

# 不平衡変位最小法を用いた繰り返し外力を受ける骨組構造物の弾塑性有限変位解析

石川智巳<sup>1</sup>・依田照彦<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 電力中央研究所 我孫子研究所 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

<sup>2</sup>正会員 工博 早稲田大学理工学部土木工学科 (〒169 東京都新宿区大久保3-4-6)

地震のような繰り返し荷重を受ける骨組構造物では、鋼構造物中の応力レベルが塑性域に達することがある。このような繰り返し荷重下での鋼構造物の弾塑性挙動を、有限要素法などの解析手法を用いて十分な精度で評価するためには、繰り返し荷重下での応力ひずみ関係を忠実に表現しうる弾塑性力学モデルの開発と、この非線形現象を精度よく解析するためのアルゴリズムの開発が必要である。本論文では、構成式に2曲面モデルを導入し、解析手法には、反復過程に不平衡変位最小法を提案することにより、簡便で精度の高い弾塑性有限変位解析手法を提案した。数値解析例により、提案手法の有用性を明らかにした。

**Key Words :** finite displacement analysis, minimum unbalanced displacement method, two-surface model

## 1. はじめに

近年、構造工学分野における有効な解析法の進歩発展により、複雑な荷重下で様々な大型構造物が設計され、施工されるようになってきた。また地震、風といった繰り返し荷重に対しても特別な配慮をしなければならない構造物も数多くみられるようである<sup>1)</sup>。一般に、地震のような繰り返し荷重の影響下では、鋼構造物の応力レベルは引張あるいは圧縮側で弾性域を超える塑性域に達する。特に圧縮材では、不安定現象とその後のひずみ履歴により複雑な様相を示すことになる。従って設計で用いられている弾性理論や古典的塑性論のみで、構造物の安全性や信頼性を検討することは必ずしも容易ではない<sup>2)</sup>。

このような複雑な荷重下での鋼構造物の弾塑性挙動を有限要素法などの解析手法を用いて十分な精度で評価するためには、繰り返し状態の応力-ひずみ関係を忠実に表しうる弾塑性力学モデルの開発と、このような非線形現象を精度良く、また効率的に解析するためのアルゴリズムの開発が必要である。例えば、はりや柱で構成されたフレームは、繰り返し荷重を受けることにより、耐荷力の低下がみられるが、この耐荷力の評価は、使用する構成則や非線形解析の精度により大きく異なった値を与え、耐荷力を危険側に評価する可能性すらある。

一般に用いられている弾塑性力学モデルとしては、等方硬化モデル、移動硬化モデルさらにこれらを組み合わせた複合硬化モデルが挙げられる。しかし、これらの弾塑性力学モデルは、その単純さゆえ現在も広く使用されてはいるものの、繰り返し履歴を有する実際の挙動を正しく表現するには不十分であるといわれている<sup>3),4)</sup>。繰り返し荷重下での応答をより忠実に表す試みとして、応力空間においていくつかの応力曲面を設定し、それらによって材料の繰り返し履歴を予測する多曲面モデル<sup>4),5)</sup>、また、内側に負荷曲面、外側に境界曲面の2つの曲面を用いてひずみ硬化率を決定する2曲面モデル<sup>1),6)</sup>、その他、実験式として、履歴曲線をRamberg-Osgood関数<sup>7)</sup>で表示するものなど、さまざまなモデルが提案され、弾塑性力学モデルの修正が行われている。

一方、このような材料非線形と幾何学的非線形を考慮したいわゆる弾塑性有限変位問題、特に繰り返し荷重を経験する構造物の数値解析においては、ひずみ履歴の影響を考慮するために、塑性領域の成長縮退過程をすべて記憶させつつ、十分小さな増分計算を行う必要がある<sup>8)</sup>。また、追跡径路が長いため、数値解析上の誤差あるいは、残留不つり合い力による誤差が蓄積し、さらには多大な計算時間を要することになる。この様な観点から、精度が良く、効率的な数値解析手法の開発が求められている。

そこで本論文では、増分過程に弧長増分法を用い、反復過程に不平衡変位最小法を適用して、解析精度の向上、計算の効率化を考慮した、繰り返し荷重を受ける構造物の解析にも適用できる弾塑性有限変位解析手法の開発を試みた。その際、現在の進歩したコンピュータ性能をふまえて、部材の断面を有限個の要素に分割し、各要素について応力の記憶と降伏の判定を行う手法を用いた。さらに構造部材の履歴特性を十分な精度で表現するために、構成式に2曲面モデル<sup>1),6),12)</sup>を適用し、それによる解析アルゴリズムを詳細に示した。また、数値解析を行う際問題となる点を指摘し、それに対するいくつかの知見を与えた。なお本論文は、著者らの不平衡変位最小法に関する研究<sup>10)</sup>と弾塑性有限変位解析手法に関する研究<sup>12)</sup>を体系的に整理し、新たな知見を加えてまとめたものである。

## 2. はり要素の有限要素方程式の誘導

本論文では、骨組構造物の非線形解析を対象としているので、まず、はりの非線形計算に必要な有限要素方程式を誘導する。

### (1) Lagrange型有限要素方程式<sup>9),10)</sup>

ラグランジュ表示での増分形の仮想仕事の原理は、体積力を無視すれば、第(n+1)形状において次のように表すことができる<sup>9),10)</sup>。

$$\int_v \delta\{\Delta\varepsilon_{(0)}^{(n+1)}\}^T \{\tau_{x(0)}^{(n)} + \Delta\tau_{x(0)}^{(n+1)}\} dv^{(0)} \\ = \int_s \delta\{\Delta u_{(0)}^{(n+1)}\}^T \{t_{(0)}^{(n)} + \Delta t_{(0)}^{(n+1)}\} ds^{(0)} \quad (1)$$

ここに、 $\Delta\varepsilon_{(0)}^{(n+1)}$ はひずみ増分、 $\tau_{x(0)}^{(n)}$ 、 $\Delta\tau_{x(0)}^{(n+1)}$ は初期応力および応力増分、 $\Delta u_{(0)}^{(n+1)}$ は変位増分、 $t_{(0)}^{(n)}$ 、 $\Delta t_{(0)}^{(n+1)}$ は初期外力および外力増分である。また、上付および下付添字はそれぞれ現形状と参照座標を表している。

*Updated-Lagrange*型の定式化では、幾何学的非線形性を考慮した増分型のひずみ変位関係式は、 $x$ 方向の変位増分 $\Delta u_{(n)}^{(n+1)}$ と $z$ 方向のたわみ増分 $\Delta w_{(n)}^{(n+1)}$ を用いて次式で与えられる<sup>10)</sup>。

$$\Delta\varepsilon_{x(n)}^{(n+1)} = \frac{\partial \Delta u_{(n)}^{(n+1)}}{\partial x^{(n)}} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Delta u_{(n)}^{(n+1)}}{\partial x^{(n)}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta w_{(n)}^{(n+1)}}{\partial x^{(n)}} \right)^2 \right] \quad (2)$$

また、式(2)より、応力増分は、第(n)形状における接線係数 $H^{(n)}$ を用いて

$$\Delta\sigma_{x(n)}^{(n+1)} = H^{(n)} \Delta\varepsilon_{x(n)}^{(n+1)} \quad (3)$$

と表せる。ここで、式(1)において、 $u, w$ の $x$ 方向に関する変位勾配を表すマトリックス $[B_u]$ 、 $[B_w]$ と式(2)、(3)を用いて整理することにより、以下に示すはりの増分型有限要素方程式が得られる<sup>10)</sup>。

$$[k_{r(n)}^{(n)}]\{\Delta d_{(n)}^{(n+1)}\} = \{\Delta p_{(n)}^{(n+1)}\} + \{r_{(n)}^{(n)}\} + \{q_{(n)}^{(n+1)}\} \quad (4)$$

ここに

$$[k_{t(n)}^{(n)}] = [k_e^{(n)}] + [k_g^{(n)}] \quad (5)$$

$$[k_e^{(n)}] = \int_v [B_u]^T H^{(n)} [B_u] dv^{(n)} \quad (6)$$

$$[k_g^{(n)}] = \int_v ([B_u]^T \sigma_x^{(n)} [B_u] + [B_w]^T \sigma_x^{(n)} [B_w]) dv^{(n)} \quad (7)$$

$$\{r_{(n)}^{(n)}\} = \{p_{(n)}^{(n)}\} - \{p_{int(n)}^{(n)}\} \quad (8)$$

$$\{p_{int(n)}^{(n)}\} = \int_v ([B_u] + [B_w])^T \sigma_x^{(n)} dv^{(n)} \quad (9)$$

$$\{q_{(n)}^{(n+1)}\} = \int_v [B_u]^T \frac{H^{(n)}}{2} \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\}^T ([B_u]^T [B_u] + [B_w]^T [B_w]) \\ \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\} dv^{(n)} + \int_v ([B_u]^T [B_u] + [B_w]^T [B_w]) \\ \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\} \Delta\sigma_x^{(n+1)} dv^{(n)} \quad (10)$$

$$\Delta\sigma_x^{(n+1)} = H^{(n)} ([B_u] \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\} + \frac{1}{2} \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\}^T \\ ([B_u]^T [B_u] + [B_w]^T [B_w]) \{\Delta\delta_{(n)}^{(n+1)}\}) \quad (11)$$

であり、 $[k_e]$ は微小変位剛性マトリックス、 $[k_g]$ は初期応力マトリックス（幾何剛性マトリックス）である。また $\{r_{(n)}^{(n)}\}$ は増分前における不つり合い力、 $\{p_{int(n)}^{(n)}\}$ は内力、 $\{q_{(n)}^{(n+1)}\}$ は応力増分、変位増分による2次以上の高次項の和を表している。上式においては、応力はすべてCauchy応力に改め、下付添字は省略している。

上記で得られた有限要素方程式（式(4)）は、はりを離散化した時の1要素を表すことになり、これらの方程式を要素ごとに求め、重ね合わせることによって全体構造系の増分型剛性方程式

$$[K_T]\{\Delta U\} = \{\Delta P\} + \{P_0\} - \{P_{INT}\} + \{Q\} \quad (12)$$

が得られる。ただし、全体構造系での支配方程式を表すために式(4)のそれぞれの項を大文字で表し、変位増分は $\{\Delta U\}$ に改めている。また解析時には $\{Q\}$ は微小であるとして無視した。

## 3. 単軸応力状態における構成則（2曲面モデル）の導入

材料の応力とひずみの関係は、弾性の範囲内にお

いては、線形とみなせるが、塑性域に達すると、非線形形となる。また同じ応力レベルあるいはひずみレベルであっても、その材料が経験した荷重履歴によって、異なったひずみあるいは応力を与えるという径路依存性があり、この理由により一般に *Updated-Lagrange* 法を用いた増分法が構造解析では採用される。はり要素で構成される 2 次元の骨組構造においては、せん断変形が無視できれば、軸方向の応力とひずみの関係を用いて弾塑性解析を行うことができる。以下、単軸応力状態における応力-ひずみ関係式（構成則）を示し、2 曲面モデルを具体的に誘導する。また、次節では上付添字、下付添字は省略している。

### (1) 単軸応力-ひずみ関係<sup>11)</sup>

#### a) 弹性域での応力-ひずみ関係

弾性域においては、*Hooke* 則が成り立ち、このとき応力増分とひずみ増分の関係は次式で表される。

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (13)$$

ここに、 $E$  は弾性定数である。

#### b) 塑性域での応力-ひずみ関係

塑性域においては、もはや *Hooke* 則が成り立たず、接線係数  $H^t$  を用いて

$$\Delta\sigma = H^t \Delta\varepsilon \quad (14)$$

と表される。このとき、接線係数は、塑性変形が進行するにつれて変化し、単軸応力状態においては、応力-ひずみ曲線上の変形に対応する点の傾きを表す。また接線係数は、塑性ひずみ硬化率  $H^p$  を用いて次式で表される。

$$H^t = \frac{EH^p}{E + H^p} \quad (15)$$

ここに  $H^p$  は単軸応力状態での  $\sigma - \varepsilon^p$  曲線上の、変形に対応する点の傾きを表し、次式が成り立つ。

$$\Delta\sigma = H^p \Delta\varepsilon^p \quad (16)$$

ここに  $\Delta\varepsilon^p$  は塑性ひずみ増分である。

### (2) 単軸応力状態における 2 曲面モデル<sup>12)</sup>

次式のように降伏関数および境界線関数を仮定する<sup>13)</sup>。

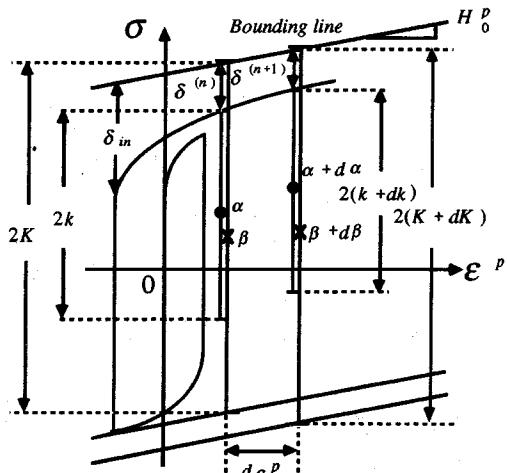


図-1 2 曲面モデルの模式図

#### 降伏関数

$$f = (\sigma - \alpha)^2 - k(\kappa)^2 = 0 \quad (17)$$

#### 境界線関数

$$F = (\bar{\sigma} - \beta)^2 - K(\kappa)^2 = 0 \quad (18)$$

ここに  $\bar{\sigma}$  は負荷応力に対する共役応力、 $\alpha$ 、 $\beta$  はそれぞれ弹性域の中心、境界域の中心、 $k$ 、 $K$  はそれぞれ弹性域、境界域の大きさ、 $\kappa$  は内部状態変数を表す。また初期降伏状態においては、 $\alpha = \beta = 0$ 、 $k = k_0$ 、 $K = K_0$  である。

2 曲面モデルの考え方従い、ひずみ硬化率  $H^p$  を次式で仮定する。

$$H^p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = H_0^p + h \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \quad (19)$$

ここに  $H_0^p$  は境界線のひずみ硬化率、 $h$  は応力-ひずみ曲線の曲率を決める正のスカラー値であり、 $\delta$  は負荷点と境界点（共役応力点）との間の距離を表す。また  $\delta_{in}$  は 1 つの負荷過程における初期値である。

次に応力増分-塑性ひずみ増分の関係、共役点応力増分-塑性ひずみ増分の関係は次式で表すことができる<sup>6)</sup>。

$$d\sigma = H^p d\varepsilon^p \quad (20)$$

$$d\bar{\sigma} = H_0^p d\varepsilon^p \quad (21)$$

弾性域および境界域の中心の移動を次のように仮定する<sup>6)</sup>。

$$d\alpha = H^\alpha d\varepsilon^p \quad (22)$$

$$d\beta = H^\beta d\varepsilon^p \quad (23)$$

降伏関数  $f$  は *Prager* の適合条件より、 $df = 0$  を満

足しなければならない。よって次式が成り立つ。

$$df = 2(\sigma - \alpha)d\sigma - 2(\sigma - \alpha)d\alpha + \frac{\partial f}{\partial k}dk = 0 \quad (24)$$

このとき、式(20),(22)を用いて  $d\epsilon^P$  を消去すれば

$$d\alpha = \frac{H^\alpha}{H^P} d\sigma \quad (25)$$

と表され、式(24)に上式を代入すれば

$$\begin{aligned} 2(\sigma - \alpha)d\sigma - 2(\sigma - \alpha)\frac{H^\alpha}{H^P}d\sigma + \frac{\partial f}{\partial k}dk &= 0 \\ \therefore \frac{H^\alpha}{H^P} &= 1 + \frac{1}{2(\sigma - \alpha)} \frac{\partial f}{\partial k}dk \end{aligned} \quad (26)$$

同様に、境界線関数においても、  $dF = 0$  を満足するすれば、次式が成り立つ<sup>6)</sup>。

$$dF = 2(\bar{\sigma} - \beta)d\bar{\sigma} - 2(\bar{\sigma} - \beta)d\beta + \frac{\partial F}{\partial K}dK \quad (27)$$

このとき、式(20),(21)および式(20),(23)より

$$d\bar{\sigma} = \frac{H_0^P}{H^P}d\sigma \quad (28)$$

$$d\beta = \frac{H_0^\beta}{H^P}d\sigma \quad (29)$$

よって、式(27)に式(28),(29)を代入すれば

$$\begin{aligned} 2(\bar{\sigma} - \beta)\frac{H_0^P}{H^P}d\sigma - 2(\bar{\sigma} - \beta)\frac{H^\beta}{H^P}d\sigma + \frac{\partial F}{\partial K}dK &= 0 \\ \therefore \frac{H^\beta}{H^P} &= \frac{H_0^P}{H^P} + \frac{1}{2(\bar{\sigma} - \beta)d\sigma} \frac{\partial F}{\partial K}dK \end{aligned} \quad (30)$$

本論文においては、 $k$  を累積塑性ひずみの関数、 $K$  を定数として  $H^\alpha$ ,  $H^\beta$  を決定する。ここに累積塑性ひずみとは、塑性ひずみ履歴において、過去最大の塑性ひずみを越えた塑性ひずみを合計したものとして定義される<sup>5)</sup>。 $k$ ,  $K$  を上記のようにおくことは、降伏関数は塑性ひずみの関数として移動と縮小を行い、境界線関数は移動のみを行うことを表している。さらに  $H^\alpha$ ,  $H^\beta$  を用いて、式(15), (19)により接線係数  $H'$  を評価している。

#### 4. 不平衡変位最小法

一般的に用いられている弧長増分法に関する既往の研究を見てみると、法平面上に収束解を追う Riks-Wempner 法では、非線形性の程度によっては

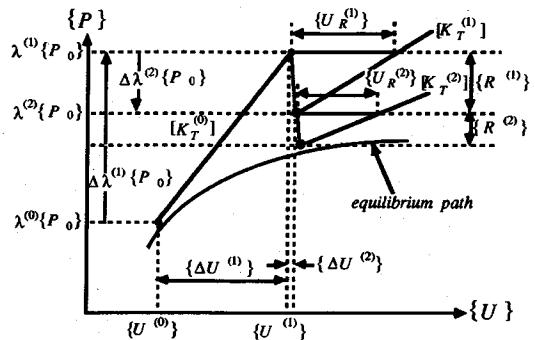


図-2 不平衡変位最小法の模式図

法平面上に解が存在しない場合があり、また弧長法や Crisfield の修正弧長法では、制御条件式が 2 次方程式となるため、解の選択や虚数解の存在といった問題がおこり、数値計算アルゴリズムが煩雑となるうらみがある<sup>13),14),15)</sup>。また反復過程における計算効率を考えた場合、必ずしも十分効率がよい方法とはいえない。さらに弾塑性解析に弧長法を用いた場合には、反復過程での変位の増減により剛性が大きく変動することがあり、解の発散や妥当な解が求まらなくなる原因につながる。そこで、本論文では、増分過程には通常の弧長増分法を用いるものの、反復過程に不平衡変位最小法<sup>12),16),17)</sup>を用いることを提案する。この手法は、他の手法に比べて計算効率がよく定式化が簡単であること、また変位の増減を最小にすることなどの利点がある<sup>16)</sup>。以下、不平衡変位最小法の考え方とそのアルゴリズムについて述べる。

反復計算により  $\Delta\lambda^{(n+1)}$ ,  $\{\Delta U^{(n+1)}\}$  (反復回数は  $n$  回目となる) を求めるものとする。この時  $\lambda^{(n)}$ ,  $\{U^{(n)}\}$  が既知量となり、これらから得られる不つり合い力に対して、その時点の全変位を考慮して求められる接線剛性マトリックスを介して、次式により得られる変位を不平衡変位と定義する。

$$\{U_R^{(n)}\} = [K_T^{(n)}]^{-1}\{R^{(n)}\} \quad (31)$$

ここに、 $\{U_R^{(n)}\}$ ,  $\{R^{(n)}\}$  はそれぞれ反復回数 ( $n-1$ ) 回目の不平衡変位、不つり合い力を表し、 $[K_T^{(n)}]$  は、全変位  $\{U^{(n)}\}$  から誘導される接線剛性マトリックスである。

反復計算 ( $n$ ) 回目を実行するとき、その間の荷重と変位の関係が線形であると仮定すれば、増分過程と同様に荷重の載荷状態によって定まる参照荷重を与えることによって、そのときの参照変位を得ることができる。すなわち、

$$\{U_0^{(n+1)}\} = [K_T^{(n)}]^{-1} \{P_0\} \quad (32)$$

上式により得られる基準変位ベクトルを用いて、反復計算( $n$ )回目の変位増分ベクトル $\{\Delta U^{(n+1)}\}$ を、次のように仮定する。

$$\{\Delta U^{(n+1)}\} = \{U_R^{(n)}\} + \Delta \lambda^{(n+1)} \{U_0^{(n+1)}\} \quad (33)$$

ここで不平衡変位は、もし解がつり合い径路上にあれば、零となるベクトル量であるから、この不平衡変位が最小となるような方向に解を修正すれば、反復回数を減らすことができる。そのためには、変位の修正量を最小にすればよい。そこで変位増分ベクトルの自乗和を最小とする $\Delta \lambda^{(n+1)}$ を求めるために次式を導入する<sup>16,17</sup>。

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \lambda^{(n+1)}} [\{\Delta U^{(n+1)}\}^T \{\Delta U^{(n+1)}\}] = 0 \quad (34)$$

式(34)に式(33)を代入することにより荷重増分パラメータ $\Delta \lambda^{(n+1)}$ は

$$\Delta \lambda^{(n+1)} = - \frac{\{U_0^{(n+1)}\}^T \{U_R^{(n)}\}}{\{U_0^{(n+1)}\}^T \{U_0^{(n+1)}\}} \quad (35)$$

と表される。式(35)が反復過程を支配する基礎式である。

この不平衡変位最小法の特徴としては、修正変位が少ないとから変位増分法における反復過程と類似の収束方向を持つ点が挙げられる。上式を用いることにより、反復計算( $n$ )回目の変位ベクトル、荷重パラメータおよび荷重ベクトルは次式で求めることができる。

$$\{U^{(n+1)}\} = \{U^{(n)}\} + \{\Delta U^{(n+1)}\} \quad (36)$$

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \Delta \lambda^{(n+1)} \quad (37)$$

$$\{P^{(n+1)}\} = \lambda^{(n+1)} \{P_0\} \quad (38)$$

## 5. 弾塑性解析における数値解析アルゴリズム

### (1) 微小変位剛性マトリックス、初期応力マトリックス、内力ベクトルの誘導

図3のようなはり要素を仮定し、微小変位マトリックス、初期応力マトリックス、内力ベクトルを求めた。これらの誘導の際、はりに対して断面方向に $r$ 分割、軸方向に2分割した細要素を考え、この領域を負荷・除荷を評価する最小単位とした。また、細

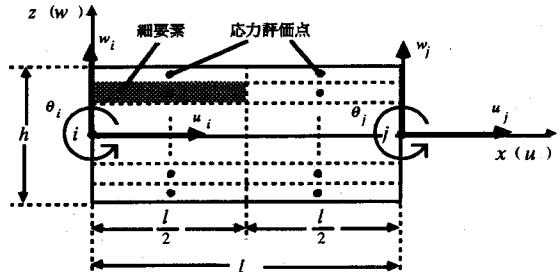


図-3 弾塑性解析に用いられるはり要素

要素内は応力、接線係数は一定であるとして細要素の中心である応力評価点の値で代表させた。それぞれの細要素ごとの応力と接線係数を用いて、式(6)、(7)、(9)の積分を行なうことにより、塑性領域の成長縮退を考慮している。

### (2) 負荷・除荷の判定（2曲面モデル）

初期応力マトリックス、内力ベクトルは接線係数と初期応力の関数である。従って接線係数と初期応力の評価が解の精度を左右することになる。これを忠実に評価するためには、変位の変動に伴って負荷・除荷の判定を行わなければならない。特に2曲面モデルを用いた負荷・除荷判定アルゴリズムは、若干工夫を要するので、以下に、本文で採用した方法を示す。

弾性あるいは除荷状態にある第( $n$ )形状の応力 $\sigma^{(n)}$ が既知であるとして、ひずみ増分により第( $n+1$ )形状の応力 $\sigma^{(n+1)}$ および接線係数 $H^{(n+1)}$ を求める。まず図4(a),(b)に示すように、外力増分により変位増分が得られたとき、ひずみ増分 $d\epsilon^{(n+1)}$ と、ひずみ増分に対して線形弾性を仮定して得られる応力増分 $d\sigma^{e(n+1)}$ を計算する。このとき、増分前の応力 $\sigma^{(n)}$ との和として、線形弾性を仮定したときの応力 $\sigma^{e(n+1)}$ が計算できる。ここで第( $n+1$ )形状における負荷・除荷の判定条件は第( $n$ )形状の $f^{(n)}$ を用いて次式で表せる。

$$\text{負荷のとき } f^{(n)}(\sigma^{e(n+1)}) \geq 0 \quad (39)$$

$$\text{除荷のとき } f^{(n)}(\sigma^{e(n+1)}) < 0 \quad (40)$$

負荷と判定された場合、降伏条件 $f^{(n+1)} = 0$ を満足するように $\sigma^{e(n+1)}$ を以下の手順で修正する。変形が進行して降伏する場合、応力の進行方向によって、B点とD点のいずれかの降伏点に達するが、以下の説明では、図4のB点の場合についてのみ示す。ただし、実際の解析においては、D点についても同様の考え方を適用し、応力の進行方向を考慮している。

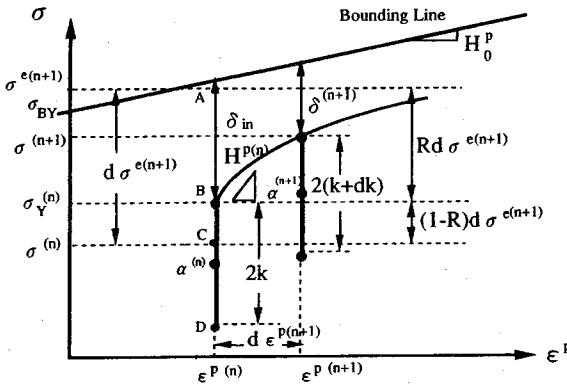


図-4 (a) 応力-塑性ひずみの関係

この場合のB点の降伏応力を $\sigma_Y^{(n)}$ とする。

はじめに補正比 $R$ を計算する。 $R$ は次式で与えられる<sup>18)</sup>.

$$R = \frac{\sigma_e^{(n+1)} - \sigma_Y^{(n)}}{\sigma_e^{(n+1)} - \sigma^{(n)}} \quad (41)$$

また、ひずみ硬化率 $H^{P(n)}$ は次式により決定される。

$$H^{P(n)} = H_0^P + h \frac{\delta_{in}}{\alpha \delta_{in} - \delta_{in}} \quad (42)$$

ここに、 $H_0^P$ は境界線の勾配、 $h$ は応力-ひずみ曲線の曲率を決定する正のスカラー、 $\delta_{in}$ は各サイクルの初期負荷点と境界点（共役応力点）との距離を表し、次式で与えられる。

$$\delta_{in} = (\sigma_{BY} + H_0^P \epsilon^{P(n)}) - \sigma_Y^{(n)} \quad (43)$$

ここに、 $\sigma_{BY}$ は初期降伏ひずみに対する境界線の共役応力である。また $\alpha$ は分母0を避けるために導入した1以上の定数である。この $\alpha$ を与えることにより、弾性あるいは除荷状態から再降伏に至る時の初期のひずみ硬化率 $H^P$ が決定される。

これらから第 $(n+1)$ 形状における応力 $\sigma^{(n+1)}$ は式(15)を参照して、次式で求められる。

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + d\sigma^{e(n+1)} - d\sigma' \quad (44)$$

ここに

$$d\sigma' = R \frac{E^2}{E + H^{P(n)}} d\epsilon^{(n+1)} \quad (45)$$

次式により塑性ひずみ増分 $d\epsilon^{P(n+1)}$ を決定し、第 $(n+1)$ 形状の全塑性ひずみ $\epsilon^{P(n+1)}$ を求める。

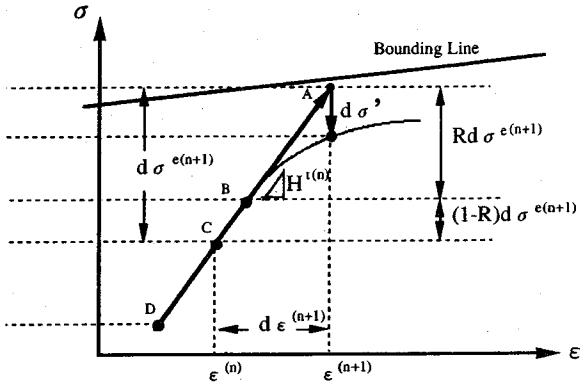


図-4 (b) 応力-ひずみの関係

$$d\epsilon^{P(n+1)} = R \frac{E}{E + H^{P(n)}} d\epsilon^{(n+1)} \quad (46)$$

第 $(n+1)$ 形状におけるひずみ硬化率を求めておく。これは接線剛性マトリックス計算および第 $(n+2)$ 形状に至る時、さらに負荷された場合に使用する。負荷状態にあるため、ひずみ硬化率は次式で表される。

$$H^{P(n+1)} = H_0^P + h \frac{\delta^{(n+1)}}{\alpha \delta_{in} - \delta^{(n+1)}} \quad (47)$$

ここで、 $\delta^{(n+1)}$ は次式で表される。

$$\delta^{(n+1)} = (\sigma_{BY} + H_0^P \epsilon^{P(n+1)}) - (\sigma_Y^{(n)} + H^{P(n)} d\epsilon^{P(n+1)}) \quad (48)$$

さらに次式により接線係数 $H^{I(n+1)}$ が計算される。

$$H^{I(n+1)} = \frac{EH^{P(n+1)}}{E + H^{P(n+1)}} \quad (49)$$

第 $(n)$ 形状が負荷状態にあり、さらに負荷された場合は、 $R=1$ として上記のアルゴリズムをそのまま用いればよい。

また除荷と判定された場合、第 $(n+1)$ 形状の応力と接線係数は次式で表される。

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + d\sigma^{e(n+1)} = \sigma^{e(n+1)} \quad (50)$$

$$H^{I(n+1)} = E \quad (51)$$

以上に述べた判定法は、増分過程のみに用い、反復過程においては、負荷のみを許す非線形弾性を仮定して数値計算をすすめている。

### (3) 降伏棚の取り扱い<sup>3)</sup>

構造用鋼材は、一般に初期降伏後、降伏棚を呈す

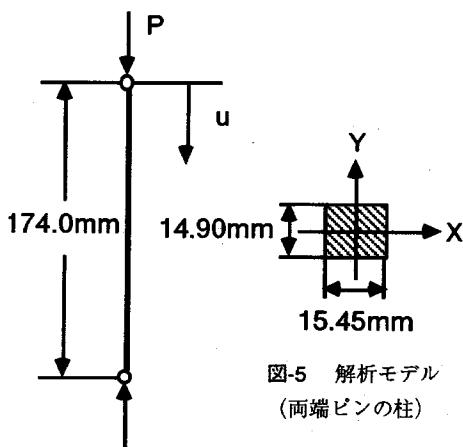


図-5 解析モデル  
(両端ピンの柱)

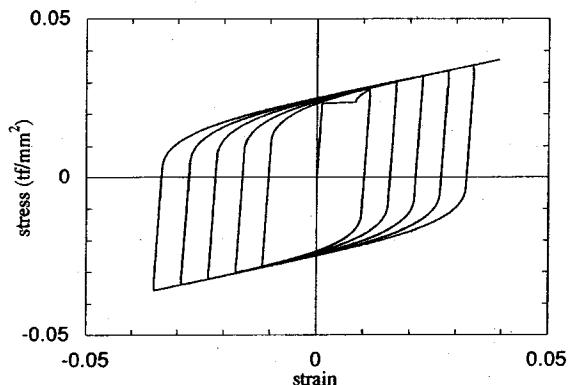


図-6 応力-ひずみ曲線 (2曲面モデル)

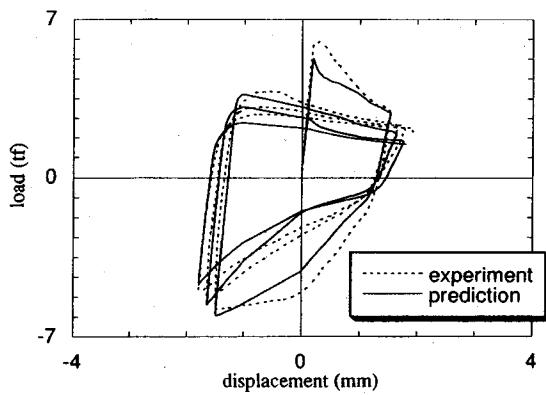


図-7 つり合い曲線 (2曲面モデル)

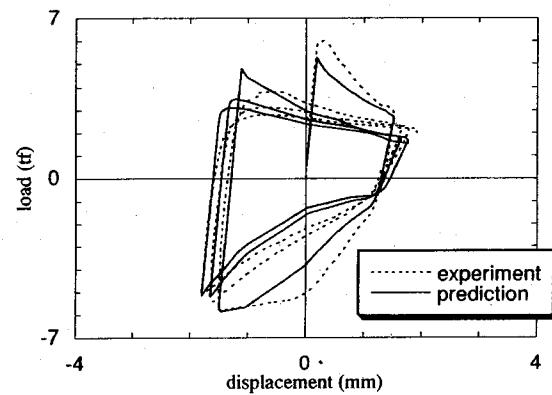


図-8 つり合い曲線 (バイリニア)

る。そこで本論文では、降伏棚の影響を考慮する場合、負荷状態で累積される塑性ひずみが、単調引張り載荷時においてひずみ硬化が開始する時の塑性ひずみに達するまで非硬化として扱う。つまり降伏棚上で除荷した場合、それらの降伏棚の合計が単調載荷時の降伏棚のひずみ量に達するまで降伏棚を呈するものとする。また本文に示す解析例では数値計算上の安定性を確保するために、弾性定数の1/1000の剛性を持つものとして降伏棚を表した。

## 6. 本解析手法の妥当性の検証

若林らによって実験が行われたSS400材の繰り返し軸力を受ける部材<sup>19)</sup>（図-5参照）と繰り返し水平力を受けるK型筋違骨組<sup>20)</sup>（図-9参照）の2種類を解析対象に、本解析手法の妥当性を検証することとする。

### （1）繰り返し軸力を受ける部材の解析<sup>19)</sup>

図-5に示すような両端ピンの柱を考える。このモデルは、初期不整を含んでいるので、引張り材とし

ての挙動は材料の応力ひずみ関係と同様なものとなるが、圧縮材としての挙動では不安定現象を伴い、繰り返し載荷時の挙動は複雑な様相を示すことが予想される。

解析にあたっては、対称性を考慮して部材長の1/2の片持ちばかりを取り上げ、初期不整として部材長の1/1000のたわみを柱の中央に与えてY軸周りに座屈が生じるようにし、変位の振幅を比例的に増加させるモデルを考えた。また部材長を10分割した要素を用い、負荷・除荷の判定は、1要素につき断面方向に10分割、軸方向に2分割した計20個の細要素を用いて、その中心点（図-3の応力評価点）の応力を評価した。数値解析法としては、増分過程に弧長増分法を、反復過程に不平衡変位最小法を用い、構成式としてはバイリニア型と2曲面モデルの2種類を用いて、実験結果と比較することにより、構成式の差異が計算結果に及ぼす影響および数値解析上の問題点を考察した。

解析に用いた材料特性は、弾性定数 $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、降伏応力 $2330 \text{ kgf/cm}^2$ とし、バイリニア型では、ひずみ硬化率 $H^P = 30.45 \text{ kgf/cm}^2$ 、2曲面モデルでは、

パラメータ  $h = 1.05 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ , 境界線の勾配  $H_0^p/E = 1.45 \times 10^{-2}$ , 境界線の切片  $\sigma_{BY}/\sigma_Y = 1.07$ , 降伏率 0.8%,  $\alpha = 1.05$  を用い, 2曲面モデルにおけるパラメータ  $h$  と境界線は, 全サイクル固定とした。さらに初期降伏後の弾性域の減少にあたっては, 式(26)を用いて累積塑性ひずみが 1.5% で,  $k/\sigma_Y = 0.85$ となるように, 2次関数で減少させ<sup>1,3)</sup>, その後一定とした。

図-6は, 上記の材料特性を用いた2曲面モデルでの両振り時の応力-ひずみ曲線である。単純化したため, 境界線の移動を考慮していないので, 繰り返しひずみ硬化を十分表現できていないが, ある程度, 定性的な現象は模擬されていると思われる。図-7, 8は図-5のモデルのつり合い曲線(圧縮側を正とした)である。若林らの実験結果の特徴として, 座屈後, 変位が増加するにつれて荷重が減少する不安定現象を呈していること, 引張り側でのつり合い曲線が単純引張り時のつり合い曲線と定性的に異なること, 荷重が繰り返されるに従って圧縮側の耐荷力が減少することが挙げられる。これらの現象は, 座屈前, ほとんどの要素が圧縮側で降伏していたのに対し, 座屈後では負荷領域と除荷領域が混在することになり, その後のひずみ履歴が, 各要素の応力に大きな影響を及ぼしていることによる。いずれの解析例においても, これらの定性的な現象を追うことができ, 特に2曲面モデルを用いた場合には, 概ね実験値と一致した解が得られている。

また構成式の違いによる数値解析結果を比較すると, バイリニア型では角張ったつり合い曲線を示したのに対し, 2曲面モデルではなめらかな曲線を示している。特に圧縮側の耐荷力付近の荷重-変位曲線は顕著にその差異を示している。さらに2回目以降の耐荷力の減少過程では, バイリニア型を用いた時, 急激な耐荷力の低下がみられ, その後ほとんど変化しないのに対し, 2曲面モデルにおいては, 徐々に耐荷力が減少している。これらの現象は応力-ひずみ曲線の遷移領域の有無によるものであり, 2曲面モデルでの解析が実験結果に近い特性を示していることがわかる。また逆に, この遷移領域が繰り返し荷重下での圧縮側の耐荷力に大きな影響を与えることもわかる。

## (2) 繰り返し水平力を受けるK型筋違骨組<sup>20)</sup>

図-9, 表-1に示すK型筋違骨組を対象に, 構造物レベルの解析において, 本文で示した手法の有効性を検討する。若林らによって行われた実験のうち, 一定鉛直荷重と繰り返し水平力を加えた実験を解析対象とし, 自重による柱の軸力の効果を考慮した数

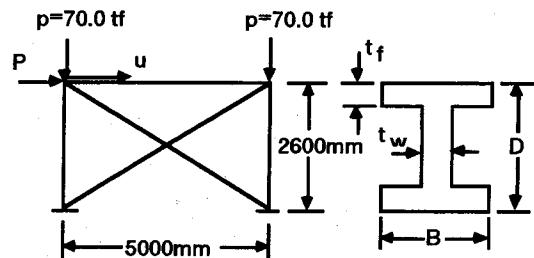


図-9 解析モデル (K型筋違骨組)

表-1 構造諸元

	D (mm)	B (mm)	t <sub>f</sub> (mm)	t <sub>w</sub> (mm)
Column	175.0	175.0	11.0	7.5
Beam	250.0	125.0	9.0	6.0
Bracing	100.0	50.0	6.0	5.0

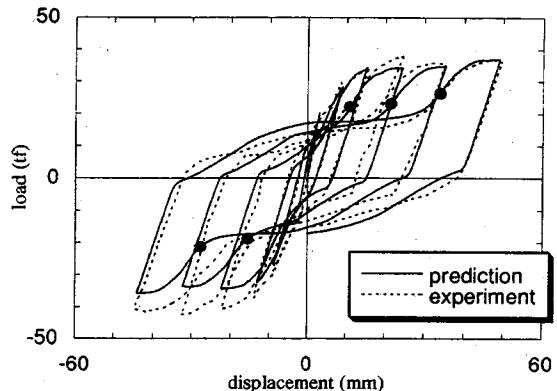


図-10 つり合い曲線

値解析を実施した。解析モデルは柱, はり, ブレースをそれぞれ 10, 20, 20 要素に分割し, 負荷・除荷の判定には 6.(1) と同様な細要素を用いた。解析では, 反復過程の計算に不平衡変位最小法, 構成式として 2 曲面モデルを用い, 降伏応力を  $2400 \text{ kgf/cm}^2$  とし, 境界線の勾配, 切片は, 6.(1) で用いた値をそのまま使用した。また, 一定鉛直荷重による  $P-\Delta$  効果を考慮するために, 式(12)において

$$\{R\} = \lambda\{P_0\} + \{P_{const}\} - \{P_{int}\} \quad (52)$$

を不つり合い力として, 収束計算を行った。ここに  $\{P_{const}\}$  は, 一定外力ベクトルを表している。

図-10は, 水平荷重と荷重点における水平変位のつり合い曲線である。構成式に関していえば 2 曲面モデルの構築に必要な実験結果がないので, 解析時に 6.(1) で用いた値を使用したが, 計算結果は十分骨組構造物の繰り返し挙動の特性をシミュレートして

いる。ただし、今回の解析では、局部座屈の影響を考慮していないこと、構成式が実験データに基づいていないこと、その他数値的誤差が含まれている可能性があることなどから、実験値と計算値は必ずしも一致せず、耐力の大きさや弾性範囲に若干の差異が生じている。

### (3) 数値解析上の考察

数値解析上の特徴としては、図-7、8の極限点附近、不安定領域の部分、また図-10の●点で示した変曲点近傍、あるいは剛性の非常に小さい領域で、収束計算の際に解が発散する現象がみられた点が挙げられる。この原因の1つとして、反復過程における負荷・除荷の判定とその取扱いが考えられる。本論文では、増分過程においてのみ負荷・除荷の判定を行い、反復過程においては負荷だけが発生すると仮定し計算を進めた。つまり収束計算では増分時を基準にした割線剛性を用いて解析を行っていることになる。上記の手法の違いを示したのが図-11である。この数値計算例は、両端ピンモデル（図-5）に軸方向変位が2mmに達するまで、単調載荷した場合の中間最外部の細要素の応力-ひずみ曲線であり、○部の拡大図も付図している。図-11に示すように、反復過程において負荷・除荷を考慮した場合、取り扱いとしては厳密であるが、数値計算上は応力-ひずみ曲線がのこぎり状の曲線を示し、物理的に矛盾した結果となる。これは、反復過程においては少しでも変位が逆戻りした場合、除荷とみなされて剛性が大きく変動すること、さらに判定条件によっては除荷された時点を収束とみなしたり、負荷された時点を収束とみなしたりする可能性があるからである。一方、本論文で用いた方法では、それらの点が回避され、つり合い点での応力は物理的に妥当な値を示している。6.(1)の解析例において、上記の手法を適用することにより、のこぎり状の応力-ひずみ曲線は見られなくなり、図-7の耐荷力を示す極限点を超えることができた。さらに目標変位に達するまでの増分数が大幅に減少した。

また不安定領域や剛性の非常に小さい領域での解の発散は、接線剛性マトリックスの状態が *ill condition* となり、数値的な不安定によるものと考えられる。さらに今回用いた解析モデルのように、曲げ圧縮を受ける複雑なつり合い径路をとる弾塑性有限変位解析においては、弧長増分量や収束判定条件が解の安定性に大きな影響を与えるため、これらについて十分検討する必要があるものと思われる。本研究を通しての増分量や収束判定条件に関する試行錯誤の結果、ステアリングを用いずに、精度よく安

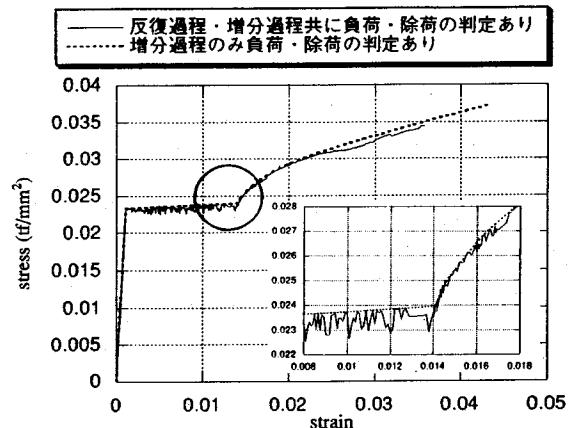


図-11 応力-ひずみ曲線

定した解を得るために目安としては、弧長としては、数値誤差の累積が無視し得る範囲内で十分小さな弧長を用い、収束判定条件に関しては、増分過程で生じた不つり合い力のノルムに対し収束計算後の不つり合い力のノルムが  $1/4 \sim 1/3$  となった時点を収束と判断する、のが適切であるとの知見を得た。

## 7.まとめ

弾塑性有限変位解析を通して得られた結果をまとめる以下のような。

- 1) 弾塑性挙動を適切に表現できる構成則を得ることができれば、反復計算に不平衡変位最小法を用いることにより、繰り返し荷重を受ける骨組構造物の弾塑性有限変位解析を精度よく行うことができる。
- 2) 弹塑性力学モデルとして2曲面モデルを構成式に用いれば、応力-ひずみ曲線の遷移領域を表現することができ、この遷移領域の存在が、繰り返し外力の2サイクル目以降の荷重-変位曲線を実際の現象に近づけていることが分かった。
- 3) 非線形の収束計算の際に解が発散する現象は、反復過程の負荷・除荷の判定を、増分過程において行い、反復過程では負荷のみが発生すると仮定（増分時を基準にした割線を使用）することにより回避できることがわかった。
- 4) 増分過程における弧長増分量と収束判定条件は、解析精度に大きな影響を与え、収束計算の際に解が発散することさえある。従って、増分過程における弧長としては、できる限り微小ものを用い、収束判定条件としては、増分過程で生じた不つり合い力のノルムに対し収束計算後の

不つり合い力のノルムが1/4~1/3に減じた時点を収束と判断するのが妥当であると考えられる。

謝辞：本論文作成にあたり、早稲田大学大学院生小玉乃理子氏の協力を得た。ここに記して、感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1) Chi Shen,Eiji Mizuno and Tsutomu Usami:Development of a cyclic two-surface model for structural steels with yield plateau.*NUCE Research Report*,No.9,1993.
- 2) 橋口公一：最新 弾塑性学，朝倉書店，1990年。
- 3) 西村,小野,池内,新家：各種鋼材の繰り返し塑性履歴特性に関する実験的研究,鋼構造論文集,第1巻第1号,1994年3月。
- 4) Petersson, H.and Popov, E.P.:Costitution Relation for Generalized Loadings, *Proc.ASCE*, Vol.103, No. EM 4, pp.611-627,1977.
- 5) 皆川勝：構造用鋼材の弾塑性履歴挙動のモデル化とその構造部材への応用，武藏工業大学提出学位論文,1988年3月。
- 6) Dafalias,Y.F.and Popov,E.P.:Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, *Jour, Appl. Mech.*, pp.645-651, December 1976
- 7) 北川浩：塑性力学の基礎，日刊工業新聞社，1979年。
- 8) 成岡昌夫,中村恒善 共編：骨組構造解析法要覧,日本鋼構造協会,培風館, 1976年。
- 9) 鶩津久一郎他：有限要素法ハンドブック応用編, 培風館, 1983年。
- 10) 吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, 第374号/I-6, 1986年10月。
- 11) Chen, Han : *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag,1988.
- 12) 石川, 依田：不平衡変位最小法を用いた繰り返し軸力を受ける部材の弾塑性有限変位解析,構造工学における数値解析法シンポジウム論文集,Vol.18,1994年7月。
- 13) M.A.Crisfield : A First Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through", *Computers & Structures* Vol.13,pp.55-62,1980.
- 14) M.A.Crisfield : *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures* Vol.1,John Wiley & Sons,1992.
- 15) 土木学会編：土木工学ハンドブック,技報堂出版, 1986年。
- 16) 石川,依田：骨組構造物の幾何学的非線形解析における不つり合い力の補正,構造工学論文集,Vol.40A,1994年3月。
- 17) M.J.Clarke, G.J.Hancock : A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analysis, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol.29, 1365 - 1391,1990.
- 18) D.R.J.Owen, E.Hinton : *Finite Elements in Plasticity :Theory and Practice*, Pineridge Press Limited Swansea,U.K, 1980.
- 19) 若林,野中,小城,山本：繰り返し軸方向力を受ける部材の挙動に関する一実験,京都大学防災研究所年報, 14A,pp.371-381,1971年。
- 20) 若林,松井,南,三谷：鉄骨ラーメンの弾塑性性状に関する実大実験,京都大学防災研究所年報, 13A,pp.329-363,1970年。

(1995.1.25 受付)

## ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF STEEL STRUCTURES UNDER CYCLIC LOADING USING MINIMUM RESIDUAL DISPLACEMENT METHOD

Tomomi ISHIKAWA and Teruhiko YODA

The elasto-plastic behavior of steel structures under cyclic loading is one of the significant subjects to estimate design criteria and design procedures based on the ultimate state. Analyzing the cyclic response of steel structures, it is necessary to estimate a mechanical model which can represent well a cyclic stress-strain relationship of steel and numerical techniques for the solution of non-linear structure problem. In this paper, we propose a solution method for an elasto-plastic large deformation analysis under uniaxial cyclic loading, which introduces a new iteration technique of minimizing the residual displacements for correcting residual force and a modified two-surface model as a constitutive equation. A few numerical simulations are presented to show the accuracy and efficiency of the proposed method.