すように設置し、水深 1.0m の下で Wallops 型スペクト

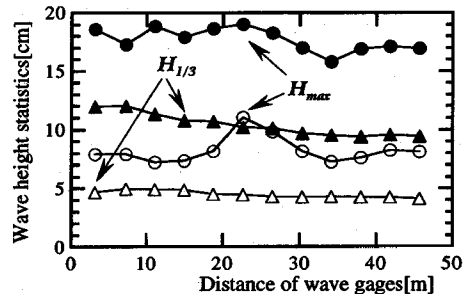


図-10 観測波形の H_{max} と $H_{1/3}$ の空間変化 (●: Run 1, ○: Run 2)

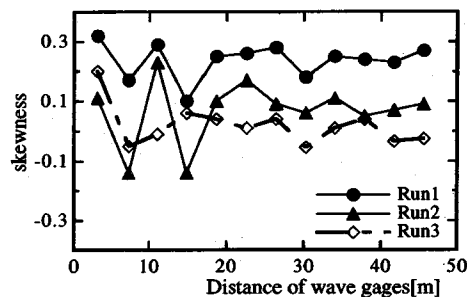


図-11 観測波形の skewness の空間変化

表-2 測点 P1 における不規則波列の諸量

Case	$k_p a$	skewness	kurtosis	
Run 1	0.245	0.251	3.473	碎波あり
Run 2	0.095	0.104	3.528	碎波なし
Run 3	0.245	0.004	2.992	線形波

ル ($m=10$) を初期スペクトルとする不規則波列を造波して行った。計測は、碎波の影響を調べるため、初期の代表波形勾配 $k_p a$ の大きさにより伝播過程で碎波が生じるケースと、全く生じないケースの2ケース造波して行った。ここに、 k_p は線形分散関係から得られるスペクトルのピーク周波数であり、 a は有義波高の1/2である。不規則波列の造波については、前節の数値計算の場合と同様に式(20)でスペクトルを与え、式(20)により波形を合成し電圧に換算して造波を行っている。スペクトルのピーク周波数 f_p は1Hzに固定して実験を行ったが、造波機の仕様により高周波成分については2Hzが上限となっているため、 $f_{max}/f_p=2$ となっている。また、サンプリング周波数は100Hz、観測時間は81.92sとし、無次元水深 $k_p h=4.0$ の深海波を対象に実験を行った。

表-2に示すのは、各ケースにおいて測点P1で観測された有義波高と代表波形勾配であり、Run 1は波列中に碎波が観測されたケース、Run 2は碎波が全く観測されなかったケース、Run 3はRun 1の波形から計算されたスペクトルをもとに位相を一様乱数で置き換えて再合成した数値的な不規則波(線形波)である。

図-10は、Run 1および2での H_{max} および $H_{1/3}$ の空間変化を示したものであり、これより、非碎波のRun 2では $H_{1/3}$ がほとんど変化していないのに対し、Run 1では碎波によるエネルギー散逸に伴い単調に減少していることがわかる。ついで、図-11に示すのは、各ケースの skewness の空間変化であり、Run 1は0.25、Run 2は0.1、線形波であるRun 3はほぼ0の値となっている。Run 1の方がRun 2に比べて非線形性が強く、またRun 1と3におけるようにスペクトルは同一であっても波形の特徴は大きく異なっており、不規則波列の特性は非線形干渉による拘束モードの影響を強く受けていることがわかる。

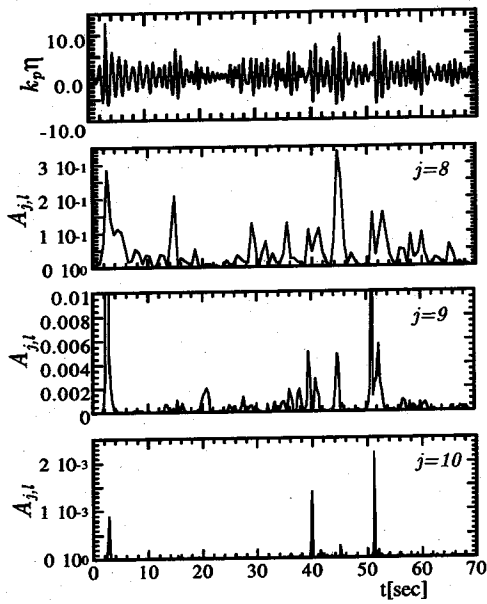
(2) 非線形特性

図-12は、Run 1およびRun 3の測点P5での各ケースの時間波形とウェーブレット分布 $A_{j,t}$ の時間変化を示したものである。エネルギーが最も強い $j=8$ では、時間波形中の波群が活発な時刻において強いエネルギーの集中を見ることができ、Meyerのアナライジング・ウェーブレットはフーリエ空間上で有界であるか

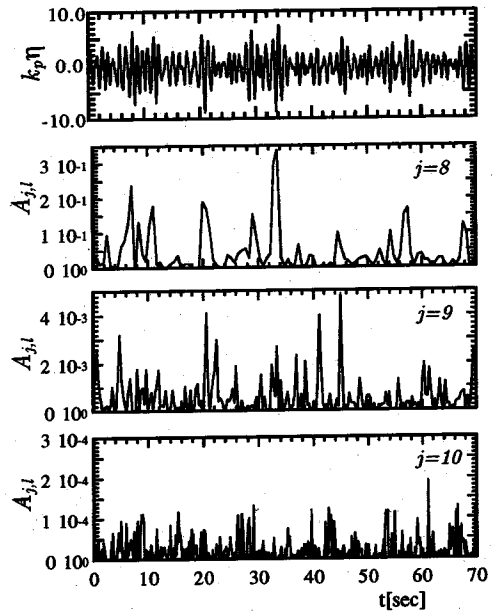
ら、ピークモード ($j=8$) のウェーブレット分布は、低周波と高周波をカットした波列中の代表的なエネルギーの時間分布と見ることができ、Run 1では、 $j=9, 10$ のような高周波のモードのウェーブレット分布が時間的に一様に分布せず、ピークモード ($j=8$) の分布に対してスケール間の相関が見られるのに対し、再合成波であるRun 3では、スケール間にあまり秩序だった関係を見ることできない。また、Run 1では、スケール $j=10$ で約2.5, 40, 51s付近に鋭いピークが見られ、これが目視によって観測された碎波の通過時刻と良く対応していることから、碎波のような強非線形現象は微小スケールにおいて特徴的なエネルギー構造を持っていることがわかる²⁶⁾。ついで、図-13に示すのは、 R_{j_p} のスケール毎の変化であり、Run 1でのP1における相関係数は約0.2と小さな値となっているが、伝播に従い増加し、P5で約0.5となり弱相関となっている。Run 2についても同様な傾向が見られるのに対し、Run 3では全てのスケールで無相関となっており、水槽内で造波された不規則波は線形波と異なり、スケール間で弱相関があることがわかる。

実験で得られた観測波列においても、前節での数値計算による結果と同様、非線形干渉により各スケール間に弱い相関が存在することが確認された。そこで、各スケールでの水面変動の詳細な振舞いを調べるため、P5での各スケールでのウェーブレット係数の確率密度関数を図-14に示す。図中の分布は分散により正規化しており、図中の実線はGauss分布を示す。線形波であるRun 3の結果は、 $j=8\sim 10$ のいずれのスケールにおいてもGauss分布に良く一致している。ところが、Run 1および2ではピークスケール $j=8$ において分布形状はGauss分布にほぼ従っているが、高周波のモードである $j=10$ ではGauss分布からのずれが顕著である。

また、Run 1の分布形状はRun 2に比べて尖りが強く、非線形干渉の影響がより強く出ていることがわかる。この影響を定量的に評価するため、図-15に非線形指標 K_α のスケール分布を示す。Run 1では、スケールが微細になるほど、また伝播距離が長いほど K_α の値は大きくなる傾向にあり、前節の数値計算の結果と比較しても $j=11$ および12において K_α は非常に大きな値となっている。Run 2では、スペクトルのピーク周波数の4倍高調波に相当する $j=10$ まではRun 1同様、線形からのずれが見られるが、 $j=11$ および12においては減少している。このミクロスケールで K_α が減少する傾向は、前節の伝播シミュレーションによる結果では見られなかったものである。数値シミュレーションは重力波のみを対象に行っていたため、線形分散関係より対象とするスケールを換算すると $j=11$ が約2.4cm、 $j=12$ が0.6cmの程度の波長に相当する。つ

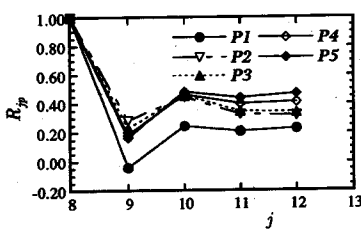


(a) Run 1

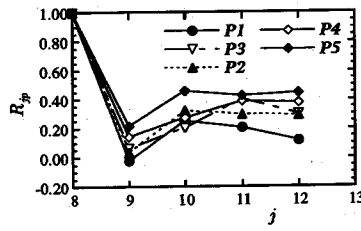


(b) Run 3

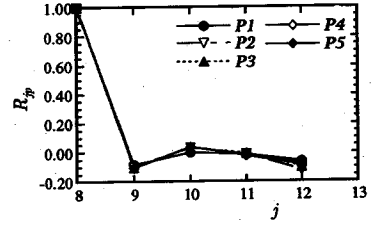
図-12 Run 1 および Run 2 の観測波形およびエネルギーの時間分布 (測点 P5)



(a) Run 1



(b) Run 2



(c) Run 3

図-13 ピークスケール ($j=8$) と各スケールの局所的なエネルギーの時間分布の相関

まり、この場合 $j=11$ は表面張力-重力波、 $j=12$ は表面張力波の領域であり、これらの領域では重力波領域の非線形干渉に起因したエネルギー輸送による拘束が弱くなっているものと予想される。ところが、Run 1 ではこのような傾向は見られず、この領域でも K_α の値は増大している。これは、Run 1 に観測された碎波の影響を示すものであり、碎波によって通常非線形干渉に比べて大規模なエネルギー輸送が行われていることがわかる。また、Run 3 では全てのスケールで線形波に相当する $K_\alpha=3.0$ 、つまり Gauss 分布によく従っている。

6. 結語

本研究では、Meyer のアナライジング・ウェーブレットを基底関数とする正規直交ウェーブレット展開を用いて、スペクトルのピークスケールと微細スケール間の関係を表す相関関係および非線形指標の提案を行い、数値シミュレーションおよび水槽実験より得られた波形に対してその適用性について検討を行った。高次の非線形干渉を考慮した数値シミュレーション結果より、初期のスペクトルが狭帯である場合には非線形干渉による拘束の影響が強く現われ、非線形による高波数モードの拘束は線形波のものより強く、広帯である場合にはほぼ線形波のものに従うことを明らかにした。さら

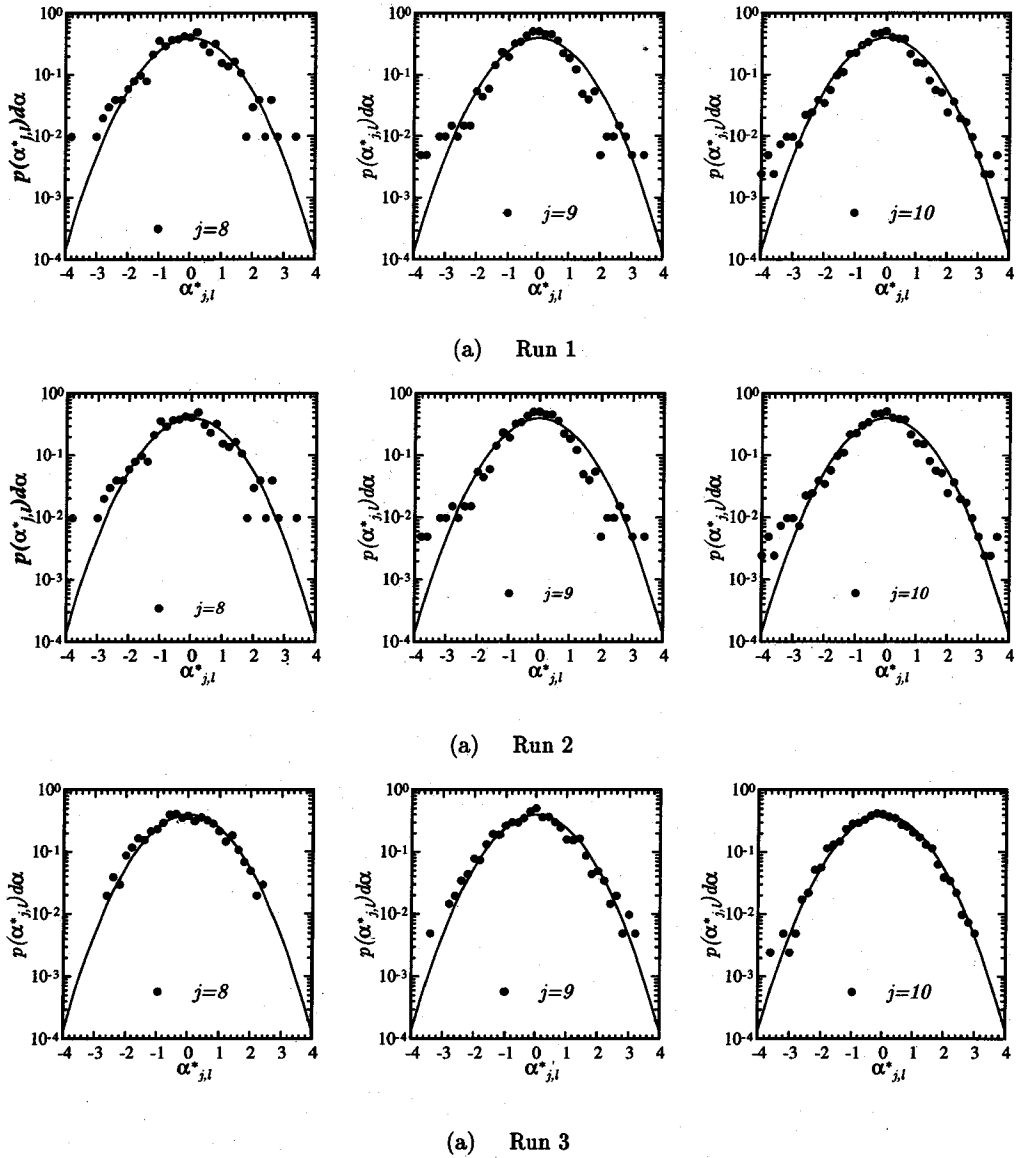


図-14 正規化されたウェーブレット係数の確率密度関数

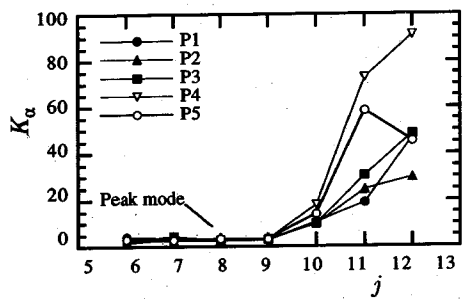
に、水槽実験から砕波を伴う波列は非砕波の波列と比較して強い高周波拘束モードを伴い、波列の振舞いに対して重要な役割を持つことを示した。また、非砕波の波列については、表面張力が支配的となる微細なスケールでピークスケールからの拘束は弱くなり、線形に近い振舞いをするを明らかにした。

謝辞： 本研究中で用いた実験データは西松建設（株）技術研究所において得られたものであり、水槽実験を行うに当りご協力を戴いた多田彰秀氏を初めとする技

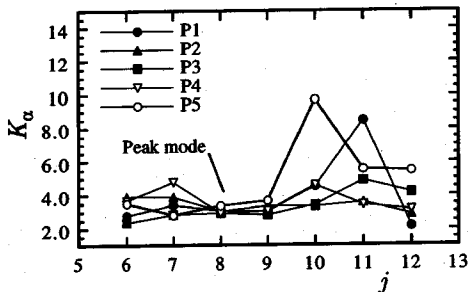
術部海洋技術課の皆様にご感謝するとともに、本研究が文部省科学研究費（特別研究員奨励費 0440）による成果であることを付記する。

参考文献

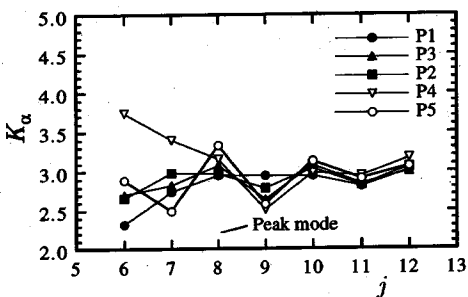
- 1) Cartwright, D.E. and M.S. Longuet-Higgins : The statistical distribution of the maximum of a random function, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A237, pp.212-232, 1956.
- 2) Yuen, H.C. and B.M. Lake : Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.22, pp.67-229.
- 3) 安田孝志, 森 信人, 伊藤一教 : 風波のスペクトルを持つ 1 方向波の共鳴干渉とその影響, *海岸工学論文集*, 第 40



(a) Run 1



(b) Run 2



(c) Run 3

図-15 非線形指標 K_α のスケール分布

卷, pp.101-105, 1993.

- 4) 土屋義人, 安田孝志, 山下隆男, 芝野真次: 非線形波の変調と波群, 海岸工学講演会論文集, 第32巻, pp.179-183, 1985.
- 5) 間瀬 肇, 古屋建史, 岩垣雄一: 単一波群の非線形伝播変形とうねりの波群構造, 海岸工学講演会論文集, 第32巻, pp.189-193, 1985.
- 6) Ramamonjirisoa, A.: Contribution à l'Etude de la Structure Statistique et des Mécanismes de génération

des Vagues de Vent, Thèse de doctorat d'état, Univ. de Provence, France, 1974.

- 7) Mitsuyasu, H., Y.Y. Kuo and A. Masuda: On the dispersion relation of random gravity waves. Part 2. An experiment, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.92, pp.731-749, 1979.
- 8) Crawford, D.R., B.M. Lake, P.G. Saffman and H.C. Yuen: Effects of nonlinearity and spectral bandwidth on the dispersion relation and component phase speeds of surface gravity waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.112, pp.1-32, 1981.
- 9) Tick, L.J.: A non-linear random model of gravity waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.8, No.3, pp.643-652, 1959.
- 10) Masuda, A., Y.Y. Kuo and H. Mitsuyasu: On the dispersion relation of random gravity waves. Part 1. Theoretical framework, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.92, pp.717-730, 1979.
- 11) 日野幹雄: 発達過程にある風波の非定常スペクトル, 海岸工学講演会論文集, 第23巻, pp.313-316, 1976.
- 12) 例えば, チャールズ K. チュウイ: ウェーブレット入門, 東京電気大学出版局, 294p., 1993.
- 13) Shen, Z., W. Wang and L. Mei: Finestructure of wind waves analyzed with wavelet transform, *Jour. Phys. Oceano.*, Vol.22, pp.1085-1094, 1994.
- 14) 小林智尚, 高橋智彦: Wavelet 変換を用いた実海岸の波群の解析とその再生, 海岸工学講演会論文集, 第41巻, pp.186-190, 1994.
- 15) Everson, R., L. Sirovich and K.R. Sreenivasan: *Phys. Lett.*, A145, pp.314, 1990.
- 16) Meyer, Y.: *Wavelets*, eds. J.M. Combes et al., Springer, 1989.
- 17) Yamada, M. and K. Ohkitani: Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.83, No.5, pp.819-823, 1990.
- 18) Hasselmann, K.: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum Part.1 General theory, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.12, pp.481-500, 1962.
- 19) N. Fitzmaurice, D. Gurarie, F. McCaughan and W.A. Woyczynski, *Nonlinear waves and Weak Turbulence*, Birkhäuser, 1993.
- 20) Yamada, M. and K. Ohkitani: An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis, *Progress of Theoretical Physics*, Vol.86, No.4, pp.799-815, 1991.
- 21) She, Z.S., E. Jackson and S.A. Orszag: *Jour. Science Comp.*, Vol.4, pp.407, 1988.
- 22) Longuet-Higgins, M.S.: The effects of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.17, pp.459-480, 1963.
- 23) Huang, N.E. and S.R. Long: An experimental study of the surface elevation probability distribution and statistics of wind generated waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.101, pp.179-200, 1980.
- 24) Dommermuth, D.G. and D.K.P. Yue: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *Jour. Fluid Mech.*, Vol.184, pp.267-288, 1987.
- 25) 安田孝志, 伊藤一教, 森 信人: 1方向不規則波の波高分布に及ぼす非線形干渉の影響について, 土木学会論文集, No.443/II-18, pp.83-92, 1992.
- 26) Mori, N. and T. Yasuda: Orthonormal wavelet analysis for deep-water breaking waves, Proc. 24th ICCE, pp.412-426 1994.

(1995.2.7 受付)

NONLINEAR CHARACTERISTICS OF RANDOM WAVE TRAIN BY WAVELET ANALYSIS

Nobuhito MORI and Takashi YASUDA

This study aims to analyze effects of nonlinear wave-wave interaction of random wave train by using orthonormal wavelet expansion. A nonlinear parameter of random train is developed by differences between the probability density function of the wavelet coefficients and Gaussian. The nonlinear parameter well describe the characteristics of nonlinear random wave train.