

GPSによる測量網に対する フリーネット解の計算手法

桜井春輔¹・ニヤルバ アナンガ²・川嶋幾夫³・荒谷裕介⁴

¹正会員 Ph.D. 工博 神戸大学教授 工学部建設学科 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

²Ph.D. 南オーストラリア大学工学部助教授 (Toowoomba, Queensland 4350 Australia)

³正会員 博(工) 陸上自衛隊施設学校研究部第3研究室 (〒312 茨城県ひたちなか市勝倉3433)

⁴学生会員 神戸大学大学院自然科学研究科 博士前期課程 大学院生 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

本論文においては、GPSによる測量網を対象にしたフリーネット解の新しい計算手法を提案する。この計算法は、定式化した観測方程式を直接最小二乗法で解くことができるノルム最小型のフリーネット解の計算手法であり、GPS測量や水準測量のようにすべての測量値が未知パラメータの差として表される測量網の調整計算に適している。この方法によって求めた座標値は、ムーア・ベンローズ型一般化逆行列の近似解を求めたものと比べて、3～5測点からなる測量網において(30～40)× δ (%)程度精度が向上する($\delta=0.001$ としてすべての基線を1回ずつ測量した場合)。

Key Words : Global Positioning System, free net adjustment, minimum norm form

1. はじめに

最近、GPSの整備が進み、上空を周回する人工衛星の数が増え、ほとんど24時間いつでも、仰角 15° 以上に4個以上の人工衛星が飛来するようになり、ほぼ常時の観測が可能になった^{1), 2)}。また、受信機の高性能化、軽量化および価格の低廉化が進んだために、効率的な測量が可能になった。そのため、わが国では、GPSの干渉測位法は、測地の分野において長基線の変位の測定手段として用いられている³⁾にすぎなかったのが、土木の分野にも広く導入され、基準点測量^{4) - 7)}、地滑り移動や地盤変位の測定^{8), 9)}、出来高測量^{10) - 12)}などにも適用されてきた。さらに、最近では、航空機などに搭載して飛行記録をとるためにも用いられている¹³⁾。

このようにGPSの干渉測位の適用範囲が広がる一方、測量の精度の向上のために、測点相互間の基線に対しての測量を行いその成果に対し、従来測量で行ってきたように調整計算も行うようになってきた。GPSで測点相互間の複数の基線について測量を行う場合には、2台の受信機を用いて順次に測定する方法と、多数の受信機を同時に用いて一度に測定する方法がある。このとき、後者の方法では、観測データを用いて解析によって測点間の基線を求め

る際に調整計算も併せて行い、調整された相対座標を求めることができる(受信機に付属の基線解析ソフトに含まれている)。この方法は、測地の分野における長基線のGPS測量網に対する測定に適している。一方、比較的測点間の短い土木の分野の測量では、測点密度が高いため、作業の効率性を考えると、少人数で行うのに適している2台の受信機によって順次測定する方法が適当となるケースも多いものと思われる。このような場合は、従来の測量の調整計算と同様にそれぞれの測点間の基線について測量を行い、その成果を用いて調整計算を行うことになる。

測点相互の位置関係を明らかにするには何らかの座標系を導入してその座標系における測点の位置を定めなければならない。このとき、通常最小二乗法によって座標値を求めると、観測誤差に起因する測点座標の誤差は基準とする座標系によって異なる。このため、測点座標の誤差が適当に配分され、かつ一定となるように(通常最小二乗法において用いる)観測値の誤差の二乗和に、測点座標補正值のノルム(二乗和の平方根)を最小にするという条件を加えて解を求めることが行われてきている¹⁴⁾。

測量網の調整計算では、測点のいずれれもが同程度の誤差を含んでいることから、すべての測点に誤差

が適当に配分されるよう、従来からフリーネットワーク法が用いられてきた¹⁴⁾。しかし、これまでのフリーネットの調整計算では、ムーア・ベンローズ型の一般化逆行列を解くように定式化していたため、厳密にその式を解くことは困難であることから近似解を用いてきた。

そこで、本論文においては、GPS測量や水準測量のように測定量が相対値として求められる測量により構成される測量網の調整計算を対象にした新しい計算手法を提案する。観測方程式が簡単なこのような測量では、ある1点についての値(GPS測量では座標値、水準測量では標高)を固定すれば、その他の点の座標値や標高は通常最小二乗法で求めることができる。そこで、座標値(あるいは標高)のノルムを最小にするという条件を用いて、ある1点の座標値(あるいは標高)を他の点の座標値(あるいは標高)の関係として表し、これをもとの観測方程式に代入することにより未知パラメータを1つ消去する。このとき、修正した観測方程式について解けば、ノルム最小型のフリーネット解を求めることができる。

2. GPS測量の観測方程式と従来のフリーネット解の計算手法

GPSによる測点網における観測方程式は次のようになる。

$$dx_{ij} = x_j - x_i - v \quad (1)$$

$$dy_{ij} = y_j - y_i - v \quad (2)$$

$$dz_{ij} = z_j - z_i - v \quad (3)$$

ここで、 $dx_{ij}, dy_{ij}, dz_{ij}$ はそれぞれ測点 i 及び測点 j の間の基線の相対座標の x, y, z 方向の成分である。また、 v はこのときの残差を表している。式(1)~(3)をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{v} \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{L} は観測値ベクトル、 \mathbf{A} は係数マトリックス、 \mathbf{X} は未知パラメータベクトル、 \mathbf{v} は残差ベクトルである。このとき、4つの測点からなる測量網においてすべての基線について測量が行われた場合、式(4)を成分表示すると次のようになる。

$$\begin{cases} dx_{12} \\ dx_{13} \\ dx_{14} \\ dx_{23} \\ dx_{24} \\ dx_{34} \end{cases} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{cases} - \begin{cases} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \\ v_{x4} \\ v_{x5} \\ v_{x6} \end{cases} \quad (5-a)$$

$$\begin{cases} dy_{12} \\ dy_{13} \\ dy_{14} \\ dy_{23} \\ dy_{24} \\ dy_{34} \end{cases} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{cases} - \begin{cases} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \\ v_{y4} \\ v_{y5} \\ v_{y6} \end{cases} \quad (5-b)$$

$$\begin{cases} dz_{12} \\ dz_{13} \\ dz_{14} \\ dz_{23} \\ dz_{24} \\ dz_{34} \end{cases} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{cases} - \begin{cases} v_{z1} \\ v_{z2} \\ v_{z3} \\ v_{z4} \\ v_{z5} \\ v_{z6} \end{cases} \quad (5-c)$$

このとき、式(5-a~c)に示すように、観測方程式は、 x, y, z のそれぞれの成分について独立である。

また、これらの式から分かるように、 $|\mathbf{A}^T \mathbf{A}| = 0$ となる。もし、ここで、測点1~4のうちのいずれか1点の座標を既知として固定すれば、そのとき観測方程式($\mathbf{L} = \mathbf{A}^* \mathbf{X}^*$)については、 $|\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A}^*| \neq 0$ となるので通常最小二乗法で解くことができる。しかしながら、多くの場合、測量網の特定の点を固定することは適当ではなく、与点と未知点の全体の測量網の強度を決定する必要があるため、式(5-a~c)をそのまま解くことが必要になる。このとき、その解は、数学的に正則であるかどうかにとらわれない一般化逆行列を用いて求めることになる¹⁵⁾。従来、このようなフリーネット解を求めるには、ノルム最小の条件を満足する次に示すようなムーア・ベンローズ型の一般化逆行列を解いてきた¹⁵⁾。

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (6)$$

(ただし、 $\mathbf{A}^T \mathbf{D} = 0$ かつ $|\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{D}| \neq 0$)

この \mathbf{D} マトリックスは、 \mathbf{A} マトリックスに直交するマトリックスであり、これを求めるには、 $\mathbf{A}^T \mathbf{X}^* = 0$ (\mathbf{X}^* はベクトル)のうち、独立な3つの連立方程式を満足するような6つの値を例えば、

$\mathbf{X}^T = (-2, 1, 1, -1, -1, 0)$ のように定め、これをもとにして $|\mathbf{D}^T \mathbf{D}| \neq 0$ となるように、例えば $\mathbf{D}^T = [\{-2, 0, 0, -1, -1, 0\}, \{0, 1, 1, 0, 0, 0\}]^T$ と求める。そのため、観測網の構成が簡単な場合を除き、 \mathbf{D} マトリクスを求めることは困難であり、観測網の構成が簡単な場合においてもその計算は煩雑である。そのため、式(6)を厳密に解くことはせず、次式のような近似式を用いて解くことが行われてきた¹⁵⁾。

$$\mathbf{X} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{I} : 単位行列
 \mathbf{P} : 重み行列

3. 新しい計算手法の提案

上で述べた従来のフリーネット解の欠点を回避するために、ここでは、近似によらず(6)式とは異なる形の式を導き、その式をそのまま解くことによりフリーネット解を求め得る新しい計算方法を提案する。

この方法では、未知パラメータのノルムを最小にするという条件を用いて未知パラメータ間に関係を設け、この関係によって、未知パラメータのうちのいくつかを消去し、未知パラメータベクトルのランクを下げ、唯一解が求まるように定式化する。このとき、どの未知パラメータを消去するかは、観測網の構成に基づいて決定しなければならないが、GPS測量や水準測量で構成した測量網では、観測量はすべて座標値あるいは標高の差であるので、どのようなケースであっても、測点のうち1点に係わる座標値あるいは標高を消去するように定式化すれば事足りる。したがって、この計算手法は、GPS測量あるいは水準測量により構成される測量網の調整計算に適している。

いま、未知パラメータ \mathbf{X} のうち、消去しないものを \mathbf{X}_1 、消去するものを \mathbf{X}_2 として分けると、式(4)は次のように書くことができる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 - \mathbf{v} \quad (8)$$

ここで、誤差最小 ($\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min$ 、ここで、 \mathbf{P} はそれぞれの観測の重みを表すマトリクス) の条件を満足するように正規方程式を立てれば (式(8)を用いて、 $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ を表し、それをそれぞれ $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ で微分すれば) 次のようになる。

$$(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_2 - (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{L}) = 0 \quad (9)$$

$$(\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2) \mathbf{X}_2 - (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{L}) = 0 \quad (10)$$

このとき、ノルム最小 ($\mathbf{X}^T \mathbf{X} \rightarrow \min$) の条件を満足するように変換マトリクス $\bar{\mathbf{G}}_1$ を定めれば、 \mathbf{X}_2 の推定値 $\hat{\mathbf{X}}_2$ を、 \mathbf{X}_1 の推定値 $\hat{\mathbf{X}}_1$ の関数として表すことができる。

$$\hat{\mathbf{X}}_2 = \bar{\mathbf{G}}_1^T \hat{\mathbf{X}}_1 \quad (11)$$

$$\text{ただし、} \bar{\mathbf{G}}_1^T = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)$$

ここで、 x_4, y_4, z_4 を \mathbf{X}_2 とした場合には、 $\bar{\mathbf{G}}_1^T = (-7/6, -1, -1)$ となる ($\mathbf{P} = \mathbf{I}$ の場合)。したがって、式(4)は次式のように書き換えることができる。

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}_1 - \mathbf{v} \quad (12)$$

$$\text{ただし、} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{G}}_1^T$$

このとき、 \mathbf{X}_1 の推定値 $\hat{\mathbf{X}}_1$ は唯一解として次式で求められる。

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{L}) \quad (13)$$

なお、 $\hat{\mathbf{X}}_1$ が求められれば、(11)式により $\hat{\mathbf{X}}_2$ は一意的に定められる。 $\hat{\mathbf{X}}_1$ と $\hat{\mathbf{X}}_2$ についてまとめて書けば式(14)のようになる。

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_1 \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{G}}_1^T \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}})^{-1} (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{L}) \quad (14)$$

4. 調整計算によって求められる座標値の精度

観測値が正規分布するとすれば、それと線形の関係にある座標値の、最小二乗法により求めた最確値の精度は、 $\hat{\mathbf{X}}_i$ の分散を σ_{xi}^2 とすれば次式で求められる¹⁵⁾。

$$\sigma_{xi}^2 = \sigma_0^2 \mathbf{N}_{ii}^{-1} \quad (15)$$

$$(\text{この場合は、} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}})$$

ここで、 σ_0^2 は、基線測量によって求めた相対座標の分散であり、 \mathbf{N}_{ii}^{-1} は正規行列 \mathbf{N} の逆行列の主対角線上の*i*番目の要素を示す。このとき、(1)側点のうち1点を固定点とした最小二乗解、(2)ムーア・ベンローズ型の一般化逆行列(近似解)を用いたフリーネット解、(3)ここで提案する計算手法によるフリーネット解について調整計算によって求められる座標値の精度について検討する。いま、GPSによる測量網において、すべての基線がそれぞれ独立に1回ずつ等しい精度で測量された場合について考えると、測点が3、4および5個からなる測量網の場合、調整計算によって求められる座標値の精度は、表-1に示すようになる。

表-1 調整計算によって求めた座標値の精度（標準偏差）

| 測量網の測点数 | | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 最小二乗解 | | | | |
| ムーア・ペンローズ型一般化逆行列（近似解）を用いたフリーネット解 | $\delta=1.0 \times 10^{-3}$ | $(1/3+1.1 \times 10^{-4})\sigma_0$ | $(1/4+9.4 \times 10^{-5})\sigma_0$ | $(1/5+8.0 \times 10^{-5})\sigma_0$ |
| | $\delta=1.0 \times 10^{-4}$ | $(1/3+1.1 \times 10^{-5})\sigma_0$ | $(1/4+9.4 \times 10^{-6})\sigma_0$ | $(1/5+8.0 \times 10^{-6})\sigma_0$ |
| | $\delta=1.0 \times 10^{-5}$ | $(1/3+1.1 \times 10^{-6})\sigma_0$ | $(1/4+9.4 \times 10^{-7})\sigma_0$ | $(1/5+8.0 \times 10^{-7})\sigma_0$ |
| | $\delta=1.0 \times 10^{-6}$ | $(1/3+1.1 \times 10^{-7})\sigma_0$ | $(1/4+9.4 \times 10^{-8})\sigma_0$ | $(1/5+8.0 \times 10^{-8})\sigma_0$ |
| | $\delta=1.0 \times 10^{-7}$ | $(1/3+1.1 \times 10^{-8})\sigma_0$ | $(1/4+9.4 \times 10^{-9})\sigma_0$ | $(1/5+8.0 \times 10^{-9})\sigma_0$ |
| 本論文で提案するフリーネット解 | | $\sigma_0 / 3$ | $\sigma_0 / 4$ | $\sigma_0 / 5$ |

ここで σ_0 は基線解析における相対座標の標準偏差

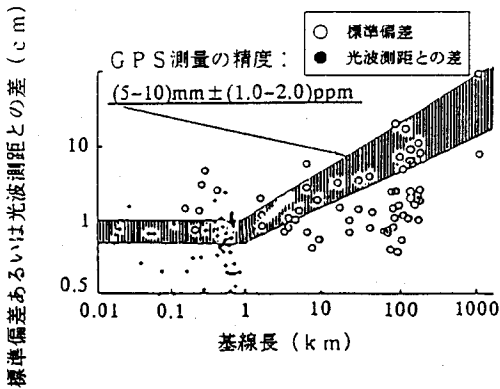


図-1 基線長測定の精度¹⁶⁾

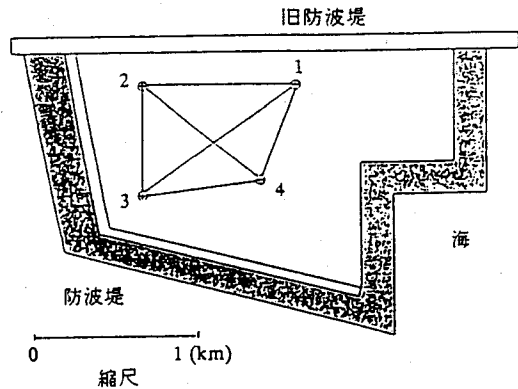


図-2 測点の配置

ところで、GPSの干渉測位の精度は、十分なデータが観測された場合には、基線長については、図-1に示すように、 $(5 \sim 10) \text{ mm} \pm (0.1 \sim 1.0 \times 10^{-6} \times \text{基線長 (km)})$ 程度¹⁶⁾、また、座標値の精度については、水平方向で $1.0 \text{ mm} \pm 2.0 \times 10^{-6} \times \text{基線長 (km)}$ 、鉛直方向で $2.0 \text{ mm} \pm 2.0 \times 10^{-6} \times \text{基線長 (km)}$ 程度で求められる¹⁷⁾。したがって、測点が4点の測量網において調整計算によって求められる座標値の精度は、表-1より $\sigma_0/4$ であるから、基線長が短い場合には、水平方向については、 2.5 mm 、鉛直方向については 5 mm 程度になることがわかる。

5. 現場への適用

本論文で提案する方法の現場への適用性を確かめるため、図-2に示す平坦な埋立て地内の地域において実測を行なった。

まず、図-2に示すようにそれぞれの測点間の距離が、 1000 m 程度になるように4つの測点を設けた。そして、これらの測点間のすべての基線を順次に測量した。表-2に、それぞれの測量の日時を示す。なお、測量は、Trimble社製の受信機4000SSTを用い、エポック間隔15秒で行った。また、基線解析は付属ソフト(Trimvec-Plus)を用いて行った。このとき求めた各基線のWGS-84座標系における3次元相対座標を表-3に示す。

次に表-3に示した各基線の相対座標値を用いて、次の3つの方法により調整計算を行った。

- 測点のうち1点を固定点とした最小二乗解（ここでは、測点1の座標値を $(0,0,0)$ とした）
- ムーア・ペンローズ型の一般化逆行列（近似解）を用いたフリーネット解（ここでは、 $\delta=0.001$ とした）
- 本論文で提案する計算手法によるフリーネット解

表-2 各基線を測定した時間帯
(測量は平成5年7月23日)

| 基線 | 測量した時間帯 |
|---------|-------------|
| 測点1-測点2 | 9:20~10:20 |
| 測点1-測点4 | 10:25~11:25 |
| 測点1-測点3 | 11:30~13:20 |
| 測点2-測点3 | 13:30~15:20 |
| 測点2-測点4 | 15:25~16:25 |
| 測点3-測点4 | 16:30~17:30 |

表-3 基線解析によって求めた各基線の相対座標

| 基線 | d x | d y | d z |
|---------|-----------|----------|----------|
| 測点1-測点2 | 429.341 | 929.292 | -511.393 |
| 測点1-測点3 | -113.361 | 791.684 | -926.550 |
| 測点1-測点4 | -613.517 | 63.652 | -697.976 |
| 測点2-測点3 | -542.701 | -137.598 | -415.165 |
| 測点2-測点4 | -1042.855 | -865.647 | -186.587 |
| 測点3-測点4 | -500.151 | -728.037 | 228.571 |

(単位: m)

このとき、それぞれの調整計算の手法により求めた測点の各座標値を表-4(a), (b), (c)に示す表から、ノルム最小型 ($X^T X \rightarrow \min$) のフリーネット解である(b)および(c)の方法では、未知パラメータ (X) のノルム最小の条件を考慮していない(a)の方法に比べてノルム ($X^T X$) の値が小さい解が得られていることが分かる。なお、このとき、(b)の方法で求められる座標値のノルム ($X^T X$) は、 δ の値の取り方には依存していない。

次に、表-4のように求められた測点の座標値から測点間の基線に対する相対座標を求めると、表-5のようになる。このとき、表-5から、各基線の相対座標については、観測値と計算値との残差の二乗和 ($v^T P v$) が、(a)と(c)の方法では小さくなっているのに対し、(b)の方法では大きい値になっている。これは、(b)の解法では、近似解を用いるためであり、この方法では δ の値を小さくすれば次第に ($v^T P v \rightarrow \min$) の条件が満たされ δ を 10^{-6} よりも小さくすれば、求められる相対座標の値が他の2つの方法による解とほぼ一致するようになる。しかしながら、行列計算の過程で δ での除算が行われ

表-4 調整計算により求めた測点の座標値

(a) 測点のうち1点を固定点とした最小二乗解

| 測点 | 座標値 (m) | | |
|---|----------|---------|----------|
| | X | Y | Z |
| 測点1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 測点2 | 429.340 | 929.292 | -511.390 |
| 測点3 | -113.362 | 791.688 | -926.548 |
| 測点4 | -613.515 | 63.649 | -697.973 |
| $X^T X = 3.68 \times 10^6 \text{ (m}^2\text{)}$ | | | |

(b) ムーア・ベンローズ型の一般化逆行列 (近似解) を用いたフリーネット解 ($\delta=0.001$)

| 測点 | 座標値 (m) | | |
|---|----------|----------|----------|
| | X | Y | Z |
| 測点1 | 74.366 | -446.046 | 533.844 |
| 測点2 | 503.598 | 483.014 | 22.582 |
| 測点3 | -38.968 | 345.444 | -392.472 |
| 測点4 | -538.996 | -382.412 | -163.954 |
| $X^T X = 1.72 \times 10^6 \text{ (m}^2\text{)}$ | | | |

(c) ここで提案する計算手法によるフリーネット解

| 測点 | 座標値 (m) | | |
|---|----------|----------|----------|
| | X | Y | Z |
| 測点1 | 74.384 | -446.157 | 533.978 |
| 測点2 | 503.724 | 483.135 | 22.588 |
| 測点3 | -38.978 | 345.531 | -392.570 |
| 測点4 | -539.131 | -382.508 | -163.995 |
| $X^T X = 1.72 \times 10^6 \text{ (m}^2\text{)}$ | | | |

ることから、 δ に小さい値を用いることは一方で計算結果の精度を低下するため、近似解の精度は δ の値の選択に左右される。

以上から、本論文で提案する定式化によるフリーネット解の計算手法は、誤差最小 ($v^T P v \rightarrow \min$) と未知パラメータのノルム最小 ($X^T X \rightarrow \min$) の条件を満足する解が得られる方法であることが分かる。

また、この計算手法では、観測方程式が簡単な形となるGPS測量や水準測量により構成される測量網の調整計算に適している。

表-5 調整計算により求めた基線の相対座標

(a) 測点のうち1点を固定点とした最小二乗解

| 基線 | 相対座標 (m) | | |
|-------------|----------------------------|----------|----------|
| | d x | d y | d z |
| 測点1-測点2 | 429.340 | 929.292 | -511.390 |
| 測点1-測点3 | -113.362 | 791.688 | -926.548 |
| 測点1-測点4 | -613.515 | 63.649 | -697.973 |
| 測点2-測点3 | -542.702 | -137.604 | -415.158 |
| 測点2-測点4 | -1042.855 | -865.643 | -186.583 |
| 測点3-測点4 | -500.153 | -728.039 | 228.575 |
| 観測値との誤差の二乗和 | 0.000189 (m ²) | | |

(b) ムーア・ベンローズ型の一般化逆行列 (近似解) を用いたフリーネット解 ($\delta=0.001$)

| 基線 | 相対座標 (m) | | |
|-------------|----------------------------|----------|----------|
| | d x | d y | d z |
| 測点1-測点2 | 429.232 | 929.060 | -511.262 |
| 測点1-測点3 | -113.334 | 791.490 | -926.316 |
| 測点1-測点4 | -613.362 | 63.634 | -697.798 |
| 測点2-測点3 | -542.566 | -137.569 | -415.054 |
| 測点2-測点4 | -1042.594 | -865.426 | -186.536 |
| 測点3-測点4 | -500.028 | -727.856 | 228.518 |
| 観測値との誤差の二乗和 | 0.434241 (m ²) | | |

(c) ここで提案する計算手法によるフリーネット解

| 基線 | 相対座標 (m) | | |
|-------------|----------------------------|----------|----------|
| | d x | d y | d z |
| 測点1-測点2 | 429.340 | 929.292 | -511.390 |
| 測点1-測点3 | -113.362 | 791.688 | -926.548 |
| 測点1-測点4 | -613.515 | 63.649 | -697.973 |
| 測点2-測点3 | -542.702 | -137.604 | -415.158 |
| 測点2-測点4 | -1042.855 | -865.643 | -186.583 |
| 測点3-測点4 | -500.153 | -728.039 | 228.575 |
| 観測値との誤差の二乗和 | 0.000189 (m ²) | | |

6. まとめ

本論文においては、新しい定式化によるフリーネット解の計算手法を提案し、実際にGPSによる測量網の調整計算に適用した。そして、本法による解を、ムーア・ベンローズ型の一般化逆行列 (近似解) を用いたフリーネット解および、測点のうち1点を固定点とした場合の最小二乗解と比較した。その結果、次のことが分かった。

- (1) ここで提案した定式化によるフリーネット解の計算手法では、誤差最小 ($\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min$) および未知パラメータのノルム最小 ($\mathbf{X}^T \mathbf{X} \rightarrow \min$) の条件を満足した解を求めることができる。
- (2) ここで提案した定式化によるフリーネット解の計算手法は、観測方程式の係数が簡単な形となるGPS測量や水準測量により構成される測量網の調整計算に適している。

謝辞：実測に当たっては、神戸市開発局 竹山征治、吉井真の両氏に御便宜を図って頂いた。また、元本学大学院生 皿海章雄 (現清水建設)、古谷茂也 (現NKK) 両君に御協力頂いた。ここに感謝いたします。

参考文献

- 1) 日本測地学会：新訂版GPS、日本測量協会、1989。
- 2) 土屋淳、辻宏道：やさしいGPS測量、日本測量協会、1991。
- 3) 加藤照之：GPS高精度測位の研究の現状、GPS測量の現況講習会テキスト、日本測量協会、pp.65-74、1991。
- 4) 村石公典、片野悟：船舶位置決定のための電波局位置測量、GPS測量の現況講習会テキスト、日本測量、pp.23-31、1991。
- 5) 古堅和男、長谷川浩司：GPSと測量作業、GPS測量の現況講習会テキスト、日本測量協会、pp.33-42、1991。
- 6) 豊田耕三、小林敬幸：GPS測量の実施状況、GPS測量の現況講習会テキスト、日本測量協会、pp.43-52、1991。
- 7) 宮林秀次、岡本幸雄、遠藤秀雄：山梨リニア実験線におけるGPS測量、土木施工、pp.17-26、1992。

- 8) 丸山清輝：GPS測量による地すべり移動観測，土木技術資料，34-8，pp.10-11，1992.
- 9) 清水則一，桜井春輔，皿海章雄，古谷茂也：GPS（人工衛星システム）による長大斜面の変位モニタリング，第24回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp.440-444，1992.
- 10) 藤岡晃，菊田勝之，清水則一，桜井春輔：GPS測量を用いた土工事の出来高測量システムの開発，土木学会論文集，No.468/VI-19，pp.31-38，1993.
- 11) 佐田達典，中川良文，高田知典：GPSの出来高測量への適用，土木学会第46回年次学術講演会講演概要集（第VI部門），1991.
- 12) 神崎正，西沢修一：人工衛星GPSによる土工総合システム，土木学会誌，pp.12-14，1991.9.
- 13) 村田正秋，新宮博公，小野孝次，張替正敏：航空宇宙技術研究所におけるGPS航法飛行実験について，日本航空宇宙学会誌，第41巻，第468号，pp.1-12，1993.
- 14) 森忠治：測量網のFree Network解の対応点に重みをつけて当てはめる方法について，土木学会論文集，No.486，pp.93-100，1994.
- 15) 現代測量学出版委員会：現代測量学，第1巻，測量の数学的基礎，第7章，1981.
- 16) 桜井春輔，清水則一，皿海章雄，古谷茂也，川嶋幾夫：GPS測量による観測点座標および測点変位の精度について-短い基線に対する測量結果-，建設工学研究所報告書，第33号，pp.277-296，1991.
- 17) Trimble Navigation Ltd.: Trimvec-Plus GPS Survey Software User's Manual and Technical Reference Guide, Revision D1, Trimble Navigation Ltd.,1991.

(1994. 4. 14 受付)

A NEW ADJUSTMENT METHOD OF A FREE NET FOR THE GPS SURVEY

Shunsuke SAKURAI, Nyarba ANANGA, Ikuo KAWASHIMA and Yusuke ARATANI

In this paper, we propose a new adjustment method of a free net for the GPS survey. This method enables us to solve an observation equation directly and to get a free net solution of a minimum norm form. This method is suited for adjusting the network solution for such cases as the GPS or level survey, in which all measurement data are defined in the form of differences between unknown parameters.