

**投稿論文(和文)  
PAPERS**

# 弾塑性信頼性解析による鋼製枠砂防ダムの 安全性照査法

香月 智<sup>1</sup>・伊藤一雄<sup>2</sup>・石川信隆<sup>3</sup>・阿部宗平<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 防衛大学校助教授 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

<sup>2</sup>正会員 工修 防衛大学校研究員 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

<sup>3</sup>フェロー 工博 防衛大学校教授 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

<sup>4</sup>(財)砂防・地すべり技術センター研究開発課長 (〒162 東京都新宿区市ヶ谷砂土原町2-7)

本研究は、ホロノミック弾塑性解析法を利用したトラス構造の弾塑性信頼性解析法を開発するとともに、不確定な土石流、堆砂圧、中詰材圧荷重を受ける鋼製枠砂防ダムの弾塑性変位を限界状態とする安全性照査法を提案するものである。すなわち、まずホロノミック弾塑性解析法の基本式を信頼性解析法に適用可能なように誘導するとともに、各種弾塑性モードの創出法を開発した。次に、トラス構造の弾塑性変位限界および構造崩壊による変位限界の二つの限界状態に関する信頼性解析法を提案した。さらに、これを用いて不確定荷重を受ける3部材トラスの弾塑性信頼性解析を行って本法の妥当性を検証するとともに、鋼製枠砂防ダムの安全性照査法について検討したものである。

**Key Words :** steel frame check dam, uncertain loads, holonomic elastic plastic analysis, elastic plastic displacement limit state, FORM

## 1. 緒 言

近年の降雨・土砂災害による被災規模の拡大<sup>1)</sup>とともに、土石流対策が益々重要となってきた。いくつかある砂防ダムの中で、鋼製枠砂防ダムは、鋼製骨組枠の中に礫中詰材を詰めて作られる構造物で、短期施工性、屈撓性および透水性が優れているため、近年その建設機会が多くなりつつある<sup>2)</sup>。

一般に鋼製枠砂防ダムは、土石流を主荷重としない掃流域において建設されることが多いが、火山災害時などにはその短期施工性と屈撓性の利点から、土石流を受ける地域においても建設されることがある<sup>3)</sup>。この場合、鋼製部材の塑性域での大きな韌性が期待されるが、現在、この長所を生かした設計を行うまでには至っていない。しかし、鋼製砂防構造物設計便覧<sup>4)</sup>では、土石流荷重などに対して弾塑性域での安全性の照査を導入することが経済性・合理性の面から重要であることを指摘している。

一方、土石流荷重は、稀にしか発生せず、そのエネルギーが強大かつ不確定要素が多いので、確定的手法に基づいて安全性を照査することは、合理的とはいえない。さらに、鋼製枠砂防ダムは、常に

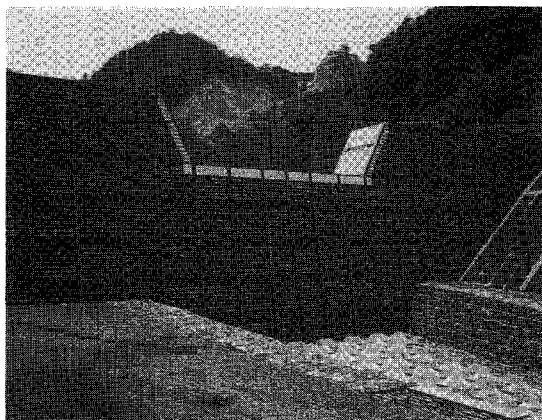


写真-1 鋼製枠砂防ダムの一例

作用する流水圧、背面貯砂圧、中詰材圧荷重を考慮する必要があるが、これらの荷重にも不確定要因が大きい。このため、このような砂防ダムに対しては確率論的手法により安全性照査を行うことが必要と思われる。

さて、欧米では構造物の設定寿命中に生起し得る極めて稀でかつ大きな荷重に対して、構造物の塑性域での破壊限界（終局時）を設定し、弾性限界からの構造物の余裕度として評価する研究が行われ、海岸構造物や橋梁などの分野で信頼性解析法を導入した設計法が採用されつつある<sup>5), 6)</sup>。しかし、これまで弾性限界から最終崩壊の間に存在する塑性域での変形限界状態を直接導入した研究は少い<sup>7)</sup>。その理由は、塑性变形の限界状態の定義が難しいことと、塑性解析と信頼性解析との結合が困難であることに帰因している。この解決策の一つの方法として、著者ら<sup>8)</sup>は不確定荷重を受けるトラス構造物のホロノミック塑性解析を応用した信頼性解析法を提案した。その方法は、信頼性指標を与えるデザインポイントの探索を塑性モード創出法とホロノミック塑性解析を組み合わせることにより、着実かつ効率的に行うものである。すなわち、文献<sup>8)</sup>では、基本式の導出とその意義を説明するための基本構造に対する適用例を示したが、具体的な実構造物への適用性については検討していなかった。

そこで、本研究は、上記研究<sup>8)</sup>をさらに発展させること、まず不確定荷重を受けるトラス構造物の塑性信頼性解析法を説明し、次に土石流を受ける鋼製枠砂防ダムの安全性照査法への応用について検討を試みるものである。

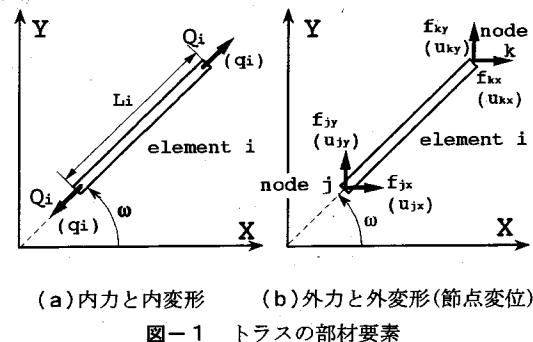
なお、本研究においては次の仮定を用いる。

- ① 構造系の不確定要因としては、荷重のみを考慮し、鋼材の持つ材料特性は確定的に取り扱えるものとする。
- ② 各構造部材の塑性応答は、ホロノミック塑性応答（リバーシブル、非履歴依存、非除荷効果）に従うものとする。
- ③ 信頼性指標  $\beta$  は、換算変数空間における全ての限界状態の破壊関数の中で、最小原点間距離によって与えられるものとする。

## 2. 確定的ホロノミック塑性解析手法

### (1) ホロノミック塑性解析の定義

ホロノミック塑性解析<sup>9)</sup>とは、与えられた荷重状態  $\mathbf{f}$  に対してその荷重状態  $\mathbf{f}$  へ至る履歴を無視した全変形理論に基づく塑性解析手法で、その荷重レベルの応力および変形状態を直ちに求めるものである。したがって、除荷の影響を無視して増分解析を行わないため、計算の効率化を図れる利点がある反面、正確さに欠けるという欠点もある。しかし、比例荷重のもとでは、部材の除荷過程は極めて稀に



(a) 内力と内変形 (b) 外力と外変形(節点変位)

図-1 トラスの部材要素

しか生じせず、また例え生じた場合でも同一荷重に対する変形状態は、大きな相異を生じないことが示されている<sup>10), 11)</sup>。よって、ホロノミック塑性解析は、不確定な荷重下における構造応答を求める際には、十分許容し得る解析法といえる。

### (2) 従来の解析基本式

ホロノミック塑性解析の計算手順<sup>9)</sup>は、荷重増分過程の解析を行わず、与えられた荷重状態に対して直接構造解析を行うことになる。ここでは、トラス部材に対する従来の解析基本式を示す。

すなわち、トラス部材に働く内力  $\mathbf{Q}$  (内変形  $\mathbf{q}$ ) および外力ベクトル  $\mathbf{f}$  (節点変位ベクトル  $\mathbf{u}$ ) を図-1に示すように表わすものとすれば、ホロノミック塑性解析の基本条件式は、以下のように表わされる<sup>13)</sup>。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Cu} \quad (2)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p \quad (3)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{q}^e \quad (4)$$

$$\mathbf{q}^p = \mathbf{N}\lambda \quad (5)$$

$$\phi = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R} \leq 0 \quad (6)$$

$$\phi^T \lambda = 0 \quad (7)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (8)$$

ここで、式(1)は外力ベクトル  $\mathbf{f}$  と内力 (軸力) ベクトル  $\mathbf{Q}$  とが、釣合マトリックス  $\mathbf{C}^T$  によって関係づけられる釣合条件式を表わし、式(2)は、内変形(部材の伸び)ベクトル  $\mathbf{q}$  と節点変位ベクトル  $\mathbf{u}$  が、変形適合マトリックス  $\mathbf{C}$  によって関係づけられる変形適合条件を表わす。式(3)は、部材の内変形  $\mathbf{q}$  が弹性内変形ベクトル成分  $\mathbf{q}^e$  と塑性内変形ベクトル成分  $\mathbf{q}^p$  の和によって表わされることを示す。式(4)は、内力  $\mathbf{Q}$  と弹性内変形ベクトル  $\mathbf{q}^e$  の線形関係を示し、 $\mathbf{k}$  は集合部材剛性マトリックスである。式(5)

は、塑性内変形ベクトル  $\mathbf{q}^p$  が、降伏条件式への単位外向き法線マトリックス  $\mathbf{N}$  と塑性乗数ベクトル入の積によって与えられることを示す。式(6)は、降伏関数ベクトル  $\phi$  の非正条件、つまり単位外向き法線マトリックス  $\mathbf{N}^T$  と内力ベクトル  $\mathbf{Q}$  の内積が要素の塑性容量ベクトル  $\mathbf{R}$  を越えないという降伏条件を示す。式(7)は、塑性変形発生条件（相補条件ともよばれる）であり、例えある降伏関数  $\phi_i$  が負 ( $\phi_i < 0$ ) すなわち弾性の場合には、対応する塑性乗数  $\lambda_i$  が 0 (塑性変形が発生しない) であり、逆に、ある降伏関数  $\phi_i$  が 0 ( $\phi_i = 0$ ) すなわち降伏の場合に、対応する塑性乗数  $\lambda_i$  が正 ( $\lambda_i \geq 0$ ) (塑性変形が発生する) となることを意味している。なお、これらの  $\lambda_i$  の値は計算により求まる量である。

以上の基本条件式を用いれば、従来の確定的弾塑性解析が可能となるが、式(7)の線形相補問題の解き方において、繰り返し計算をする<sup>12)</sup>。

### (3) 提案する解析基本式

従来の解析法では、線形相補問題を繰り返し計算によって解くため、信頼性解析と陽な形で組み合わせることはできない。そこで、式(7)を 2 つのグループに分けることによって、この問題を解決することとする。すなわち、式(7)を降伏関数が 0 ( $\phi_i = 0$ ) で塑性乗数が非負 ( $\lambda_i \geq 0$ ) の組合せ（ここではアクティブセットと呼ぶ）と、逆に降伏関数が 0 でなく ( $\phi_i < 0$ )、塑性乗数が 0 ( $\lambda_i = 0$ ) の組合せ（非アクティブセットと呼ぶ）に分けて指定するものとする<sup>11)</sup>。つまり、式(6)および式(8)が次のように 2 つのセットに分けられるものとする。

$$\bar{\phi} = \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{R}} = 0 \quad (9a)$$

$$\bar{\lambda} \geq 0 \quad (9b)$$

$$\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{R}} < 0 \quad (10a)$$

$$\tilde{\lambda} = 0 \quad (10b)$$

ここで、符号一および～は、それぞれアクティブセットおよび非アクティブセットを意味する。式(9b), (10b)を式(5)に代入すると、塑性内変形ベクトル  $\mathbf{q}^p$  は、アクティブセットのみの関数となり次式のように表わされる。

$$\mathbf{q}^p = \bar{\mathbf{N}} \bar{\lambda} \quad (11)$$

式(2)～(4)および式(9a), (11)から、塑性乗数ベクトル入が次式のように求められる。

$$\bar{\lambda} = \mathbf{K}_n^{-1} [\bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{R}}] \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{K}_n = \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}}$  (13)

よって、式(1)～(4)および式(9)～(12)を用いて再整理すると、アクティブセットを予め指定した条件

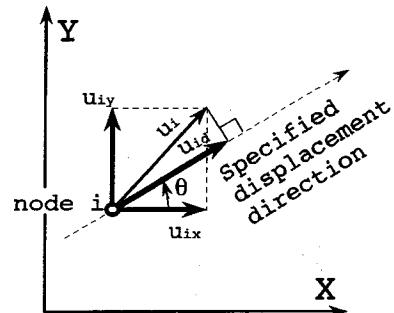


図-2 指定変位方向への応答変位  $u_{id}$

下でのホロノミック弾塑性解析の基本式が以下のように定式化される。

$$\text{Given : } \mathbf{C}, \mathbf{k}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{R}}$$

$$\text{Find : } \mathbf{u} = \mathbf{K}_{ep}^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{C}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{K}_n^{-1} \bar{\mathbf{R}}] \quad (14)$$

Subject to :

$$\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} [\mathbf{C} - \bar{\mathbf{N}} \mathbf{K}_n^{-1} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \mathbf{C}] \mathbf{u} \quad (15)$$

$$+ \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{K}_n^{-1} \bar{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}} < 0$$

$$\bar{\lambda} = \mathbf{K}_n^{-1} [\tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{R}}] \geq 0 \quad (16)$$

ただし、

$$\mathbf{K}_{ep} = \mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{K}_n^{-1} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \quad (17)$$

ここに、式(14)はアクティブセットが指定されたときの弾塑性変位  $\mathbf{u}$  を陽な形で求める解析式であり、式(15), (16)は非アクティブセットあるいはアクティブセットが指定されること、つまり弾塑性モードが創出されることを意味する。

よって、式(14)は、任意の  $\mathbf{f}$  ベクトルに対して式(15)および(16)を満足する条件下で、陽な形で変位を求めることができるため、信頼性解析法の変位限界状態を設定する際に便利となる。

### 3. 弹塑性変位限界に対する信頼性解析の定式化<sup>8)</sup>

#### (1) 信頼性指標の定義

本研究では、構造物の限界状態を構造物のある指定した節点の弾塑性変位が指定方向（水平、垂直または任意）への許容変位を越えることによって定義するものとする。すなわち、安全性余裕関数  $M$  は、以下のように表わされる。

$$M = u_{ia} - u_{id} \quad (18)$$

ここに、 $u_{ia}$  は許容変位で確定量として与えられる。また、 $u_{id}$  は指定変位方向に沿った弾塑性変位で、荷重の不確定性にともなう確率変数であり、図

表-1 ト拉斯構造の弾塑性モード創出法

アクティブセットの降伏条件式の数	0(弹性)	$1, \dots, n$ (弾塑性)	NR(不静定次数)
降伏部材の番号の組合せ	選択せず	n個の部材番号を順番に全組合せを選択し、選択された部材に引張( $\phi^+$ )と圧縮( $\phi^-$ )降伏の組合せを作る	NR個の部材番号を順番に全組合せを選択し、選択された部材に引張( $\phi^+$ )と圧縮( $\phi^-$ )降伏の組合せを作る
N部材での弾塑性モードの全創出数	$2^0 (0 \text{CN}) = 1$	$2^n (n \text{CN})$	$2^{NR} (NR \text{CN})$

-2に示すように節点変位のx, y方向成分を使って次式によって与えられる。

$$u_{id} = u_{ix} \cos \theta + u_{iy} \sin \theta \quad (19)$$

ただし、 $\theta$ は指定変位方向とx軸とのなす角度。

式(18)より、 $M=0$ は弾塑性変位が許容変位にちょうど達した状態つまり弾塑性変位限界状態を意味し、 $M>0$ は弾塑性変位が許容変位に達しない状態つまり安全性に余裕がある状態で、さらに $M<0$ は弾塑性変位が許容変位を越えた状態で、破壊状態(危険状態)を示している。

さて、本研究ではシステム全体の中で、確率変数を荷重のみとし、正規分布に従うばらつきを有するものと仮定する。また信頼性指標 $\beta$ を、破壊限界状態面上における最も確率密度関数が大きい点(Most probable failure pointまたはDesign point)と原点との距離によって与えられるものとする。この仮定は、複数の限界状態の相関性を無視するため、信頼性を過大評価する可能性もある。しかし、ここでは、弾塑性変形を限界状態として考慮するため、弾塑性解析と複雑なシステム信頼性解析とを結合した計算負担を防ぐ意味から、上記のようなデザインポイントを採用した。すなわち、標準化された換算荷重変数 $y_i (= (f_i - \bar{f}_i) / \sigma_{fi})$  ( $f_i$ : 荷重ベクトル要素 $f_i$ の平均値,  $\sigma_{fi}$ : 荷重ベクトル要素 $f_i$ の標準偏差) 空間でのデザインポイントは、単に破壊局面と原点との距離が最小となる点で与えられ、次式のように信頼性指標 $\beta$ が表されることになる<sup>12), 13)</sup>。

$$\beta = \min D = \min \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{f_i - \bar{f}_i}{\sigma_{fi}} \right)^2} \quad (20)$$

$$\text{Subject to : } M = u_{ia} - u_{id} = 0 \quad (21)$$

表-2 3部材ト拉斯(不静定次数 NR=1, 部材総数 N=3)の弾塑性モードの創出法

降伏部材の数	n=0	n=1 (NR)	
		①	①の+側=① <sup>+</sup> ①の-側=① <sup>-</sup>
		②	② <sup>+</sup> ② <sup>-</sup>
		③	③ <sup>+</sup> ③ <sup>-</sup>
全創出数		1	${}_1 C_3 \times 2^1 = 6$

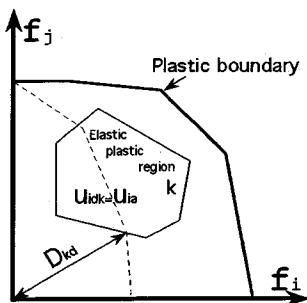
表-3 4部材ト拉斯(不静定次数 NR=2, 部材総数 N=4)の弾塑性モードの創出法

降伏部材の数	n=0	n=1	n=2 (NR)	
		① <sup>+</sup> ① <sup>-</sup>	①② ① <sup>+</sup> ② <sup>+</sup> , ① <sup>+</sup> ② <sup>-</sup> ① <sup>-</sup> ② <sup>+</sup> , ① <sup>-</sup> ② <sup>-</sup>	
		② <sup>+</sup> ② <sup>-</sup>	①④ ① <sup>+</sup> ④ <sup>+</sup> , ① <sup>+</sup> ④ <sup>-</sup> ① <sup>-</sup> ④ <sup>+</sup> , ① <sup>-</sup> ④ <sup>-</sup>	
		③ <sup>+</sup> ③ <sup>-</sup>	②③ ② <sup>+</sup> ③ <sup>+</sup> , ② <sup>+</sup> ③ <sup>-</sup> ② <sup>-</sup> ③ <sup>+</sup> , ② <sup>-</sup> ③ <sup>-</sup>	
		④ <sup>+</sup> ④ <sup>-</sup>	②④ ② <sup>+</sup> ④ <sup>+</sup> , ② <sup>+</sup> ④ <sup>-</sup> ② <sup>-</sup> ④ <sup>+</sup> , ② <sup>-</sup> ④ <sup>-</sup>	
全創出数		1	4	8 6 24

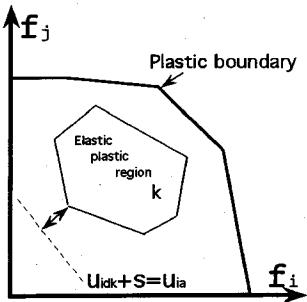
## (2) 弹塑性モード創出法

ところで、前記のホロノミック弾塑性解析の式(14)～式(16)においては、アクティブセットを予め指定することが前提となっている。そこで、アクティブセットを指定することは、降伏している部材と降伏していない部材を選択して構造全体の弾塑性モードを造り出すことである。また、ランダムな荷重ベクトル $f$ のもとでは、その構造が有する全ての弾塑性モードを生起する可能性があるため、全ての弾塑性モードに対して弾塑性変形限界状態の可能性がある。よって、本研究では、一般的なト拉斯構造を対象として、部材数と不静定次数によって全てのアクティブセットの組合せを創出させる方法を表-1のように開発した。すなわち、弾塑性モード創出のための具体的な手順は、以下のとおりである。

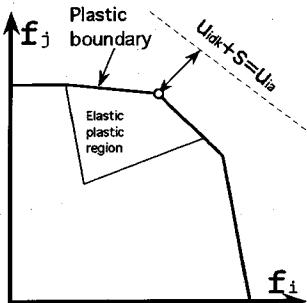
① まず、降伏部材の数nを0から順に、不静定次数NRまで指定する。ここで、nがNRを越えないのは、NR+1以上の部材が降伏すると構造物が崩



(a)  $s = 0$  の場合



(b)  $s < 0$  の場合



(c)  $s > 0$  の場合

図-3 弾塑性変位の限界状態面と弾塑性モードに対する許容荷重領域

壊するからである。

② 次に、部材総数Nの中から、 $n$ 個の部材を選択する全部の組み合わせ、すなわち、 $C_N$ 組を作成する。

③ 1組の $n$ 個のアクティブな降伏部材の組み合わせにおいて、1本の部材が、それぞれ圧縮に降伏した場合( $\phi^-$ )と引張に降伏した場合( $\phi^+$ )の全組み合わせ、すなわち、 $2^n$ 組を作成する。

④ 以上の手順で、全ての可能なアクティブセットの組み合わせが得られ、その総数NTは、次式によって与えられる。

$$NT = \sum_{i=0}^{NR} 2^i C_N \quad (22)$$

例えば、3部材トラスの場合は表-2、4部材トラスの場合は、表-3のような弾塑性モードと全数が得られる。

### (3) 弾塑性変位限界の信頼性解析の基本式

弾塑性モード創出法によって作られた個々の弾塑性モード  $k$  における弾塑性変位に関する信頼性解析とは、換算変数空間において原点と破壊曲面との最小距離  $D_{kd}$  を算定することであり、ここでは、式(21)の制約部分を、式(14)、(15)および(16)によって置換して、次式のように表わされる。

Find :  $\mathbf{f}$

$$\text{Objective : } D_{kd} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{f_i - \bar{f}_i}{\sigma_{fi}} \right)^2} \rightarrow \min \quad (23)$$

$$\text{Subject to : } u_{idk} = u_{ia} \quad (24)$$

$$\tilde{\phi}_k < 0, \quad (25)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (26)$$

ここに、添字  $k$  は弾塑性モード創出法によって作られた  $k$  番目の弾塑性モードに関するこことを、添字  $d$  は弾塑性変位限界に関するこことを示している。よって、変位信頼性指標  $\beta_d$  は、次式によって与えられる。

$$\beta_d = \min_k D_{kd} \quad (27)$$

### (4) 構造崩壊の信頼性解析

弾塑性モードにおいて非アクティブセットの中のどれか1つの部材が降伏する(アクティブになる)と構造物が崩壊メカニズムを形成する可能性がある。そのとき式(23)～(26)の弾塑性変位限界の信頼性解析では解が得られなくなる。つまり、この物理的意味は、弾塑性モードの領域内に、弾塑性変位限界が存在しないことを意味する(図-3 (b) または(c) 参照)。

この状態を解決するため、弾塑性変位の信頼性解析の基本式をスラック変数  $s$  を導入することによって、次のように修正することとした。

Find :  $\mathbf{f}, s$

Objective :

$$D_{kd} + C_{pe}|s| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{f_i - \bar{f}_i}{\sigma_{fi}} \right)^2} + C_{pe}|s| \rightarrow \min \quad (28)$$

$$\text{Subject to : } u_{idk} + s = u_{ia} \quad (29)$$

$$\tilde{\phi}_k < 0, \quad (30)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (31)$$

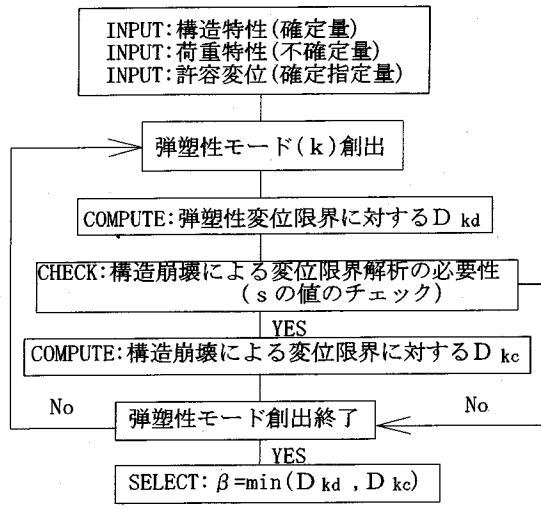


図-4 弹塑性信頼性解析の手順

ただし、 $s$ ：スラック変数、 $C_{pe}$  正の罰金係数で、スラック変数  $s$  の絶対値を抑制するように大きな値をもち、例えば、 $C_{pe} = 10^6$  の値とする。ここで、スラック変数  $s$  を付加した理由は、 $s$  の値によって図-3(a)のように弾塑性モード内に変位限界が存在するか( $s = 0$ )、あるいは図-3(b)のように解が存在しない( $s < 0$ )か、さらに図-3(c)のように構造崩壊になるか( $s > 0$ )を判別するためである。いま、 $s > 0$  の場合は、次の塑性解析<sup>14)</sup>を行う必要がある。

$$\text{Given: } \mathbf{C}^T, \mathbf{f}^*, \mathbf{N}, \mathbf{R} \quad (32a)$$

$$\text{Find: } \alpha, \mathbf{Q} \quad (32b)$$

$$\text{Objective: } \alpha \rightarrow \max \quad (33)$$

$$\text{Subject to: } \mathbf{C}^T \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{f}^* = \mathbf{0} \quad (34)$$

$$\phi = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R} \leq \mathbf{0} \quad (35)$$

ただし、 $\mathbf{f}^*$ ：式(28)～(31)の解によって得た荷重ベクトル、 $\alpha$ ：荷重係数で、 $\alpha = 1$ となる場合は、弾塑性領域と崩壊領域の境界線上にあることを意味し、(図-3(c)の場合)構造崩壊による変位限界が現れることになる。なお、 $\alpha = 1$ 以外の場合は解なしと判定する。

よって、 $s > 0$  かつ  $\alpha = 1$  の場合、構造崩壊の信頼性解析が、今までのアクティブセットに加えて、新たに降伏した部材の降伏条件を導入して、次式のように行われる。

$$\text{Find: } \mathbf{f}$$

$$\text{Objective: } D_{kc} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{f_i - \bar{f}_i}{\sigma_{f_i}} \right)^2} \rightarrow \min \quad (36)$$

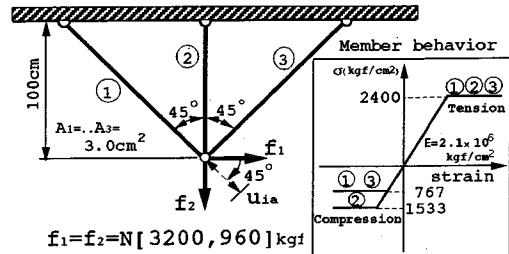


図-5 不確定荷重を受ける3部材トラス

$$\text{Subject to: } \tilde{\phi}_{kl} = \mathbf{0} \quad (37)$$

$$\tilde{\phi}_k < \mathbf{0} \quad (38)$$

$$\bar{\lambda}_k \geq \mathbf{0} \quad (39)$$

ここで、 $\tilde{\phi}_{kl}$ ：非アクティブセットの中から新たに加えられた降伏関数ベクトル。すなわち、構造崩壊の信頼性解析は、弾塑性変位の信頼性解析の式(29)を式(37)に置き換えたことになり、これを「構造崩壊による変位限界」と定義することとする。

以上の基本式を用いて、実際の数値計算を行う場合は、 $\tilde{\phi}_k$ 、 $\bar{\lambda}_k$ などを式(14)、(15)、(16)を用いてすべて  $\mathbf{f}$  の関数として解くことになる。

よって、弾塑性変位と構造崩壊の2つの解析で得られた  $D_{kd}$  および  $D_{kc}$  のうち最小値を構造全体の信頼性指標  $\beta$  として選ぶことになる。すなわち、

$$\beta = \min(D_{kd}, D_{kc}) \quad (40)$$

式(28)～(31)と式(36)～(39)を解くためには、非線形計画法の解析を行う必要がある。本研究では、この制約条件式が線形関数となっていることに着目し、逐次線形計画法(SLP)<sup>15)</sup>によってこれを解くこととした。

以上の基本式に基づく弾塑性信頼性解析の手順を図-4に示す。

#### 4. 3部材トラスの弾塑性信頼性解析<sup>8)</sup>

図-5に示す不確定荷重を受ける3部材トラスについて、提案する手法の計算過程を検証する。本法は、本来多変数のランダムな荷重を取り扱うことができるが、本例題では、図的に分かり易く説明するため、確率変数を  $f_1$  と  $f_2$  の2つとした。すなわち、水平および垂直方向に独立して変動する正規分布に従う不確定荷重  $f_1$  と  $f_2$  を作用させ、許容変位は荷重作用点の45°方向とする。

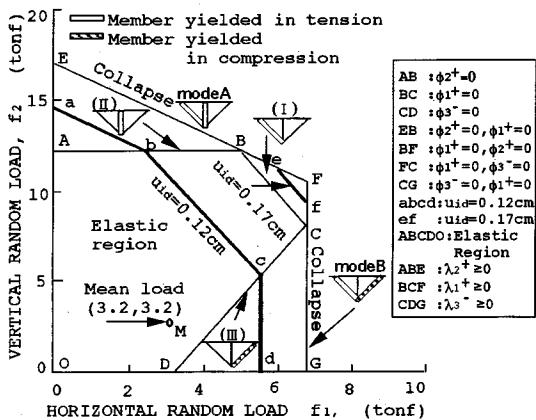


図-6 荷重組合せによる弾塑性モード区分と等変位線(3部材トラス)

### (1) 弹塑性変位限界の図的考察

さて、図-6は解析結果の一部を図示したもので、図中のABCDOは、弾塑性モード創出法によって作られた荷重組合せの線である。一方、線分ab c dおよび線分efは、弾塑性解析による応答変位量 $u_{id}=0.12$ および $0.17\text{cm}$ を生じた荷重組合せの線である。これより以下のことがわかる。

①まず、5角形ABCDOによって囲まれる内側の荷重領域は、弾性応答を生じさせる。しかし、直線AB、BCおよびCDの線上では、それぞれ第2部材引張り降伏(II)，第1部材引張り降伏(I)および第3部材圧縮降伏(III)の限界に達した状態を意味し、これより外側の荷重状態は、このトラスに弾塑性応答を生起させる。

②次に、直線EFおよびFGの線上では、それぞれ第1、2部材降伏(モードA)および第1、3部材降伏(モードB)の状態を表し、このトラスに崩壊メカニズムを形成させる。よって、これらの直線の外側にある荷重状態は、構造物に崩壊状態を生起させる。

③さて、折線abc d上は、応答変位量が $u_{id}=0.12\text{cm}$ となる荷重組合せ状態を示している。ここで、許容変位を $u_{ia}=0.12\text{cm}$ と仮定すると、この境界線より内側に存在する荷重状態は、変位限界に達していない。しかし、線分bc上では弾性変位限界に(弾性領域内なので)、また線分ab, cd上は弾塑性変位限界に(弾塑性領域内なので)達したことを意味する。

④さらに直線efは応答変位量 $u_{id}=0.17\text{cm}$ の荷重組合せ状態を示している。ここでも許容変位を $u_{ia}$

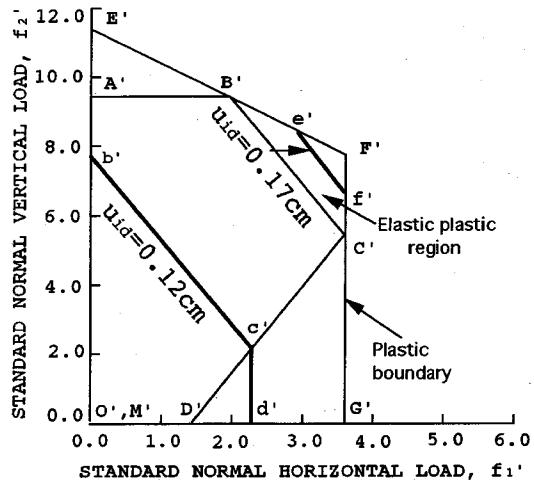


図-7 換算変数空間での弾塑性モード区分と等変位線(3部材トラス)

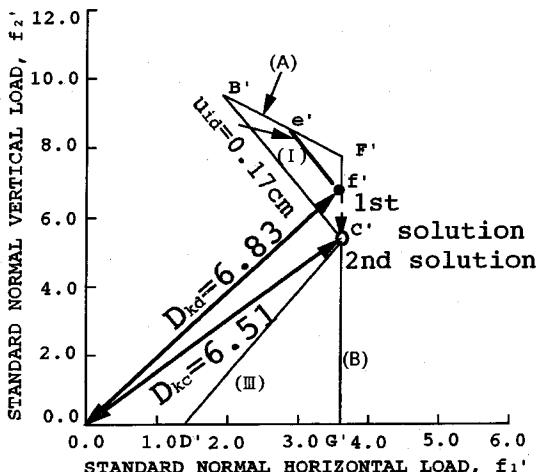


図-8 第1部材引張り降伏弾塑性モードにおける最短距離点 $D_{kd}$ ,  $D_{kc}$ の解析

$=0.17\text{cm}$ とすると、この直線efは弾塑性変位限界状態を意味する。一方、この直線は、構造物の崩壊の境界線EFおよびFGに交差している。よって、直線EfまたはFG上ではトラスの崩壊を意味しているが、応答変位量は $u_{id} < 0.17\text{cm}$ である。よって、EfまたはFG線上では構造崩壊による変位限界状態を付加することが必要となる。

図-7は、図-6で示した区分境界線を換算荷重変数空間に変換したものである。以上より、式(40)で定義した信頼性指標 $\beta$ が、図-6における一連の破壊線と原点間との最小距離によって与えられるこ

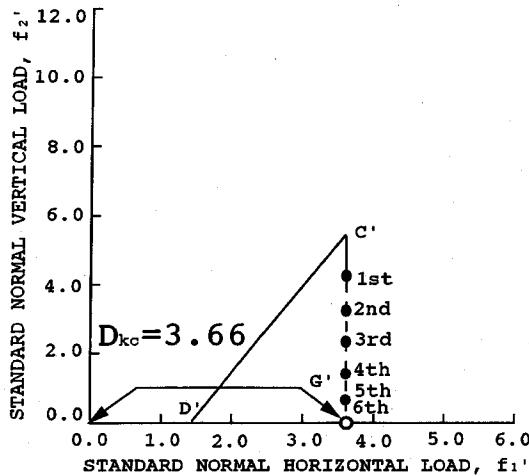


図-9 第3部材圧縮降伏弾塑性モードにおける最短距離点 $D_{kc}$ の解析

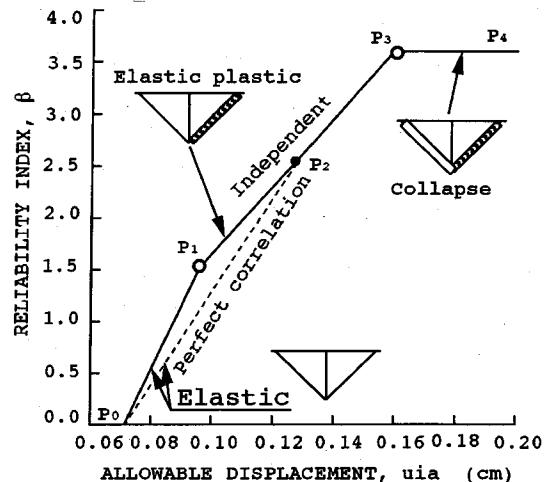


図-10 信頼性指標～許容変位関係  
(3部材トラス)

となり、この数値計算結果は、以下のようなになる。

図-8および9は、許容変位量 $u_{ia}=0.17\text{cm}$ と仮定したときの特徴的な2つの弾塑性モード領域での計算過程を示したものである。図-8のB'C'は、第1部材が引張り降伏した弾塑性モード(I)を示すが、直線e'f'はその弾塑性モード領域B'F'C'内にちょうど弾塑性変位限界状態が存在することを意味する。よって、式(28)～(31)を用いて、最短距離 $D_{kd}=6.83$ を与えるf'点を得る( $s=0$ )。しかし、このf'点は同時に、式(32)～(35)の塑性解析結果からこの点が構造崩壊による限界状態(崩壊モードB)であること( $\alpha=1.0$ )も確認される。よって、構造崩壊の信頼性解析(式(36)～(39))を行うと、2回目の解として最短距離 $D_{kc}=6.51$ のC'点が得られる。このC'点は、第3部材が圧縮降伏した弾塑性モード(III)を示すが、その直線C'D'上に弾塑性変位の限界状態線が存在しないので、構造崩壊の信頼性解析を行うこととなる( $s>0$ ,  $\alpha=1.0$ )。よって、図-9のように構造崩壊のC'G'上(崩壊モードB)において、最短距離 $D_{kc}=3.66$ を与える点G'が得られることになる。つまり、最終的に許容変位 $u_{ia}=0.17\text{cm}$ に対する安全性指標は、式(40)の定義から点G'における $\beta=3.66$ となる。この点G'は、“最も破壊しそうな点”(Most Probable Failure Point)<sup>10)</sup>、または、デザインポイントと呼ばれ、設計に際してその構造システムの持つ最も危険な確率変数の組合せ状態を表している。ちなみに、この例に対するモンテカルロ法(200万回)による破壊確率は、 $1.095 \times 10^{-4}$ と

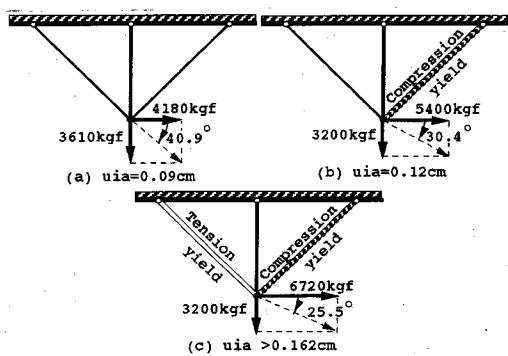


図-11 デザインポイントにおける弾塑性状態と荷重状態

なり、対応する信頼性指標 $\beta=\Phi^{-1}(P_f)=3.696$ となつた。これより、本法がほぼ妥当な信頼性指標を得ることがわかる。

## (2) 許容変位の変化が信頼性指標と弾塑性モードに与える影響

図-10は、信頼性指標( $\beta$ )～許容変位( $u_{ia}$ )関係を示したものである。図は、構造物の荷重～変位関係と良く似た3段階の線形関係を形成しており、このトラス構造の持つ弾塑性特性(荷重～変位関係)が合理的に信頼性指標( $\beta$ )～許容変位( $u_{ia}$ )関係に変換されていることがわかる。ちなみに、図-8で考察した $u_{ia}=0.17\text{cm}$ において、構造崩壊による変位限界状態を考慮することにより $\beta=3.66$ が得られるが、考慮しない場合は $\beta=6.83$ となり、図-10において連続性が失われ全く異なること

表-4 入力値

構造特性			
部材番号	ヤング係数 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	断面降伏力 (引張・圧縮) (tonf)
1, 5, 6, 9, 11		40.14	96.34
2-4, 7, 8, 10		39.01	93.63
12, 16, 18, 26-28	$2.1 \times 10^6$	23.71	56.90
13-15, 17		47.42	113.81
19-25		17.11	41.06
荷重特性			
荷重種類	変動係数		
中詰材圧荷重	0.20		
背面貯砂圧荷重	0.30		
土石流荷重	0.40		
洪水時水圧荷重	0.00		

がわかる。よって、構造崩壊による変位限界状態を弾塑性変位限界状態のひとつとして考慮することの必要性が確認される。ところで、図には荷重が完全相関の場合(点線)も比較して示しているが、弹性応答領域では相対的に小さな安全性指標を与えるが、P<sub>2</sub>点の弾塑性領域で非相関の場合と同一の信頼性指標を与えていている。

すなわち、相関性を有する荷重に対して完全相関の仮定を用いる方が信頼性指標に関して安全側の推定値を与える。しかし、デザインポイントが完全相関と非相関とでは、全く異なる荷重状態となることにも注意を要する。次に、図-11に弾性、弾塑性、塑性応答モードにおけるデザインポイントの荷重状態を示す。これより、許容変位u<sub>ia</sub>=0.09cmの場合の垂直荷重3610kgfは、許容変位u<sub>ia</sub>=0.12cm, u<sub>ia</sub>≥0.162cmの場合の垂直荷重よりも大きい。つまり、許容変位を大きくしても、限界状態での荷重要素が必ずしも大きくなるものではないことがわかる。

## 5. 土石流荷重を受ける鋼製枠砂防ダムの安全性照査

図-12および表-4に示す不確定な土石流荷重が作用する鋼製枠砂防ダムの信頼性解析を行い、本解析法の実構造への応用とその問題点について検討する。一般に、土石流荷重は、そのフロント部に集まる巨礫による衝撃的荷重と、後続流による流体圧荷重に分類されている。前者の巨礫による衝撃的荷重は、主として透過型鋼製砂防ダムが対処し、後者の流体圧荷重は、不透過型の鋼製枠砂防ダムが対処

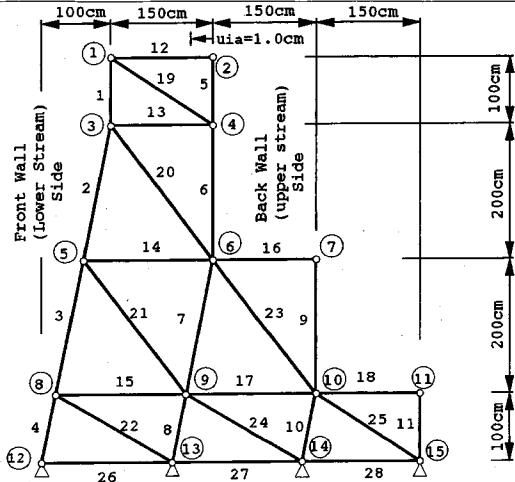


図-12 鋼製枠砂防ダムの骨組構造

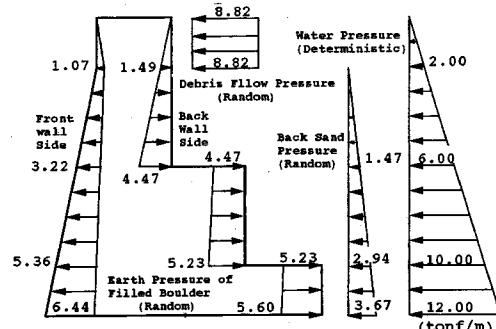


図-13 鋼製骨組に作用する平均荷重

することになっている。ここでは、この流体圧荷重を不確定荷重として取り扱う。

設計に用いる限界状態としては、堤体の頂点水平変位(節点②)の許容変位量を1.0cmとした。これは、現行の設計法で、スリット型砂防ダムに適用されている衝撃荷重下の変位限界の考え方を参考にしたものである。堤体枠組に作用する荷重としては、中詰材圧荷重、背面貯砂圧荷重、洪水時静水圧荷重および土石流流体圧荷重である。ここで中詰材圧荷重は、礫中詰材が鋼製枠の側壁面を内側から押す圧力による荷重であり、堤体のせん断変形の影響を考慮したものを使用した<sup>16)</sup>。背面貯砂圧および洪水時静水圧については、現行の設計法に使用されるものを平均値とした。土石流荷重については、スリット型砂防ダムに適用されているものを応用して、次式を用いて算出した<sup>4)</sup>。

$$q_p = \rho h v^2 / g \quad (41)$$

ここに、q<sub>p</sub>:単位幅あたりの流体圧、ρ:流体の

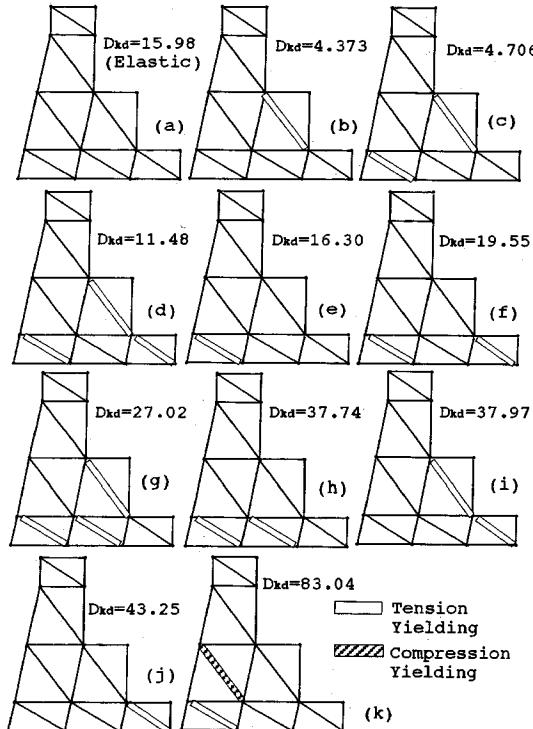


図-14 弾塑性変位限界を与える弾塑性モード

単位体積重量,  $h$ : 流体の深さ,  $v$ : 流体速度 (平均流体速度を  $6.0 \text{m/s}$ ),  $g$ : 重力加速度。

なお、静水圧については、確定荷重として仮定し、他の荷重については、中詰材圧が  $0.20$ 、背面貯砂圧が  $0.30$  および土石流荷重が  $0.40$  の変動係数を有する不確定荷重とした。以上の仮定に基づいて算出した平均荷重を図-13に示す。

図-14は、計算過程において算出された弾塑性変位限界を与えた弾塑性モードとその最短距離  $D_{kd}$  を示したもので。また図-15には、同様に構造崩壊による変位限界を与えた弾塑性モードと最短距離  $D_{kc}$  を示す。本構造は3次の不静定構造であるため、弾塑性モード創出法による基本モードは1951であり、その中でこの合計25個の弾塑性モードについてのみ限界状態が存在した。図-14の頂点の弾塑性変位が  $1.0 \text{cm}$  となる限界状態は、図-15で示した構造崩壊による変位限界よりも一般的に小さな原点間距離を与えていている。実際には、 $D_{kd}=10.0$  を越える領域での破壊確率は、 $D_{kd}=5.0$  に対する領域での破壊確率に対して充分に小さいことを考慮すると、図-14 (b), (c) 以外の限界状態は、ほとんどどの構造の破壊確率には寄与しないものと思われる。一方、これらの全体的な観察により、最短距離と破

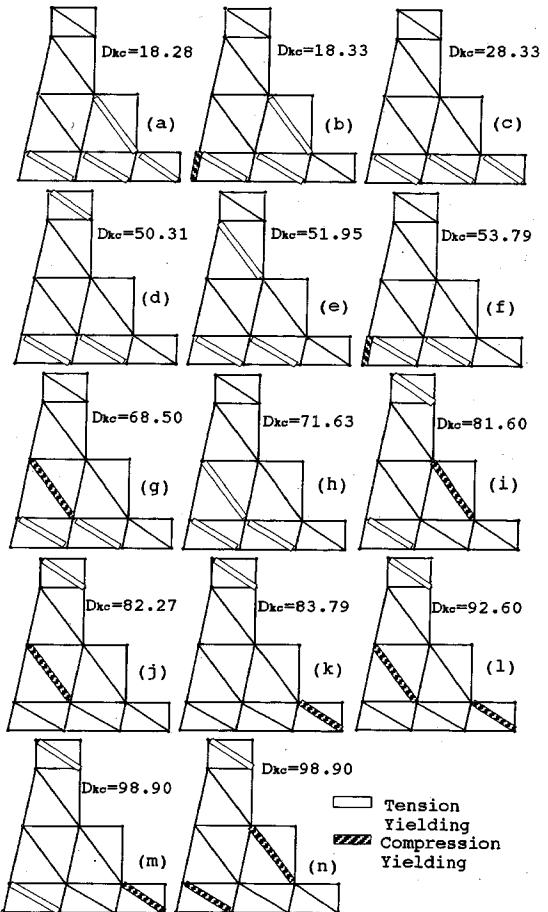


図-15 構造崩壊による変位限界を与える弾塑性モード

壊モードの降伏部材数とは無関係であることもわかる。例えば、弾性モード (図-14 (a)) の  $D=15.98$  は、一部材降伏モードの図-14 (b) の  $D=4.373$  よりもかなり大きなものとなっている。最終的に、式(40)の定義により、上流側壁面の中段の斜材が引張り降伏した弾塑性モード (図-14 (b)) がデザインポイントを持ち、信頼性指標  $\beta=4.373$  が求められる。

よって、許容信頼性指標  $\beta_a$  を例えれば  $\beta_a=3.0$  とすれば、 $\beta > \beta_a$  となり、この鋼製砂防ダムの安全性が照査されることになる。

図-16に、このデザインポイント (図-14 (b)) における荷重状態を示す。まず堤体に作用する外荷重をみると、背面貯砂圧荷重は、図-13の平均荷重と同じ三角形分布をほぼ保ちながら少し増加している。一方、土石流荷重は、頂部の方が大きな不均一な分布に変化して全体的に顕著に増大している。こ

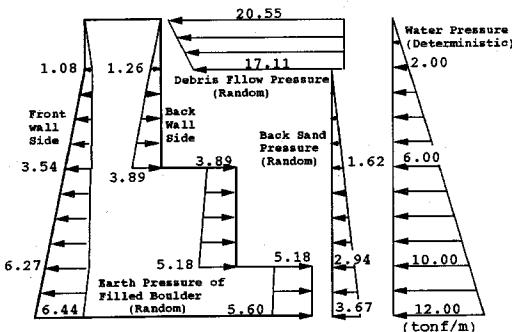


図-16 デザインポイントでの作用荷重

の土石流荷重を逆算すると、概ね  $v = 9.0 \text{ m/s}$  の速度に対応しており、一部の観測では最大  $20.0 \text{ m/s}$  を越えるとされる土石流の速度に対してさほど大きくない速度で図-14(b)の限界状態が生起していることがわかる。次に堤体内部の中詰材圧による荷重をみると、上流側の壁面に作用する中詰材圧は平均荷重よりも若干減少し、下流側に作用する中詰材圧は全体的に増加するが、その分布形状が三角形分布ではない。一般に、砂や礫材の圧力分布および流体衝突時の圧力分布に対して確定的理論にその分布形状は依存する<sup>4)</sup>が、実測値は必ずしも理論的な分布形状どおりではない。しかし、個々の荷重を非相関として仮定した信頼性解析では、この点を暗黙のうちに考慮して解析を行い、設計者に発生し得る危険な荷重分布状態を提示することがわかる。すなわち、鋼製枠砂防ダムのように不確定要因を多く含む荷重が作用する構造に対して、比較的合理的な安全性照査と設計のための情報を提供できるものと思われる。

## 6. 結 言

本研究は、トラス構造の弾塑性信頼性解析法を提示するとともに、鋼製枠砂防ダムへの応用を示したもので、本研究の成果をまとめると以下のようになる。

- (1) 従来のホロノミック弾塑性解析の基本式を、信頼性解析に適用可能なように陽な形で再定式化できた。
- (2) 再定式化されたホロノミック解析の基本式を、数理計画問題の制約条件として用いることにより、弾塑性変位に関する信頼性解析を行うことができた。
- (3) さらに、構造崩壊による変位限界状態に対応する信頼性解析手法も開発できた。

(4) 不確定荷重を受ける3部材トラスを対象として、解析計算の妥当性と効率性について検討することができた。

(5) 信頼性指標～許容変位関係は、構造物の荷重～変位関係と良く似た線形関係が得られることがわかった。また許容変位を大きくしても、限界状態での荷重要素は必ずしも大きくならないことも認められた。

(6) 土石流荷重を受ける鋼製枠砂防ダムの信頼性解析へ応用することができた。その結果、弾塑性変位限界に関する信頼性指標を求めるができるのみでなく、砂礫による外圧・中詰材圧の分布形状、土石流荷重の分布形状に関する情報も提供しうることがわかった。

(7) 本法は、荷重が正規分布に従う場合に限定し、複数の限界状態の相關性の影響を無視している点などの問題点がある。今後、これらの影響を考慮したシステム信頼性解析への拡張等についても研究する予定である。

**謝辞：**本研究に対して、コロラド州立大学土木工学科教授Dan M. Frangopol教授のご助言を得たこと、また、前田記念工学振興財團の研究助成を得たことを記し謝意を表する。

## 参考文献

- 1) 国土庁：防災白書、大蔵省印刷、1992.
- 2) 佐野常秋、鈴木宏：鋼製治山砂防施設の歴史と現状、新砂防、Vol. 41, No. 1, pp. 84-91, 1988年6月。
- 3) 北海道土木部砂防災害課監修：有珠山土石流と闘う～砂防対策事業の記録～、北海道工業新聞社、1979年9月。
- 4) 砂防・地すべり技術センター鋼製砂防構造物委員会：鋼製砂防構造物設計便覧、平成5年版。
- 5) F. Moses and Y. W. Liu : Methods of Redundancy Analysis for Offshore Platforms, Proc., 11th Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engrg., ASME, NEW YORK, 1992.
- 6) National Cooperative Highway Research Program : Development of Comprehensive Bridge Specifications and Commentary, Project 12-33, 1991.
- 7) J. G. Teigen, D. M. Frangopol, S. Sture and C. Felippa : Probabilistic FEM for Nonlinear Concrete Structures. I: Theory, J. Structural Engineering, ASCE, 117 (9), pp. 2674-2689, 1991.
- 8) S. Katsuki, Dan M. Frangopol, N. Ishikawa : Holonomic Elastoplastic Reliability Analysis of Truss Systems I : Theory, II : Applications ; J. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 119, No. 6, pp. 1778-1791, pp. 1792-1806, June, 1993.
- 9) O. De Donato : Fundamentals of Elastic-plastic Analysis, Chapter 13 in Engineering Plasticity by Mathem-

- atical Programming, M. Z. Chon and G. Maier, eds., Pergamon Press, NEW YORK, pp. 325-349, 1977.
- 10) Grierson, D. E. : *Deformation Analysis at Plastic Collapse*, Chapter 14 in Engineering Plasticity by Mathematical Programming, M. Z. Chon and G. Maier, eds., Pergamon Press, New York, pp. 351-366, 1977.
- 11) 石川信隆, 香月智, 三原徹治, 古川浩平: 降伏部材選択方式によるトラス構造物の最適弾塑性設計法に関する一考察, 土木学会論文集, Vol. 350/I-2, pp. 321-329, 1984年10月.
- 12) A. H-S. Ang and W. H. Tang (伊藤学他共訳) : 土木・建築のための確率統計の応用, 丸善, 1988年.
- 13) 星谷勝, 石井清: 構造物の信頼性解析法, 鹿島出版会, 1986年5月.
- 14) 石川信隆, 大野友則: 入門塑性解析と設計法, 森北出版, 1988年.
- 15) U. Kirsch : *Optimum Structural Design*, McGrawHill, 1981.
- 16) 香月智, 石川信隆, 大平至徳, 鈴木宏: 鋼製枠砂防構造物の中詰材のせん断抵抗力および中詰材圧の推定法に関する一考察, 土木学会論文集, Vol. 428/I-15, pp. 97-106, 1991年4月.

(1995. 1. 10 受付)

## SAFETY CHECK METHOD OF STEEL FRAME CHECK DAM BY ELASTIC-PLASTIC RELIABILITY ANALYSIS

Satoshi KATSUKI, Kazuo ITOH, Nobutaka ISHIKAWA and Souhei ABE

This paper presents a safety check method of steel frame check dam by using an elastic-plastic reliability analysis method. The proposed method makes use of the holonomic elastic-plastic analysis to combine with the first order reliability analysis method. In order to combine the holonomic elastic plastic analysis with reliability analysis into one formulation, the conventional holonomic elastic plastic analysis formulation is modified in conjunction with the elastic-plastic mode generation method. Then, the first order reliability method based on elastic-plastic displacement limit state is formulated as a mathematical programming problem. Furthermore, it is pointed out that some collapse modes are defined as an excessive displacement limit, and the safety check method for this limit state is also proposed by using the modified reliability analysis method. Finally, The numerical examples of the three bar truss and the steel frame check dam subject to uncertain loads show the validity and the applicability of the proposed method.