

投稿論文 (和文ノート)

**TECHNICAL
NOTE**

移動一般座標による開水路非定常流の数値解析

細田 尚¹・長田信寿²・村本嘉雄³

¹正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

²正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

³正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室 (〒606 京都市左京区吉田本町)

本研究では、河岸の急な崩壊や侵食など、河川や開水路の側岸境界の移動により生じる流れを解析するための基本的な数値解析法について考察した。とくに、境界の時間的変化が大きい場合を対象として、移動一般座標系を用いた解析法を示すとともに、貯水槽の壁面の移動により生じる非定常流に適用し、現象が数値解析的に再現できること、および特性曲線法による解析解とほぼ一致することを示した。

Key Words: unsteady flows, numerical analysis, boundary fitted coordinate system, free boundary

1. はじめに

本研究は、河岸の崩壊や侵食、貯水槽でのゲートの移動など、河川や開水路の側岸境界が移動することによって生じる非定常流を再現するための基本的な数値解析モデルを示すとともに、単純な現象を対象としてその適用性を検証することを目的としている。まず、河川および水路の複雑な平面形状を表現でき、境界の移動速度が速い場合にも適用可能と考えられる移動一般座標系の下での解析法を示す。

移動一般座標を用いた方法は、境界が移動する流れの解析法として有力な手法の一つであり、流体運動に係る二、三の分野でよく用いられるようになってきているが、水工学の分野では汎用的に使用されるには至っていない。そこで、本研究では境界が移動する典型的な開水路非定常流を対象に、基本的な数値解析モデルを示すことを目的としている。さらに、解析法の応用例として、貯水槽の壁面の移動により生じる非定常流を取り上げ、本解析法によって現象が再現できること、および特性曲線法を用いた解析解に適合することを示す。

2. 基礎式

基礎式は通常の平面2次元流れの基礎式であり、図-1に示す直角座標系 (x, y) の下で書き表せば次のようになる。ただし、簡単のため運動方程式中の粘性項および二次流による応力項を無視している。

(連続式)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

(運動方程式)

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial uM}{\partial x} + \frac{\partial vM}{\partial y} + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial vN}{\partial y} + gh \frac{\partial z_s}{\partial y} = -\frac{\tau_{by}}{\rho} \quad (3)$$

ここに、 h :水深、 (u, v) :水深平均流速の (x, y) 方向成分、 (M, N) :各々 $M=hu$ 、 $N=hv$ で定義される流量フラックス、 z_s :基準面からの水位、 (τ_{bx}, τ_{by}) :底面せん断応力ベクトルの成分である。

鉛直方向の運動が卓越した液面変動では、鉛直方向の運動方程式を解く必要があるが、本研究では、式(1)~(3)が適用可能な水平方向の運動が卓越した開水路非定常流を考えている。

直角座標系の基礎式(1)~(3)を移動一般座標系 $(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t))$ の式に座標変換すると次のようになる¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{M}{J} \right) \\ + gh \left(\frac{\xi_x}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) = -\frac{\tau_{bx}}{\rho J} \end{aligned} \quad (5)$$

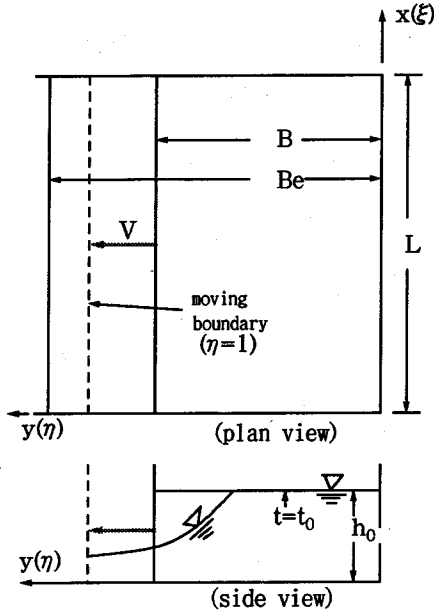


図-1 対象とする流れと座標系

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{N}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{N}{J} \right) + gh \left(\frac{\xi_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) = - \frac{\tau_{by}}{\rho J} \quad (6)$$

ここに、 (U, V) : 流速ベクトルの反変成分、 J : 座標変換のヤコビアン、 ξ_t, η_t : 座標の時間微分であり、各々次式で定義される。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, V = \eta_x u + \eta_y v \quad (7)$$

$$J = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (8)$$

$$\xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y, \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y \quad (9)$$

通常、格子点で全ての水理量を定義する場合には、上記の式(4)～(6)が用いられるが¹⁾、有限体積法において図-2に示すように水理量を互い違いの位置で定義するスタッガード・スキームが用いられる場合には、流速ベクトルおよび流量フラックス・ベクトルの反変成分を直接未知量として解く方法が解析法に適合する²⁾。そこで運動方程式に関しては、スタッガード・スキームの有限体積法に適合するように式(5)および(6)を反変成分で表示すると以下のようなになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{Q^\xi}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right)$$

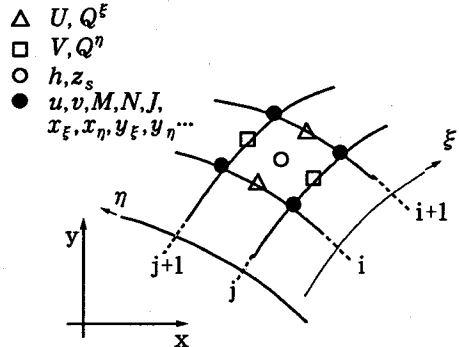


図-2 変数の配置

$$- \frac{N}{J} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) + gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) = - \frac{\tau_{b\xi}}{\rho J} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{Q^\eta}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(\frac{\partial \eta_x}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(\frac{\partial \eta_y}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \right) + gh \left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) = - \frac{\tau_{b\eta}}{\rho J} \quad (11)$$

ここに、 $Q^\xi, Q^\eta, J, \tau_{b\xi}, \tau_{b\eta}$ は次式で定義される。

$$Q^\xi = \xi_x M + \xi_y N, Q^\eta = \eta_x M + \eta_y N \quad (12)$$

$$\tau_{b\xi} = \xi_x \tau_{bx} + \xi_y \tau_{by}, \tau_{b\eta} = \eta_x \tau_{bx} + \eta_y \tau_{by} \quad (13)$$

3. 数値解析法

数値解析法として有限体積法¹⁾を用いる。変数の定義位置を図-2に示した。本研究では基本的数値モデルの作製を目的としているため、時間積分には最も単純な前進差分を用いている。また、移流項の離散化には、段波などの不連続部での数値振動を抑制するために、TVD条件を満たすスキームの一つとしてTVD MUSCLスキームを用いた¹⁾。ただし、本解析法は、基礎式中の移流項にのみTVDスキームを適用しており、流束差分法、流束ベクトル分離法等のように基礎式系全体のTVD化にはなっていない。

計算に用いた離散式を、式(10)を例にとって簡単に示せば次のようになる。

まず、式(10)左辺第1項(時間微分項)は次のよ

うに前進差分とする。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^E}{J} \right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{Q^E_{i,j+1/2}{}^{n+1}}{J_{i,j+1/2}{}^{n+1}} - \frac{Q^E_{i,j+1/2}{}^n}{J_{i,j+1/2}{}^n} \right) \quad (14-a)$$

式(10)左辺第2項(移流項)は、数値流束 F を用いて式(14-b)のように表し、数値流束をMUSCL内挿に流束制限関数を導入した式で評価した¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{Q^E}{J} \right)_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta \xi} \left(F_{i+1/2,j+1/2} - F_{i-1/2,j+1/2} \right) \quad (14-b)$$

$$F_{i+1/2,j+1/2} = \left((\xi_t + U) \frac{Q^E}{J} \right)_{i+1/2,j+1/2}^n$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left((\xi_t + U) \frac{Q^E}{J} \right)_{R_{i+1/2,j+1/2}}^n + \left((\xi_t + U) \frac{Q^E}{J} \right)_{L_{i+1/2,j+1/2}}^n - \left| \frac{\xi_t + U}{J} \right|_{i+1/2,j+1/2}^n \left(Q_{R_{i+1/2,j+1/2}}^E - Q_{L_{i+1/2,j+1/2}}^E \right) \right\},$$

$$Q_{R_{i+1/2,j+1/2}}^E = Q_{i+1/2,j+1/2}^E - \frac{1}{4} \left\{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_+ + (1+\kappa) \bar{\Delta}_- \right\}_{i+1/2,j+1/2}$$

$$(\bar{\Delta}_+)_{i+1/2,j+1/2} = \min \text{mod} \left(Q_{i+2,j+1/2}^E - Q_{i+1/2,j+1/2}^E, b \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i,j+1/2}^E \right) \right),$$

$$(\bar{\Delta}_-)_{i+1/2,j+1/2} = \min \text{mod} \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i,j+1/2}^E, b \left(Q_{i+2,j+1/2}^E - Q_{i+1/2,j+1/2}^E \right) \right),$$

$$Q_{L_{i+1/2,j+1/2}}^E = Q_{i,j+1/2}^E + \frac{1}{4} \left\{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_- + (1+\kappa) \bar{\Delta}_+ \right\}_{i,j+1/2}$$

$$(\bar{\Delta}_+)_{i,j+1/2} = \min \text{mod} \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i,j+1/2}^E, b \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i-1/2,j+1/2}^E \right) \right),$$

$$(\bar{\Delta}_-)_{i,j+1/2} = \min \text{mod} \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i-1/2,j+1/2}^E, b \left(Q_{i+1/2,j+1/2}^E - Q_{i,j+1/2}^E \right) \right),$$

$$\xi_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1/2} = -x_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1/2} \xi_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1} - y_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1/2} \xi_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1}$$

$$x_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1/2} = (x_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1} - x_{i-1/2,j+1/2}{}^{n+1}) / \Delta t$$

$$y_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1/2} = (y_{i+1/2,j+1/2}{}^{n+1} - y_{i-1/2,j+1/2}{}^{n+1}) / \Delta t$$

ここに、流束制限関数として用いた minmod 関数、および定数 b は次式で定義される。

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max \{ 0, \min \{ |x|, \text{sgn}(x)y \} \},$$

$$b = (3-\kappa)/(1-\kappa), \quad \kappa = 1/3$$

式(10)左辺第4項および第5項の離散式は次のように表される。

$$\frac{Q^E}{J} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + (\xi_t + U) \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + (\eta_t + V) \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right)_{i,j+1/2}^n$$

$$= \frac{Q_{i,j+1/2}^E}{J_{i,j+1/2}^n} \left\{ \frac{\xi_{i,j+1/2}{}^{n+1} - \xi_{i,j+1/2}{}^n}{\Delta t} + (\xi_{i+1/2,j+1/2}{}^n + U_{i,j+1/2}^n) \frac{\xi_{i+1/2,j+1/2}{}^n - \xi_{i-1/2,j+1/2}{}^n}{\Delta \xi} \right.$$

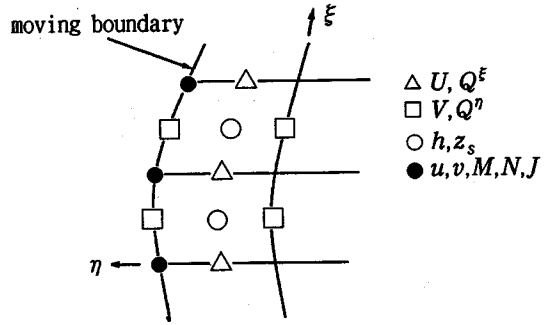


図-3 移動境界の取り扱い

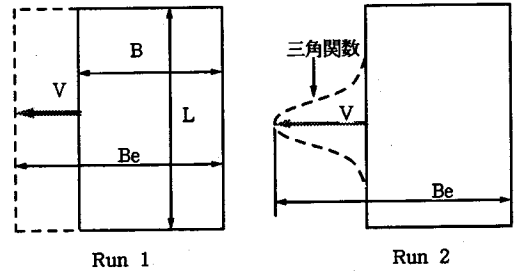


図-4 側壁移動の形態

表-1 計算の条件

	L (m)	B (m)	h ₀ (m)	V (m/s)	Be (m)	Te (s)	Δt (s)	Δξ	Δη
Run1-1	3.0	1.0	0.05	0.25	1.5	2.0	0.002	1.0	1.0
Run1-2	3.0	1.0	0.05	0.17	1.5	3.0	0.002	1.0	1.0
Run 2	3.0	1.0	0.05	0.50	2.0	2.0	0.002	1.0	1.0

V: 側壁の移動速度, Be: 側壁の停止位置,
Te: 移動開始からの停止時間((Be-B)/V), Δt: 計算時間間隔

$$+ (\eta_{i,j+1/2} + V_{i,j+1/2}) \frac{\xi_{i+1/2,j+1/2}^n - \xi_{i,j+1/2}^n}{\Delta \eta} \quad (14-c)$$

$$gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right)_{i,j+1/2}^n$$

$$= \frac{gh_{i,j+1/2}^n}{J_{i,j+1/2}^n} \left[(\xi_{i,j+1/2}^{2n} + \xi_{i,j+1/2}^{2n}) \frac{z_{s,i+1/2,j+1/2}^n - z_{s,i-1/2,j+1/2}^n}{\Delta \xi} \right.$$

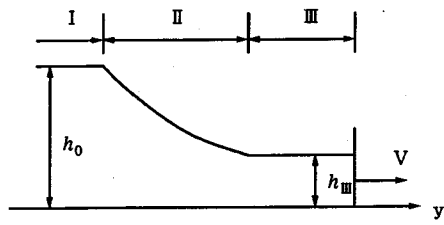
$$\left. (\xi_{i,j+1/2}^n \eta_{i,j+1/2}^n + \xi_{i,j+1/2}^n \eta_{i,j+1/2}^n) \frac{z_{s,i,j+3/2}^n - z_{s,i,j-1/2}^n}{2\Delta \eta} \right] \quad (14-d)$$

上式中に現れる ξ_x, η_x などの幾何学的諸量は、次式で計算した。

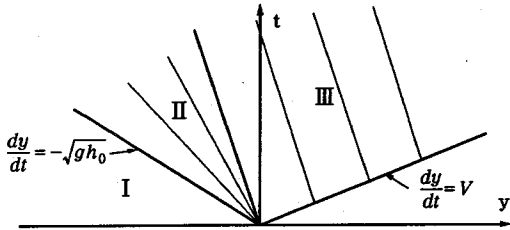
$$x_{\xi_{ij}} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta \xi}, \quad y_{\xi_{ij}} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta \xi},$$

$$x_{\eta_{ij}} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta \eta}, \quad y_{\eta_{ij}} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta \eta},$$

$$\xi_{x_{ij}} = y_{\eta_{ij}} / J_{ij}, \quad \eta_{x_{ij}} = -y_{\xi_{ij}} / J_{ij},$$



(a) 水深分布の領域区分



(b) 特性曲線による流れの領域区分

図-5 解析解による流れの領域区分

$$\xi_{y_{ij}} = -x_{\eta_{ij}} / J_{ij}, \eta_{y_{ij}} = x_{\xi_{ij}} / J_{ij},$$

$$J_{ij} = 1 / (x_{\xi_{ij}} y_{\eta_{ij}} - x_{\eta_{ij}} y_{\xi_{ij}})$$

定義点と異なる点の諸量が計算に必要な場合、定義点の値を適宜平均して用いた。

また、移動境界については、図-3を参照して、境界上の格子点の直角座標系での流速成分を格子点の移動速度から求め、境界上の定義位置における流速、流量フラックスの反変成分に変換した。その際、境界上の水深は接する格子の水深を用いた。

4. 計算の条件

図-1 および図-4に示した記号を用いて、計算の条件を表-1に示した。Run 1は壁が一定速度で直線的に移動した後、急停止する場合であり、移動中の流れに対して5.に述べるように特性曲線法を用いた解析解が導かれている³⁾。Run 2は壁が曲線的に移動する場合である。

初期の計算格子はRun 1およびRun 2ともに同一であって、x-方向に30分割($\Delta x=0.1m$)、y-方向に10分割($\Delta y=0.1m$)である。また、通常用いられているように、 $\Delta \xi=1, \Delta \eta=1$ とした。

5. 特性曲線法による解析解

ゲートの移動によって生じる非定常流について

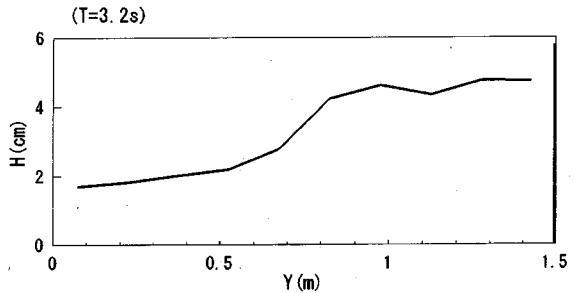
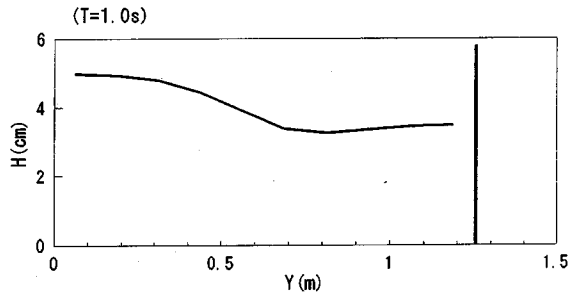
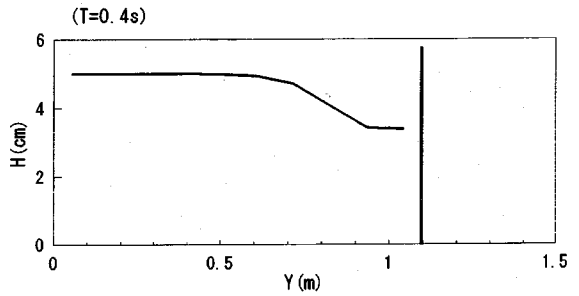


図-6 水深分布の時間変化 (Run 1-1)

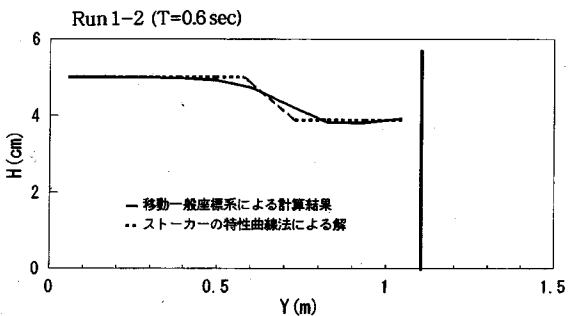
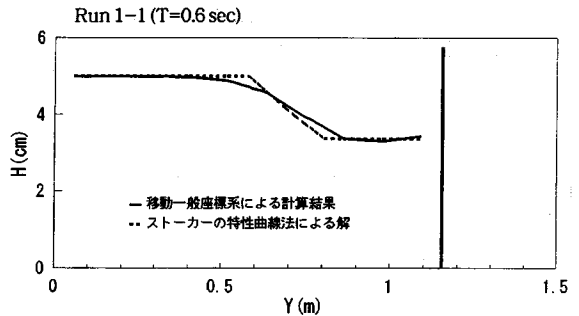


図-7 計算結果と解析解の比較 (Run 1)

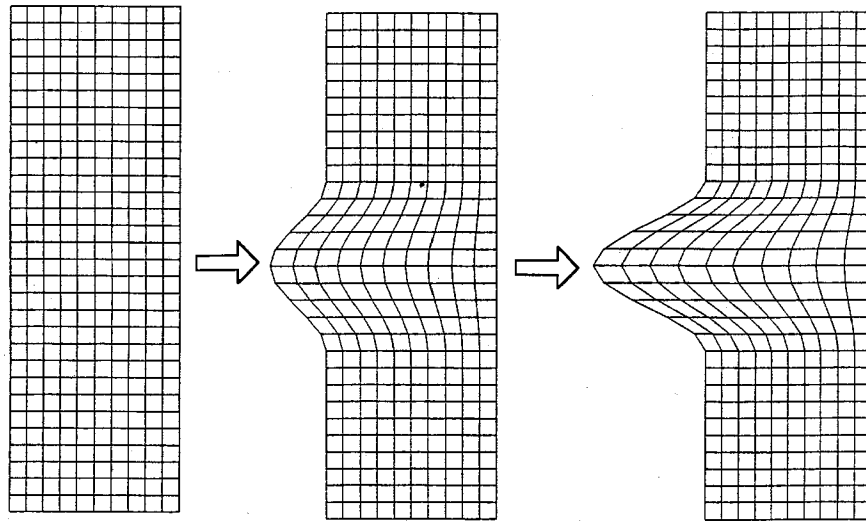


図-8 Run 2の計算格子の変形

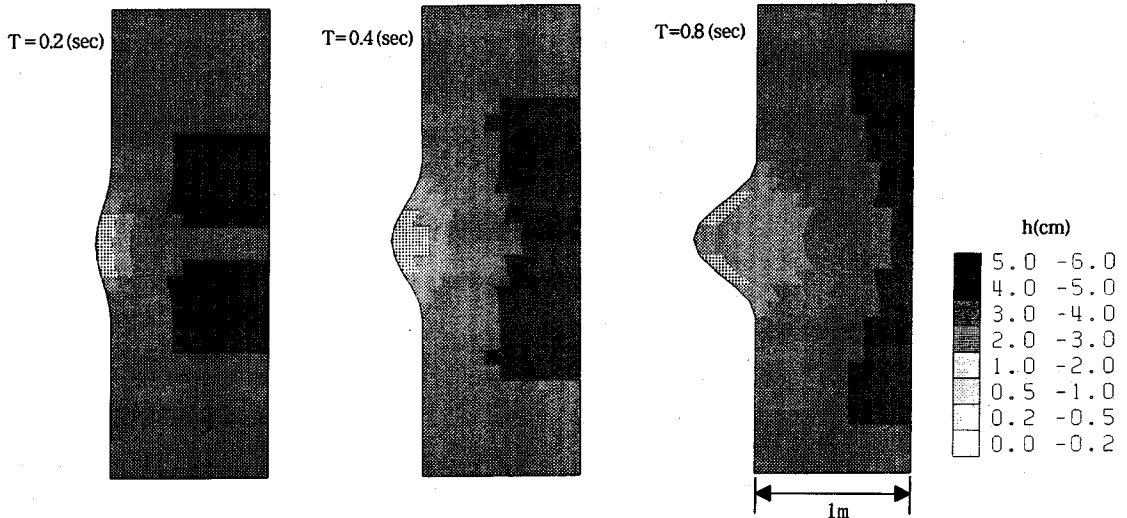


図-9 Run 2の水深分布

は、特性曲線法による解がStoker³⁾により導かれており、本研究でも計算結果の検証に用いるため、ここで簡単に説明する。

ゲートが一定速度で動く場合、流れは図-5 (a)の水面形と図-5 (b)の $y-t$ 平面上の特性曲線網に示したように、領域Ⅰ～Ⅲの3領域に分けられる。また、領域Ⅲの一定水深 $h_{Ⅲ}$ は次式で与えられる。

$$h_{Ⅲ} = h_0 - V \sqrt{\frac{h_0}{g} + \frac{V^2}{4g}} \quad (15)$$

さらに、領域Ⅱの水深分布は次式で与えられる。

$$-\sqrt{gh_0} < \frac{y}{t} < \frac{3}{2} V - \sqrt{gh_0}$$

$$h_{Ⅱ} = \frac{1}{9g} \left(-\frac{y}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)^2 \quad (16)$$

6. 計算結果の考察

図-6に、Run 1-1の $x=L/2$ の位置における水面形の時間変化を示した。側壁の移動に追従した水面の変化が生じ、移動中の側壁位置の水深は一定になっている。また、 $t = T_e$ で側壁が急停止した後に、段波の発生と遡上が再現されている。

図-7では、Run1-1、Run 1-2の計算結果と式(15)、(16)で表される解析解を示した。両ケースとも、計算結果は、格子サイズが大きいため各領域Ⅰ～Ⅲの接合部で解析解と若干の相違が見られるが、解析解とほぼ適合している。

図-8には、壁面を三角関数形で移動させたRun

-2の場合の格子の変形を示した。格子の生成は、単純にある時間ステップから次のステップの間にy-方向に移動した境界の移動量を比例配分して、内部格子の位置を定めた。

この場合の計算結果を図-9に示した。曲線的な側壁の移動に水面が追隨して、上下対称に変化する様子が再現されている。また、 $x=L/2$ の位置の水深分布を図-10に示した。水の浸入の様子が分かる。

7. おわりに

移動一般座標を用いて、境界が移動する流れを再現するための基本的な数値解析モデルを作製し、側壁移動により生じる非定常流に適用することにより基本モデルの妥当性を検証した。今後、計算法を改良するとともに、河岸の崩壊や侵食により側岸境界が時間的に変化する場の流れなど、実際的な現象への適用を行いたい。

参考文献

- 1) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994。
- 2) 武本行正，細田 尚，富永晃宏，禰津家久：一般化座標 Staggered Grid系での自由境界問題解析について (II)，第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集，pp.

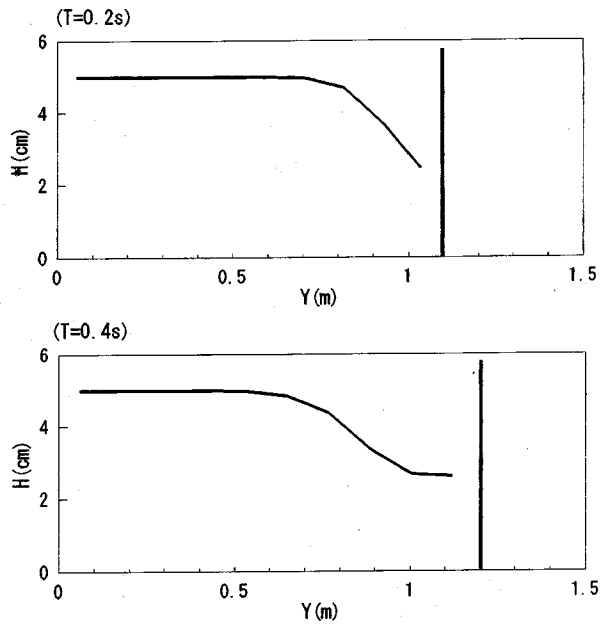


図-10 Run 2の $x=L/2$ における水深分布

- 645 - 648, 1993.
- 3) Stoker, J.J. : Water Waves, Interscience Publishers, INC., pp.308 - 314, 1957.

(1995. 6. 5 受付)

NUMERICAL ANALYSIS OF UNSTEADY OPEN CHANNEL FLOWS BY MEANS OF MOVING BOUNDARY FITTED COORDINATE SYSTEM

Takashi HOSODA, Nobuhisa NAGATA and Yoshio MURAMOTO

The fundamental numerical model is presented to simulate the unsteady open channel flows generated by the movement of the flow boundary such as the slide and the erosion of river bank. The basic equations in the Cartesian coordinate are transformed into the equations in the moving boundary fitted coordinate, and then discretized into the finite difference form according to the common procedure of finite volume method. Numerical model is applied to the propagation of waves generated by moving a vertical gate at the end of a tank. Applicability of the model is verified through the comparison of the computed water levels with the analytical solution by the method of characteristics.