

# 日降水時系列データを用いた日流出量の積率推定法とその検証

岳 生<sup>1</sup>・端野道夫<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生員 工修 徳島大学大学院工学研究科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 徳島大学教授 工学部建設工学科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

利水用貯水池計画・管理等への利用を目的として、間欠的生起特性を有する一雨単位の日降水特性を用いて、線形応答関数としての並列タンク付加直列3段タンクモデルを介して、日流出量時系列の積率特性(平均・分散・歪み係数・自己相関係数)を与える理論式を、フィルタード・ポイント過程として誘導した。日降水観測データが数10年以上あれば、日流量観測データが数年程度でも理論式が十分、実用に耐え得ることを早明浦ダムのデータで検証する。

**Key Words :** *filtered point process, response function, rainfall-runoff process, tank model*

## 1. まえがき

わが国の利水計画や利水用貯水池の管理・運用計画においては、1日ないし半旬(5日)単位の流量データを基礎データとして検討されるが、日流量データが利用可能でも、数年程度の短期間しかないことが多い。たとえ、統計量として十分な長さ(一説には40年程度以上)の流量観測データがあったとしても、都市化や流域開発による流出特性の経年的変化が激しい流域のデータであれば、いわゆる流量データの等質性が崩れているため、統計量としての信頼性が低くなる。

したがって、本研究は、統計量としての等質性が流量よりはるかに高いと考えられる降水データより解析を始めるという立場に立つ。この場合、膨大な年数分の乱数発生により日降水量時系列をデータ・ジェネレーションし、タンクモデル等の適切な流出解析モデルを介して日流量時系列に変換し、これより必要な流量の統計量を計算するという方法が従来からの唯一の実用的方法であった。本研究では、このような膨大な乱数発生に抛らずに、降水特性から直接、ある月の流量の平均・分散・歪み係数及び自己相関係数なる基礎統計量を計算する理論式をフィルタード・ポイント過程として誘導する。ただし、流出応

答関数のパラメータ同定ができる程度の日流量観測データがあるものとする。

日降水特性を一雨単位ではなく、日単位でモデル化した著者らの研究<sup>1)</sup>では、線形応答関数として採用した直列3段タンクモデルは表面流出成分を十分に再現することができなく、さらに改良を要することが明らかになっている。また、日降水特性を日単位でモデル化すると、洪水期の流量の分散を過小推定することが示唆された。したがって、本論文では日降水特性を一雨単位でもモデル化し、降水のクラスター性と一雨の内の日降水量時系列の自己相関性を考慮した理論展開を行い、日単位でのモデル化の場合と比較する。

地球温暖化等による日降水特性の経年的変化が流域からの低水流出量の流況変化にどのような影響を与えるかを定量的に明らかにしようとするならば、気温との関連性を考慮しながら日降水時系列の非定常性の解析から始めねばならないだろう。このような場合にも、非定常日降水時系列から必要な時間単位(例えば、半旬、旬、月)の流量の積率を本理論から得ることができるので、気温と低水流況の関連を明らかにする有力な基本的手法となり得ると考える。

## 2. 降水時系列を日単位でモデル化した場合

### (1) フィルタード・ポイント過程としての流出量とその積率

日降水時系列  $x_t(t \geq t_0)$  をマークト・ポイント過程とし、 $n$  番目の降水発生日を  $\tau_n$ 、日降水量（マーク）を  $u_n$  とする。また、日降水発生の計数過程  $N_t(t \geq t_0)$  は日降水量  $u_n$  と独立であるとする、フィルタード・ポイント過程としての流出量  $y_t(t \geq t_0)$  は次式のように、日降水量に対する応答の重ね合わせの形で与えられる。

$$y_t = \sum_{n=1}^{N_t} u_n \cdot h(t - \tau_n) \quad (1)$$

ここに、 $h(s)$  は単位日降水量に対する流出量のパルス線形応答関数である。特に、 $N_t$  は発生率  $\lambda$  のポアソン過程、 $u_n$  は平均  $\theta_u$  の指数分布に従う確率変数とし、応答関数として  $h(s) = \exp(-\theta_y s)$  なる指数関数を採用した場合を ショット・ノイズ過程<sup>2), 3)</sup> といひ、3つのパラメータ  $\lambda, \theta_u, \theta_y$  によって規定される。

本論文では、1か月程度の期間  $(t_0, T)$  における日降水回数  $N_T$  が従う確率分布として、ポアソン分布に固定するのではなく、次式のような平均  $M_N$  と分散  $V_N$  の大小関係によって、二項分布・ポアソン分布・負の二項分布のいずれかを採用することにする。二項分布のとき

$$M_N = k_N \cdot p, \quad V_N = k_N \cdot p \cdot q \quad \therefore M_N > V_N \quad (2a)$$

ポアソン分布のとき

$$M_N = V_N = \Lambda \quad \therefore M_N = V_N \quad (2b)$$

負の二項分布のとき

$$M_N = k_N \cdot q/p, \quad V_N = k_N \cdot q/p^2 \quad \therefore M_N < V_N \quad (2c)$$

ここに、 $k_N, p, q (=1-p)$  は二項分布、負の二項分布の、 $\Lambda$  はポアソン分布のパラメータである。

流出量  $y_t$  の確率分布の特性関数  $\phi_{y_t}(z) = E[\exp(iz y_t)]$  は、条件付き期待値を用いれば次式のように定義される。

$$\begin{aligned} \phi_{y_t}(z) &= Pr(N_T=0) + \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N_T=n) \\ &\cdot E[\exp[iz \sum_{m=1}^n u_m h(t - \tau_m) | N_T=n]] \quad (3) \end{aligned}$$

ここに、期待値の中の  $\sum$  の値は、発生時刻  $\tau_m$ 、( $m=1, 2, \dots, n$ ) をランダムに並べ替えても不変であり、また、 $n$  が与えられたときの発生時刻

$\tau_m$ 、( $m=1, 2, \dots, n$ ) は互いに独立で同一分布に従うとする。このことより、それらの共通な確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(\tau) = \lambda \tau / \left( \int_{t_0}^T \lambda \sigma d\sigma \right) = \lambda \tau / E(N_T) \quad (4)$$

ここに、 $\lambda \tau$  は時刻  $\tau$  における降水日発生確率である。さらに、マーク変数である  $u_m$ 、( $m=1, 2, \dots, n$ ) もまた互いに独立で同一の分布に従うことから次式が得られる<sup>4), 5)</sup>。

$$\begin{aligned} E[\exp[iz \sum_{m=1}^n u_m h(t - \tau_m) | N_T=n]] &= \{E(N_T)\}^{-1} \\ &\cdot \int_{t_0}^T \lambda \tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t - \tau))] d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

したがって、式(5)を式(3)に代入すれば、フィルタード・ポイント過程  $y_t$  の特性関数が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{y_t}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(N_T=n) \cdot \{E(N_T)\}^{-1} \\ &\cdot \int_{t_0}^T \lambda \tau E[\exp(iz \cdot u \cdot h(t - \tau))] d\tau \quad (6) \end{aligned}$$

$N_T$  の具体的な確率分布として、二項分布・ポアソン分布・負の二項分布を式(6)に用い、 $t < \tau$  のとき  $h(t - \tau) = 0$  であることを考慮すれば、それぞれの場合の特性関数が得られる<sup>1)</sup>。

時点  $t(t_0 \leq t \leq T)$  における流出量  $y_t$  の  $n$  次のキュムラントを  $\gamma_n$  とすれば、 $\phi_{y_t}(z)$  より  $\gamma_n$  を計算する式  $i^n \gamma_n = (d^n \ln \phi_{y_t}(z) / dz^n)$ 、( $z=0$ ) を用いれば、次式が得られる<sup>1)</sup>。

$$\gamma_1(y_t) = E(u) \cdot \int_{t_0}^t \lambda \tau h(t - \tau) d\tau \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(y_t) &= E(u^2) \cdot \int_{t_0}^t \lambda \tau h(t - \tau)^2 d\tau \\ &\pm \gamma_1(y_t)^2 / k_N \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_t) &= E(u^3) \cdot \int_{t_0}^t \lambda \tau h(t - \tau)^3 d\tau \\ &\pm 3\gamma_2(y_t)\gamma_1(y_t) / k_N - \gamma_1(y_t)^3 / k_N^2 \quad (9) \end{aligned}$$

また、 $y_t$  の共分散関数  $Cov(y_t, y_{t+J})$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_{t+J}) &= E(u)^2 \cdot \int_{t_0}^t \lambda \tau h(t - \tau) \\ &\cdot h(t+J - \tau) d\tau \pm \gamma_1(y_t)^2 / k_N \quad (10) \end{aligned}$$

ここに、複号±の正符号は、 $N_t$  が負の二項分布に、負符号は  $N_t$  が二項分布に従う場合を示し、 $N_t$  がポ

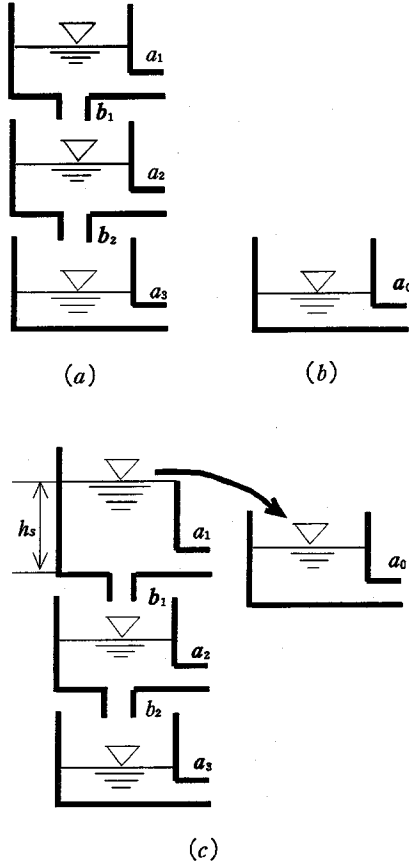


Fig. 1 Illustration of Tank Models

アソン分布に従う場合は式(8)~(10)における  $k$  を含む項を無視した場合になる。なお、 $E(u^i)$  は日降水量  $u$  の原点まわりの  $i$  次モーメントである。

## (2) パルス線形応答関数の構造

実際の河川流域からの流出量は表面流出・中間流出(早い, 遅い)・地下水流出等の流出成分が含まれていることを考え、Fig. 1 に示すような3つのタイプの応答関数を設定し、どのタイプが応答関数として適切であるかを比較検討する。一つは Fig. 1 (a) に示すように、流出孔が各タンクの底部にある直列3段タンクモデルであり、これは本理論のフィルタード・ポイント過程の前提条件である線形応答関数を与える。二つ目は Fig. 1 (b) に示すような、最も単純な一段タンクモデルであり、これはショット・ノイズ過程<sup>2), 3)</sup>で採用されている線形応答関数を与える。三つ目は両者のタンクモデル ((a), (b)) を並列に置いた、並列タンク付加(直列3段タ

ンク)モデル (c) であり、直列3段タンクモデル (a) では、表面流出成分が卓越する高水の再現性が悪く、これを改善するためである。したがって、並列に付加された1段タンクは、表面流出成分を受けるタンクと見なすことになる。

Fig. 1 に記すようなタンクの孔の大きさを示す記号を用いると、直列3段タンクモデルの線形応答関数  $h(s)$  は次式のようになる。

$$h(s) \equiv h_1(s) = 1 + D_{11} \exp(-C_1 \cdot s) + D_{21} \exp(-C_2 \cdot s) + D_{31} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (0 \leq s < 1) \quad (11a)$$

$$h(s) \equiv h_2(s) = D_{12} \exp(-C_1 \cdot s) + D_{22} \exp(-C_2 \cdot s) + D_{32} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (1 \leq s) \quad (11b)$$

ここに、

$$C_1 = a_1 + b_1,$$

$$C_2 = a_2 + b_2,$$

$$D_{11} = [a_1/b_1 - (C_1 \cdot a_2 - C_2 \cdot a_3) / \{(C_1 - C_2)(C_1 - a_3)\}] \cdot b_1 / C_1,$$

$$D_{21} = b_1(a_2 - a_3) / \{(C_1 - C_2)(C_2 - a_3)\},$$

$$D_{31} = b_1 b_2 / \{(C_1 - a_3)(C_2 - a_3)\},$$

$$D_{12} = D_{11} \{\exp(C_1) - 1\},$$

$$D_{22} = D_{21} \{\exp(C_2) - 1\},$$

$$D_{32} = D_{31} \{\exp(a_3) - 1\}$$

式(11) から明らかなように、 $h(s)$  は低減係数の異なる指数関数の和で与えられることになる。1段タンクモデルの応答関数は直列3段タンクモデルの最上部のタンクで浸透孔の大きさ  $b_1$  をゼロとしたものである。並列タンク付加モデル(c)の応答関数は直列3段タンク(a)と1段タンクモデル(b)の二種類の線形応答関数をもつことになる。

さて、利水計画等への利用を考え、流出量時系列  $\{y_t\}$  を半旬程度の一定期間  $J$  (日) で平均化する。

$$Y_t = J^{-1} \int_{t-J}^t y_s ds \quad (12)$$

このとき、式(12)に式(1)を代入すれば、

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} u_n \cdot h_f(t - \tau_n) \quad (13)$$

ここに、 $h_f(s)$  は次式で与えられる。

1)  $0 < s < 1$  のとき

$$\begin{aligned} h_J(s) &\equiv h_{J1}(s) \\ &= J^{-1} \int_0^s h_1(\sigma) d\sigma \\ &= E_{001} + E_{01} \cdot s + E_{11} \exp(-C_1 \cdot s) \\ &\quad + E_{21} \exp(-C_2 \cdot s) + E_{31} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (14a) \end{aligned}$$

2)  $1 < s < J$  のとき

$$\begin{aligned} h_J(s) &\equiv h_{J2}(s) \\ &= J^{-1} \left\{ \int_0^1 h_1(\sigma) d\sigma + \int_1^s h_2(\sigma) d\sigma \right\} \\ &= E_{002} + E_{02} \cdot s + E_{12} \exp(-C_1 \cdot s) \\ &\quad + E_{22} \exp(-C_2 \cdot s) + E_{32} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (14b) \end{aligned}$$

3)  $J < s < (J+1)$  のとき

$$\begin{aligned} h_J(s) &\equiv h_{J3}(s) \\ &= J^{-1} \left\{ \int_{s-J}^1 h_1(\sigma) d\sigma + \int_1^s h_2(\sigma) d\sigma \right\} \\ &= E_{003} + E_{03} \cdot s + E_{13} \exp(-C_1 \cdot s) \\ &\quad + E_{23} \exp(-C_2 \cdot s) + E_{33} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (14c) \end{aligned}$$

4)  $(J+1) < s$  のとき

$$\begin{aligned} h_J(s) &\equiv h_{J4}(s) \\ &= J^{-1} \int_{s-J}^s h_2(\sigma) d\sigma \\ &= E_{004} + E_{04} \cdot s + E_{14} \exp(-C_1 \cdot s) \\ &\quad + E_{24} \exp(-C_2 \cdot s) + E_{34} \exp(-a_3 \cdot s) \quad (14d) \end{aligned}$$

ここに、 $E_{00i}$ ,  $E_{0i}$ ,  $E_{1i}$ ,  $E_{2i}$ ,  $E_{3i}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) は  $D_{0j}$ ,  $D_{1j}$ ,  $D_{2j}$ ,  $D_{3j}$  ( $j=1, 2$ ) の関数であり、パラメータ  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$  の関数でもある。

したがって、平均化した流出量  $Y_t$  のキュムラントと共分散は式(7)~(10)で、 $y_t$  を  $Y_t$  に、 $h(s)$  を  $h_J(s)$  に置き換えた式で与えられる。並列タンク付加モデルの場合は、2種類の応答関数を持つから式(7)~(10)にさらに1段タンク(表面流出タンク)の応答関数の項を追加するとともに、降水量と蒸発散量の補正係数を付けて一般化すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \gamma_1(Y_t) &= f_P \{ E(u) \lambda \int_0^t h_J(s) ds \\ &\quad + P_r \cdot E(u_s) \int_0^t h_{Js}(s) ds \} \\ &\quad - f_E E_P (D_t - M_N) / D_t \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(Y_t) &= f_P^2 \{ (u^2) \lambda \int_0^t h_J(s)^2 ds \\ &\quad + P_r \cdot E(u_s^2) \int_0^t h_{Js}(s)^2 ds \} \\ &\quad \pm \gamma_1(Y_{1t}) / k_N^2 \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(Y_t) &= f_P^3 \{ E(u^3) \lambda \int_0^t h_J(s)^3 ds \\ &\quad + P_r \cdot E(u_s^3) \int_0^t h_{Js}(s)^3 ds \} \\ &\quad \pm 3 \gamma_2(Y_{1t}) \gamma_1(Y_{1t}) / k_N - \gamma_1(Y_{1t})^3 / k_N^2 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t+J}) &= f_E^2 \{ E(u)^2 \lambda \int_0^t h_J(s) \cdot h_J(s+J) ds \\ &\quad + P_r \cdot E(u_s)^2 \cdot \int_0^t h_{Js}(s) \cdot h_{Js}(s+J) ds \} \quad (18) \end{aligned}$$

ここに、 $P_r$  は並列付加タンクから(表面)流出が起る確率;  $\gamma_i(Y_{1t})$ , ( $i=1, 2$ ) はそれぞれ式(15), (16)で  $P_r=0$  とした場合に相当し、直列3段タンクの場合の  $J$  日平均流出量の平均, 分散;  $D_t$  は対象月の日数;  $\lambda = M_N / D_t$  は平均日降水発生率;  $h_J(s)$  は直列3段タンクの応答関数;  $h_{Js}(s)$  はモデル(c)の並列付加(1段タンク)の応答関数;  $E(u^i)$ , ( $i=1, 2, 3$ ) は表面流出の発生がない一雨降水日における日降水量  $u$  の  $i$  次モーメント;  $E(u_s^i)$ , ( $i=1, 2, 3$ ) は並列タンクから流出が生じている日 ( $y_t > y_s = (a_1 + b_1) \cdot h_s$ ) の一雨降水日における日降水量  $u_s$  の  $i$  次モーメント;  $f_P$  は対象流域の流域平均降水量とするための地点観測降水量に乗じる補正係数;  $f_E$  は月平均気温より得られた Hamon 式による計算値に乗じる補正係数である。

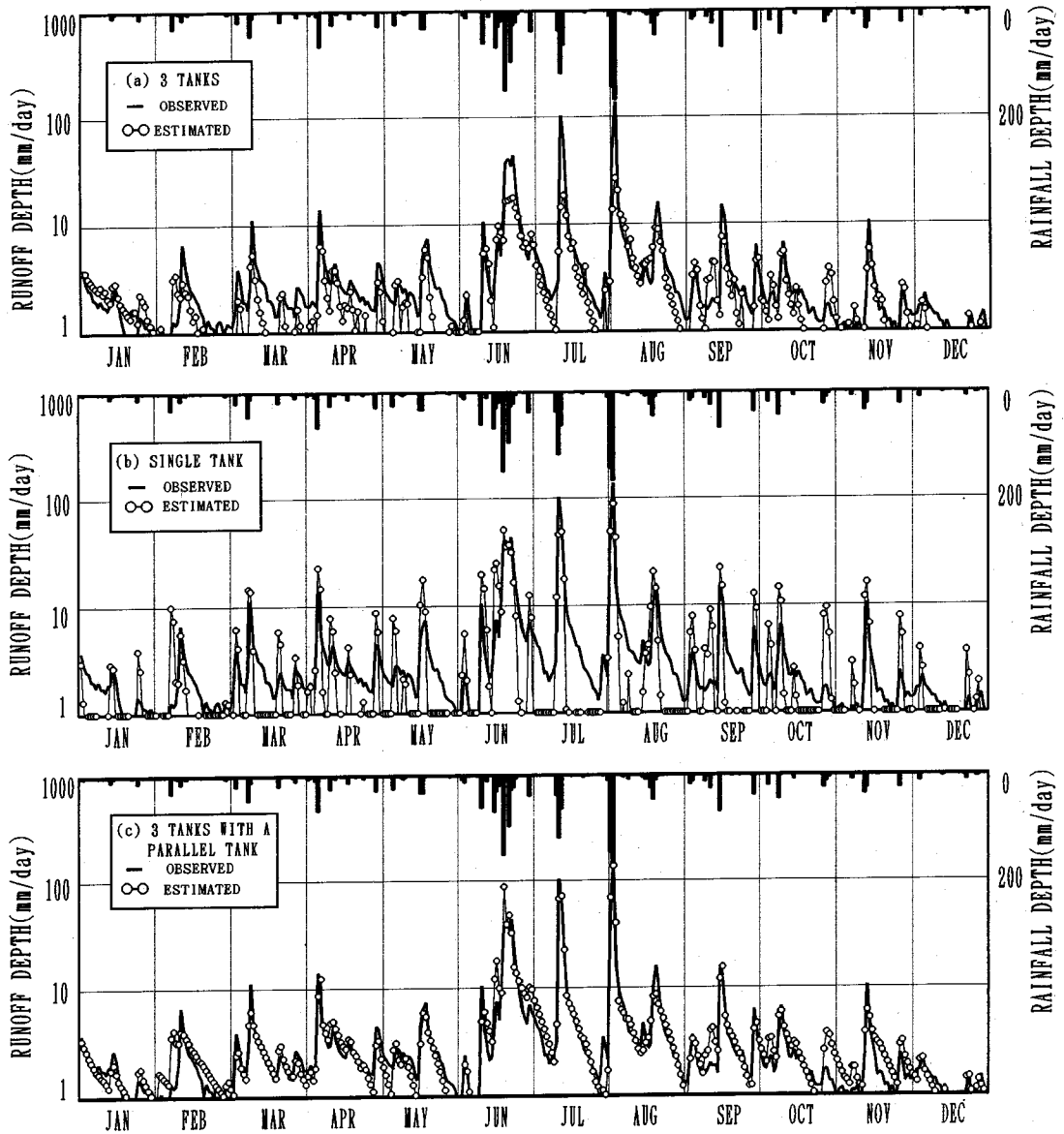
なお、応答関数  $h_J(s)$  についてのべき乗の定積分は次数  $n$  と多項式の項数が増えるにつれて、急激に煩雑となり、手計算での解析解の誘導はほとんど不可能になる。ちなみに、パソコン上で作動する数式処理システム REDUCE (FORTRAN 形式出力) を援用した結果、共分散で約150行、3次のキュムラントでは約260行を要した<sup>1)</sup>。従って、ここでは台形公式による数値積分法を用いることにした。

### (3) パラメータ同定

高知県の早明浦ダム流域 (472km<sup>2</sup>) を対象とし、ダムサイト直下流の本山での日降水量と日流出量のデータを用い、タンクモデルのパラメータ ( $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$ ,  $a_0$ ,  $h_s$ ) と二つの補正係数  $f_P$ ,  $f_E$  を同定する。本流域は積雪・融雪があまり卓越していな

**Table 1** Identified Parameters of Tank Models

model	$a_0$	$h_s$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$a_3$
single tank	1.817						
3 tanks			0.421	1.305	0.140	0.192	0.049
3 tanks with a parallel tank	4.213	22.22	0.269	1.545	0.094	0.038	0.022



**Fig. 2** Estimated Hydrographs by Tank Models

いので、流出機構に明確な季節変化はないと思われるゆえ、タンクモデルのパラメータは年間不変とし、 $f_p$ ,  $f_E$  のみを季節的（5～7月，8～9月，10～11月，12～4月）に変化させ、シンプレックス法によるパラメータ同定を1977～1989年の各年に実施した。得られたタンクモデルパラメータの平均を Table 1 に示す。蒸発散補正係数  $f_E$  については、8～9月は0.91、それ以外は、あまり差がなかったので平均し0.49とした。計算日流量の実測日流量（mm/day）に対する適合度を Fig. 2 (a), (b), (c) に示す。直列3段タンクモデル(a)では、低水部の再現性はほぼ良好であるが、洪水期では高水ピーク付近で過小気味の傾向が見られる。1段タンクモデル(b)では、高水部は程々に、再現しているものの、低水部は全く再現されていない。並列タンク付加モデル(c)では、この点も改善されている。このことから、本対象流域のように、表面流出が卓越する流域でも、各タンクの流出孔の位置を各タンク底部とした、簡単な直列3段タンクに、単純1段タンクを並列に付加するだけで十分に表面流出を再現できることが明らかである。一般によく使われている直列4段タンクモデルに比べ、その分だけパラメータの節約ができたことになる。

ところで、本直列3段タンクモデルの最上段タンクの底部流出孔は、表面流出成分と言うよりも、むしろ早い中間流出成分を表現していると考えられる。通常の直列3段タンクで表面流出成分を表現するには、最上段タンクに、もう一つ流出孔を開けるが、そうすると、応答関数が非線形となり、本理論の前提条件が崩れてしまうことになる。

#### (4) 5日平均流出量の積率計算と検討

早明浦ダム流域では日降水量及び日流量の観測データは基本統計量を計算するに十分長期間存在するが、この山地森林流域の水文学的状況にはほとんど変化なく、流域の変遷等によるデータの非等質性はほとんど問題にならないとして、理論を検証する。約31年間の早明浦ダム日流入量の実測データから各月ごとに、日平均流量の平均、分散及び歪み係数を計算し、その確率分布を3母数ガンマ分布で近似し、これより各月の表面流出発生確率  $P_r\{y_t > y_c = 40 \text{ mm/day}\} = P_r$  を計算する。次に、5日平均流量の月平均値を与える式(15)を用いて降水量の補正係数の  $f_p$  を逆算する。これらの  $P_r$ ,  $f_p$  を式(16)～(18)に用い、5日平均流量の分散・歪み係数・自己相関係数を計算する (Fig. 3 参照)。特に、平均の次に重要な基本統計量である分散については、計

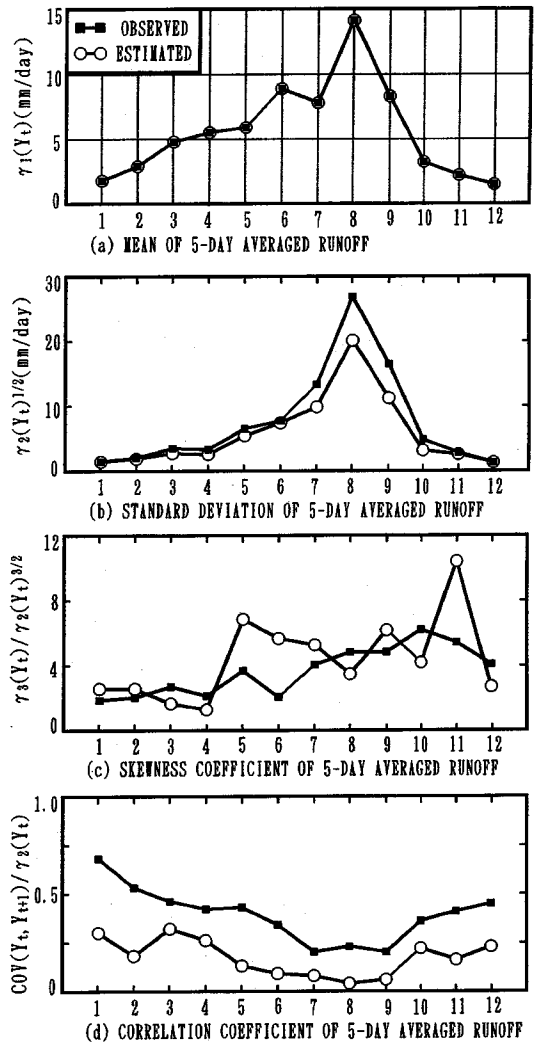


Fig. 3 Results of Estimated Cumulants Based on Daily Rainfall-Modeling

算と実測と差が、8月を中心とした表面流出発生期間で大きくなるのが目に付く。歪み係数及び相関係数については分散の精度に支配されるから、分散の精度の悪い月では歪み係数及び相関係数の精度を議論しても意味がない。

8月を中心とした夏期での分散を過小に推定している主原因は、前述(2.(1))のように、日降水過程がランダムであるとした基本仮定にあるものと考えられる。日降水特性を日単位でモデル化すると、例えば、2日続いた豪雨でも、単独に別々の(全く離れた)日に降ったことになり、その結果、計算流

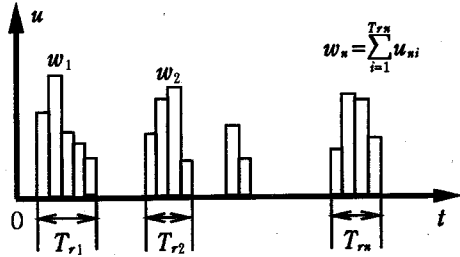


Fig. 4 Schematic Definition of One Storm Cluster

量のピークが実際より過小になり、理論分散が実測より小さくなるように思われる。洪水をもたらす豪雨では数日間降り続くといったクラスター性と、降水量自体の自己相関性が強いことを考えれば、日降水過程を一雨単位でモデル化するとともに、(降水継続日数が2日以上の場合)、一雨内日降水量の自己相関係数も考慮に入れたモデル化が必要である。

### 3. 降水時系列を一雨単位でモデル化した場合

#### (1) 一雨降水特性の定義

Fig. 4のように、日単位で連続して降る雨(日降水量0.5 mm以上)を一雨と定義する。ここに、横軸は日単位の時間 $t$ 、縦軸は日降水量 $u$ を表す。ある年ある月の $n$ 番目に発生した一雨の連続降水日数を $T_{rn}$ 、一雨の降水量を $w_n$ と定義すると、Fig. 4中に示すように $w_n$ は $n$ 番目の一雨降水の日降水量 $u_{ni}$ の和で表される。

#### (2) 一定期間 $J$ (日)で平均した流出量の積率

降水量時系列を一雨単位でモデル化する原理は、日単位での場合とほぼ同じである。すなわち、一雨降水時系列 $X_i(t \geq t_0)$ をマークト・ポイント過程とし、一雨 $w_n$ は互いに独立であり、一雨降水発生の計数過程 $N_c(t \geq t_0)$ は一雨降水量 $w_n$ と独立である。なお、一ヶ月間における一雨降水発生回数 $N_c$ と一雨連続降水日数 $T_r$ の従う確率分布は、日降水発生回数と同じように、その平均と分散との大小関係により、二項分布・ポアソン分布・負の二項分布のいずれかを採用する。

$J$ 日平均流量のキュムラント $\gamma_i(Y_i)$ の内、直列3段タンクの応答関数 $h_j(s)$ (表面流の発生がない場合)を持ち、一雨降水の計数過程をポアソン過程とした場合のキュムラント $\gamma_i(Y_i^{(P)})$ は、式(15)~

(17)を参考に、1カ月間で、条件付き期待値を用いると次式ようになる。

$$\gamma_i(Y_i^{(P)}) = D_i^{-1} \sum_{n=1}^{D_i/2} \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{D_i-2j+1} E \left[ \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{m=1}^{l_j} u_m \cdot h_j(t-\tau_m) \right\}^i d\tau \mid T_j=l_j, N_c=n \right] \cdot P[T_j=l_j \mid N_c=n] \cdot P[N_c=n] \quad (19)$$

ここに、 $\tau_m = \tau_{m-1} + 1$  ( $m=2, \dots, l_j$ )、 $\tau_1 = \tau$ ;  $P[\cdot]$ は表面流の発生がない一雨について $[\cdot]$ 内の取る確率;  $N_c$ はある年ある月の一雨降水回数;  $T_j$ はある年ある月における $j$ 番目の一雨の降水継続日数である。 $\int \left\{ \sum u_m \cdot h_j(t-\tau) \right\}^i d\tau$ と $(T_j, N_c)$ とは互いに独立、 $T_j$ と $N_c$ は互いに独立と見なせるから、式(19)は次式になる

$$\gamma_i(Y_i^{(P)}) = D_i^{-1} \sum_{n=1}^{D_i/2} \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{D_i-2j+1} P[T_j=l_j] \cdot P[N_c=n] \cdot E \left[ \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{m=1}^{l_j} u_m h_j(t-\tau_m) \right\}^i d\tau \right] \quad (20)$$

特に、式(20)で $P[T_j=l_j]=1, l_j=1$ と置けば、次式のようになる。

$$\gamma_i(Y_i^{(P)}) = \lambda \cdot E(u^i) \int_{t_0}^t h_j(t-\tau)^i d\tau \quad (21)$$

$$\left( \lambda = D_i^{-1} \sum_{n=1}^{D_i/2} n \cdot P[N_c=n] \right)$$

式(21)は降水過程を日単位でモデル化した場合の式(15)~(17)の第一項(降水計数過程をポアソン過程とし、 $f_r=1, E_r=0$ とした場合)に一致する。

表面流出が発生した場合の $J$ 日平均流量の条件付キュムラント(並列付加タンクの応答関数に対する)は式(20)で $N_c=n=1, D_i=1, h_j(s)=h_{js}(s)$ と置き換えた式で与えられる。結局、一雨単位でモデル化した場合のキュムラントと共分散は次式のようにまとめられる。

$$\gamma_1(Y_i) = f_r \left\{ D_i^{-1} E(u) H_j^{(1)} \sum_{n=1}^{D_i/2} P[N_c=n] L(n) + P_r \cdot E(u_s) H_{js}^{(1)} L(1) \right\} - f_s E_r \{ D_i - E(N_c) E(T_r) \} / D_i \quad (22a)$$

$$\gamma_2(Y_i) = f_r^2 D_i^{-1} \left\{ E(u^2) H_j^{(2)} \sum_{n=1}^{D_i/2} P[N_c=n] L(n) + 2V(u) \sum_{n=1}^{D_i/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_i-2j+1} P[T_j=l_j] \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) \rho^m H_j^{(1,1)}(m) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 2E(u)^2 \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \\
& \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) H_f^{(1,1)}(m) \} - \gamma_1 (Y_{1t})^2 / k_N \\
& + P_r f_p^2 \{ E(u_s^2) H_{f_s}^{(2)} L(1) + 2V(u_s) \\
& \cdot \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) \rho_s^m H_{f_s}^{(1,1)}(m) \\
& + 2E(u_s)^2 \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) \\
& \cdot H_{f_s}^{(1,1)}(m) \} \quad (22b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 (Y_t) &= f_p^3 D_t^{-1} \{ E(u^3) H_f^{(3)} \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] L(n) \\
& + 3E(u^2) E(u) \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \\
& \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) [H_f^{(2,1)}(m) + H_f^{(1,2)}(m)] + 6E(u)^3 \\
& \cdot \sum_{n=1}^{D_t-1} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=3}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \sum_{k=1}^{l_j-2} \sum_{m=k+1}^{l_j-1} \\
& \cdot (l_j-m) \cdot \int_{t_0}^{D_t} h_f(s) h_f(s+k) h_f(s+m) ds \} \\
& - 3\gamma_1 (Y_{1t}) \gamma_2 (Y_{1t}) / k_N - \gamma_1 (Y_{1t})^3 / k_N^2 \\
& + P_r f_p^3 \{ E(u_s^3) H_{f_s}^{(3)} L(1) + 3E(u_s^2) E(u_s) \\
& \cdot \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) [H_{f_s}^{(2,1)}(m) \\
& + H_{f_s}^{(1,2)}(m)] + 6E(u_s)^3 \sum_{l_1=3}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \\
& \cdot \sum_{k=1}^{l_1-2} \sum_{m=k+1}^{l_1-1} (l_1-m) \int_{t_0}^{D_t} h_{f_s}(s) h_{f_s}(s+k) \\
& \cdot h_{f_s}(s+m) ds \} \quad (22c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t+j}) &= D_t^{-1} f_p^2 \{ E(u)^2 H_f^{(1,1)}(J) \\
& \cdot \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] L(n) + 2V(u) \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \\
& \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) \rho_s^m H_f^{(1,1)}(J+m) \\
& + 2V(u) \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) \rho_s^m H_f^{(1,1)}(J-m) \} \\
& + 2E(u)^2 \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \\
& \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) H_f^{(1,1)}(J+m) \\
& + 2E(u)^2 \sum_{n=1}^{D_t/2} P[N_c=n] \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=2}^{D_t-2j+1} P[T_j=l_j] \\
& \cdot \sum_{m=1}^{l_j-1} (l_j-m) H_f^{(1,1)}(J-m) \} - \gamma_1 (Y_{1t})^2 / k_N \\
& + P_r f_p^2 \{ E(u_s)^2 H_{f_s}^{(1,1)}(J) L(1) + 2V(u_s) \\
& \cdot \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) \rho_s^m H_{f_s}^{(1,1)}(J+m) \\
& + 2V(u_s) \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) \rho_s^m \\
& \cdot H_{f_s}^{(1,1)}(J-m) + 2E(u_s)^2 \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \\
& \cdot \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) \rho_s^m H_{f_s}^{(1,1)}(J+m) + 2E(u_s)^2 \\
& \cdot \sum_{l_1=2}^{D_t-1} P[T_1=l_1] \sum_{m=1}^{l_1-1} (l_1-m) H_{f_s}^{(1,1)}(J-m) \} \\
& \quad (22d)
\end{aligned}$$

ここに、 $H_f^{(i)} = \int_0^{D_t} h(s)^i ds$ ;  $H_{f_s}^{(i)} = \int_0^{D_t} h_{f_s}(s)^i ds$ ,  
 $(i=1, 2, 3)$ ;  $H_f^{(i,j)}(m) = \int_0^{D_t} h_f(s)^i \cdot h_f(s+m)^j ds$ ;  
 $H_{f_s}^{(i,j)}(m) = \int_0^{D_t} h_{f_s}(s)^i \cdot h_{f_s}(s+m)^j ds$ ,  $L(n) = \sum_{j=1}^n \sum_{l_j=1}^{D_t-2j+1} l_j$   
 $\cdot P[T_j=l_j]$ ;  $\rho_s$  はそれぞれ、表面流の発生がない一雨降水日内の日降水量  $u$ 、表面流の発生がある一雨降水日内の日降水量  $u_s$  の自己相関係数;  $E(N_c)$  は表面流の発生がない一雨の月平均一雨発生回数;  $E(T_r)$  は一雨平均降水継続日数である。

### (3) 積率理論式の適合性の検討

日流量データが十分ある場合(ケース1)と日流量データが十分でない場合(ケース2)の理論積率を計算し、実測積率と比較する。

ケース1の場合、降水時系列を日単位でモデル化した場合(2.(4))と同様に、式(22)における降水量補正係数  $f_p$  以外のすべては日降水及び日流量の観測データが30年程度以上あるとする。従っ



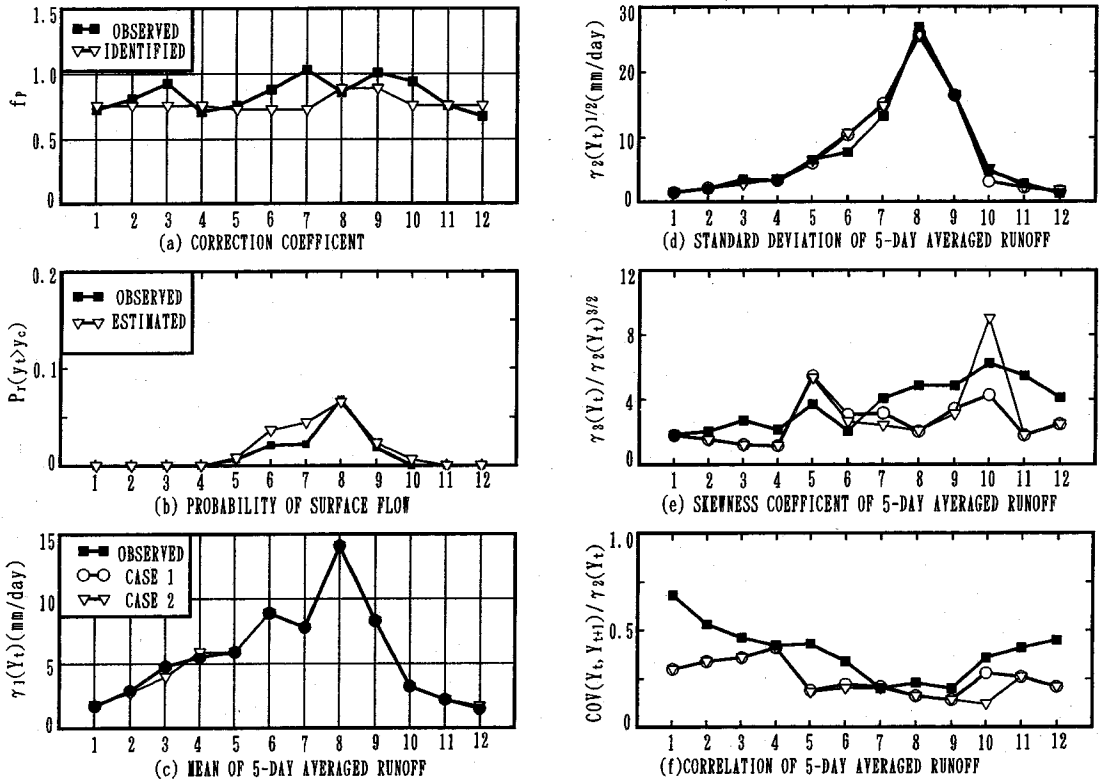


Fig. 5 Results of Estimated Cumulants Based on One Storm Cluster Modeling

て、降水の補正係数  $f_p$  を平均に関する式 (22a) より逆算し、これを式(22b)~(22d)の右辺に代入して、5日平均流量の分散、歪み係数及び自己相関係数を計算する。

ケース2の場合、日流量観測データは数年程度あり、信頼のできるパラメータ同定ができ、各月の5日平均流量の平均の推定値が信頼できる場合を想定する。日流量の平均の推定値の信頼性を増すために、並列タンク付加モデルを用いて観測日降水時系列を日流量時系列に変換し、日流量データを補足することも簡単にできるが、いずれにせよ、ここでは5日平均流量の平均の推定値だけは信頼できるとする。この場合、降水の補正係数  $f_p$  も、他のパラメータと同様、流出計算により同定された値を用い、表面流の発生確率  $P_f$  を平均に関する式(22a)より逆算し、これを式(22b)~(22d)の右辺に代入して、5日平均流量の分散、歪み係数及び自己相関係数を計算する。

ところで、日降水時系列を一雨単位でモデル化す

る際、表面流の発生がある一雨と表面流の発生がない一雨に分類し、それぞれについて、一雨の月発生回数の確率分布、一雨の継続日数の確率分布、および一雨の日降水量の確率分布と日降水量の自己相関係数を求めねばならない。このときの表面流発生限界(早明浦ダム流域では  $y_c = 40\text{mm/day}$ )に対応する一雨降水量  $w_c$  を数年の日流量データを用いて回帰分析した結果、 $w_c = 195\text{mm}$  と設定した。

ケース1、2の理論積率を実測積率と比較すれば Fig. 5 のようであり、いずれの理論積率も、日降水時系列を日単位でモデル化した場合 (Fig. 3) に比べ、改善されていることが明らかである。なお、冬期(11~3月)において理論自己相関係数に比べ、観測自己相関係数が高い原因は、流域上流部での水力発電による人工的な流量制御にあると思われる。また、ケース1とケース2の理論積率にほとんど差異がないことから、日流量データが十分でない場合にも本理論が適用できることを意味し、本理論の実用性は極めて高いと言える。

#### 4. 結論

利水計画等への利用を目的として、日降水時系列の降水特性のモデル化を行い、適切な線形応答関数を介して、日流出量時系列の積率特性（平均・分散・歪み係数・自己相関係数）を与える理論式を、フィルタード・ポイント過程として誘導し、早明浦ダムで検証した。その結果、得られた知見を以下にまとめて結論とする。

1) 線形応答関数を持つ流出モデルとして、直列3段タンクモデル、並列タンク付加モデル及びショット・ノイズ過程に用いられる1段タンクモデルの3つについて比較検討した結果、表面流出が発生していると思われるような流域の流出モデルとして並列タンク付加（直列3段タンク）モデルが適していることが明らかになった。

2) 日降水時系列を（一雨単位でなく）日単位でモデル化すると、数日間降るような豪雨のクラスター性と一雨内日降水量の自己相関性を無視したことになり、結果として、豪雨の生起頻度が高く、表面流出成分が卓越する頻度が高い月では、日流量の理論分散が観測分散に比べ過小となる。

3) 日降水時系列を一雨単位でモデル化すると、日流出量の積率を与える理論式は煩雑となるが、ほぼ妥当な結果を与える。特に、日流量データが数年程

度しかない場合を想定した計算結果は、日流量観測データが十分ある場合とほとんど同じであった。このことは、乱数発生等による日流量のデータ・ジェネレーションに拠らなくても本理論により日流量の積率特性を日降水特性から推定できることを意味し、実用性が極めて高いと言える。

謝辞：本研究は平成6、7年度河川整備基金（代表 端野 道夫）による研究成果の一部であることを記し、謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 岳 生, 端野 道夫: フィルタード・ポイント過程による日流出量の確率応答, 水工学論文集, Vol. 39, pp. 49-54, 1995.
- 2) Weiss, G.: Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, *WRR*, Vol. 13, No. 1, pp. 101-108, 1977.
- 3) 神田 徹: ショット・ノイズ過程の基礎特性と流量時系列への適用性, 第27回水理講演会論文集, pp. 435-442, 1983.
- 4) Parzen, E.: *Stochastic Processes*, Holden-Day, San Francisco, 1962.
- 5) Snyder, D.L.: *Random Point Processes*, John Wiley & Sons, 1975.

(1995.7.24 受付)

## CUMULANT ESTIMATION OF DAILY RUNOFF FROM DAILY RAINFALL SEQUENCES

Sheng YUE and Michio HASHINO

The statistics of a daily rainfall-runoff process are theoretically derived from the characteristic function of a filtered point process. The probability distributions of occurrence number of storm clusters and duration of one storm cluster, respectively, are represented by one of binomial, Poisson, and negative binomial probability distributions according to the ratio of mean to variance. Marks of the point process are magnitudes of daily rainfall with autocorrelation coefficient. A tank model, called 3 tanks with a parallel tank, is found to be useful. The application of the proposed model to daily rainfall-runoff data at Sameura Dam in Kochi Prefecture is shown.