

不同沈下のフラクタル的性質と それを応用した沈下推定

脇田英治¹・松尾 稔²

¹正会員 工博 主任研究員 清水建設(株)和泉研究室 (〒100 東京都千代田区内幸町2-2-2)

²正会員 工博 名古屋大学教授 工学部地圏環境工学専攻 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

フラクタルとは自然界の中で数多く発見されている統計的自己相似性である。本論文では不同沈下の分布がフラクタルではないかと考え、現場観測データを用いてそれを検証すると共に、不同沈下のフラクタルとして性質を明らかにしている。そして、その性質を応用して不同沈下推定法を構成している。次に、この方法を将来施工区間の未観測部分の沈下の推定に適用し、その適用性について検討を行っている。現場観測データを用いた適用性の検討の結果、その有効性が確認された。

Key Words : settlement, differential settlement, fractal, chaos, 1/f noise, variogram, spectrum, auto-correlation coefficient

1. はじめに

フラクタル (fractal) の概念は Mandelbrot¹⁾ によって 1975年に初めて生み出されたものである。それは拡大すると元の図形と同じ構造のものがミクロなスケールで含まれている(ただし、正確な相似ではなく、統計的自己相似) 性質である。自然界の中でいろいろなものがフラクタルの性質をもつことが明らかにされている。一例として海岸線、山の起伏、雲の形などである。

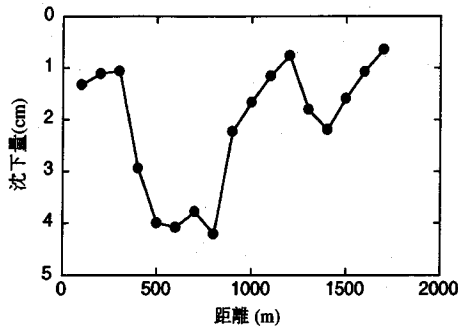
カオス (chaos) はフラクタル同様、自然界のランダム現象を説明するのにしばしば用いられる概念である。自然界の中でいろいろなもの(たとえば、気象、脳波など²⁾) がカオスの挙動を示すことが明らかにされている。カオスの現象の中にフラクタルが存在することが数多く発見されている(たとえば、カオスの非周期軌道が描く図形はフラクタル構造である)し、その逆もある。そのようなことから、カオスとフラクタルは別々のものではなく、現象の一つの側面がカオスであり、別の側面がフラクタルであると考えられる。

本論文では不同沈下もフラクタル。およびカオスの性質を持つのではないかと考え、それを検証し、その性質や特徴、メカニズムを明らかにする。さらに、明らかにした性質の一部を応用し、

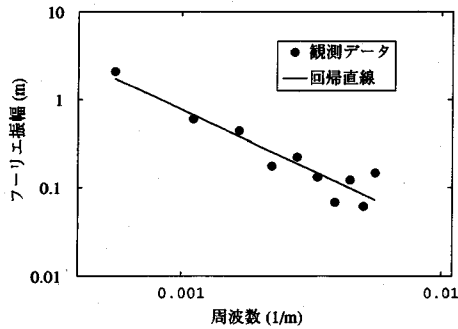
表—1 不同沈下の現場観測例

No	現場名	地形	地質	沈下測定	引用文献
A	羽田沖合展開	湾岸部	沖積粘性土	1.7年後	4)
B	O埠頭	湾岸部	沖積粘性土	5年後	5)
C	O埠頭	湾岸部	沖積粘性土	2年後	5)
D	武蔵野操車場	内陸部	沖積粘性土	5年後	6)
E	羽田沖合展開	湾岸部	沖積粘性土	3ヶ月後	4)
F	神戸ポートアイランド	湾岸部	洪積粘性土	2.8年後	5)

不同沈下推定法を併せて提案する。なお、時間や距離の変化に対して連続的に変化する量であってもその観測を一定間隔(時間あるいは距離に関して)で行なうと、離散的な状態量(以後、「離散データ列」と呼ぶ)が得られる。このような「離散データ列」のうち、本論文では沈下量を一定距離間隔で観測して得られる不同沈下のデータを取り扱う。表—1は本論文で取り扱う不同沈下の現場観測例の一覧である。これらの現場ではマクロ的にはほぼ同様(水平方向の地盤の性質の変化の傾向は非常に緩やか)と見なしうる地層が水平方向に連続しており、その力学的特性や沈下分布は定常・非定常に関する分類上、定常の側に分類される性質を有している。



図一 不同沈下の分布 (case E)



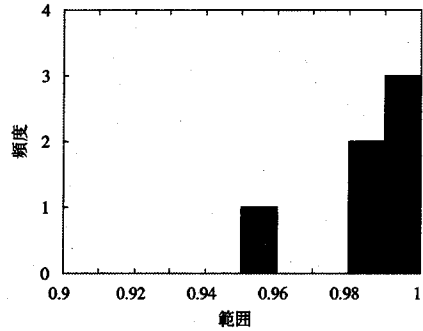
図二 不同沈下のフーリエ・スペクトル (case E)

2. $1/f^\beta$ ノイズ

まず、初めに不同沈下がフラクタルであると考えられる根拠の一つとして、 $1/f^\beta$ ノイズについて考察する。 $1/f^\beta$ ノイズとは離散データ列の周波数とパワー・スペクトル密度 (あるいは、変動の頻度と変動の大きさ) の間に直線的な関係が成立することである。ここで、 β (スペクトル数) とは周波数 f を x 軸に、スペクトル密度を y 軸にとり、それらの関係を両対数グラフ上に表わした時の回帰直線の勾配である。

自然界の中で、多くのものが、この型のスペクトル分布を示すことが明らかにされている。たとえば、川の流量変化にこの関係が成立し、ナイル川、セントローレンス川、コロラド川、ロワール川などについてそれぞれ固有でしかも一定な β の値が存在することが指摘されている¹⁾。また、宇宙線の粒子数変動、カタツムリのニューロンのパルス、交響曲の音色などがこの型のスペクトル分布を示すことが明らかにされている²⁾。

周波数とパワー・スペクトル密度の関係が直線関係であることは、スペクトル密度の変動が描く図形がマイクロな周波数領域とマクロな周波数領域で統計



図三 スペクトルの回帰直線に関する重相関係数の分布 (全ケース)

的に相似な関係にあることを意味する。これはフラクタルの定義に他ならない。つまり、 $1/f^\beta$ ノイズとはスペクトルのフラクタル構造と考えることができる。

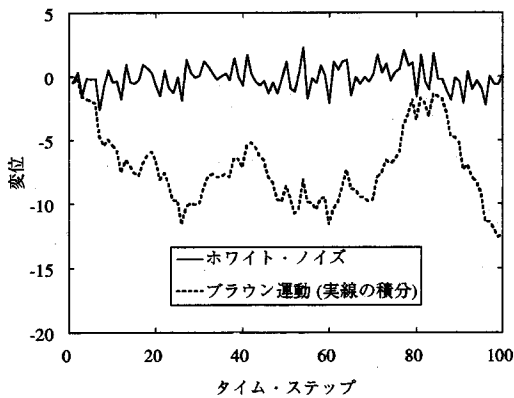
離散データ列のスペクトルに関してはパワー・スペクトルとフーリエ・スペクトルがあるが、スペクトルの直線性に関してはどちらも同じ意味を持つ (片方が直線であれば、もう一方も直線となるということ。ただし、 β の値は異なる)。したがって、本論文では以後の解析上、取り扱いの容易なフーリエ・スペクトルを取り扱う。ただし、スペクトルの分布より β を求める必要のある時はパワー・スペクトルから求める。図一は表一中の case E の不同沈下データであり、図二はそのフーリエ・スペクトル分布を示している。図によると不同沈下のスペクトルが $1/f^\beta$ ノイズ型 (周波数とフーリエ振幅の関係がほぼ直線) になっている。この場合、最小二乗法による回帰直線と観測値の間の重相関係数は 0.991 (重相関係数の定義は式 (6) 参照) であり、直線に対して高い相関性を示している。

同様に他の現場観測例について不同沈下のスペクトルの回帰直線を求め、その重相関係数の分布を調べると、図三 のようになる。この図においても、重相関係数は大きな値を示しており、スペクトル分布の直線性が強いことがわかる。

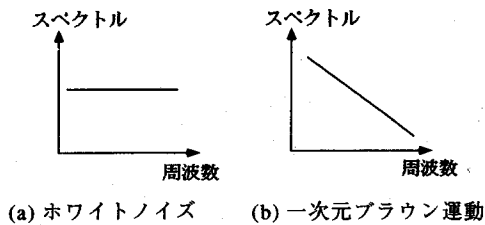
以上のように、一般的に不同沈下のデータはフラクタルの性質を示し、そのスペクトルは $1/f^\beta$ ノイズ型 (周波数とスペクトル密度の関係が直線) になると考えられる。

3. バリオグラム推定式

バリオグラム (variogram) は後述 (7.) するクリギング推定法や提案する沈下推定法において解



図—4 一次元ブラウン運動とホワイトノイズ



図—5 スペクトル分布の比較

析の前提（これを設定しなければ解析を実施できない）となる重要な式である。以下で2種類のバリオグラム推定式について適用性を比較検討する。

一次元空間に離散データ列 $x(t)$ があり、任意の時間 t における値 $x(t)$ と時間 $(t + \tau)$ における値 $x(t + \tau)$ の差 $(x(t + \tau) - x(t))$ の二乗平均（通常この値はバリオグラムと呼ばれている。以後バリオグラムと呼ぶ。） V_τ とラグ (lag) τ との間に次のような関係を設定する。

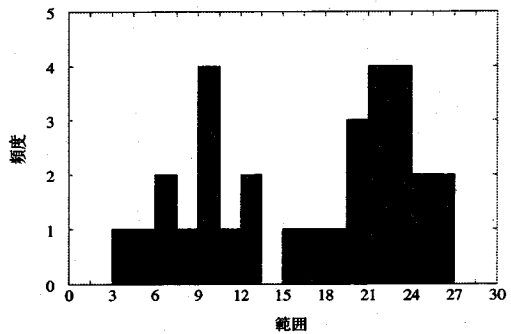
$$V_\tau = E\left[\{(x(t + \tau) - x(t))\}^2\right] \propto |\tau|^{2H} \quad (1)$$

ここに、 E は確率変数の期待値を表わす記号である。パラメータ H は $0 < H < 1$ の範囲にある。

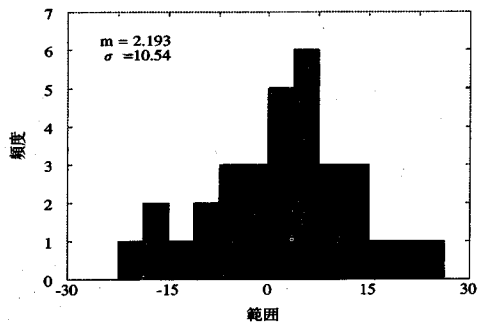
式(1)に従う離散データ列に関して、次のような性質が明らかにされている。

- a) $x(t)$ はガウス過程に従わず、その増分 $(x(t + \tau) - x(t))$ がガウス過程に従う。
- b) $x(t)$ の運動はフラクタルである。

図—4 は式(1)に従う時系列の例を示している。すなわち、図—4 において実線はガウス分布に従うホワイトノイズであり、これを時間積分すると、点線で示す曲線となる。この点線の運動は式(1)で $H = 1/2$ と置いたものに相当する。点線で示す運動（式(1)に従う運動）自体はガウス分布



図—6 沈下観測値のヒストグラム (case B)

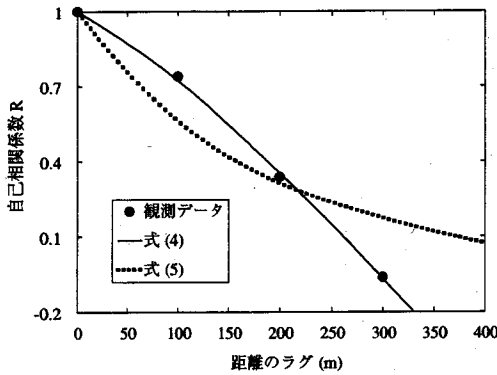


図—7 沈下増分のヒストグラム (case B, 100m ピッチ)

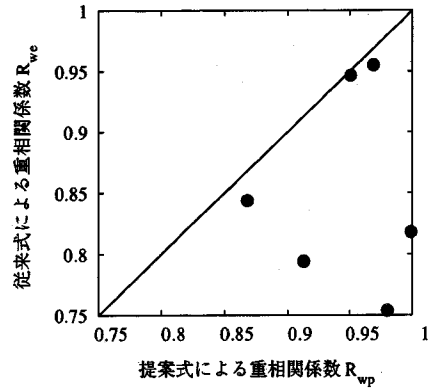
に従わず、その増分がガウス分布に従うという関係にある。図—4 の点線の運動はブラウン運動として広く知られている。ブラウン運動は英国の植物学者 R. Brown によって1928年に発見されたものであり、流体中を漂う固体の微粒子の不規則・不安定な挙動などがこれに相当する。

以上はブラウン運動の例であるが、不同沈下のデータがフラクタルであり、式(1)に従うとすると、前述したように、離散データ列 $x(t)$ はガウス過程には従わず、 $(t + \tau)$ における値との差 $(x(t + \tau) - x(t))$ がガウス過程に従うはずである。このことを観測データを用いて、次に検証する。

図—6 は表—1 の case B の沈下観測値のヒストグラムである。この分布はガウス分布ではない。一方、図—7 は 100 m 離れた値間の増分のヒストグラムである。この場合の分布はガウス分布となっている。このことは、不同沈下データのフラクタル性とそれに対する式(1)の適合性を支持する根拠の一つとなるものである。なお、他の観測データについても同様の結果が得られたが、データ数の多い case B の例をここでは示した。



図—8 自己相関係数推定式の適合性の検討 (case E)



図—9 自己相関係数推定式の適合性の検討 (全ケース)

ホワイトノイズのスペクトル密度分布は図—5 (a) に示すように一定分布を示す。それに対して、ブラウンノイズのスペクトル密度分布は図—5 (b) に示すように、 $1/f$ 分布である。また、一般的にバリオグラムが式 (1) に従う場合にはスペクトルは $1/f^p$ 分布となる⁸⁾。そこで、式 (1) の左辺を展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式 (1) の左辺} &= E\left[\{(x(t+\tau)-x(t))\}^2\right] \\ &= E\left[x^2(t+\tau)-2x(t+\tau)\cdot x(t)+x^2(t)\right] \\ &= 2\cdot E\left[x^2(t)\right]-2\cdot E\left[2x(t+\tau)\cdot x(t)\right] \\ &= 2\cdot C(0)-2\cdot C(\tau)=2\cdot C(0)\{1-R(\tau)\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 τ はラグ、 $C(\tau)$ は自己相関関数、 $R(\tau)$ は自己相関係数 ($0 \leq R \leq 1$) である。また、時間に対して一定なパラメータ α, γ を設定すると、式 (1) の右辺は

$$\text{式 (1) の右辺} = \alpha \cdot \tau^\gamma \quad (3)$$

となる。そこで、式 (2) と 式 (3) が等しいと置くと、次式が誘導される。

$$R(\tau) = 1 - \frac{\alpha \cdot \tau^\gamma}{2 \cdot C(0)} = 1 - \alpha' \cdot \tau^\gamma \quad (4)$$

フラクタルを示す離散データ列に対して、式 (4) を用いて、観測データの自己相関係数に関する回帰分析を行ない、パラメータを同定することができる。次に、それを式 (2) に代入することにより、バリオグラムを推定することができる。あるいは、バリオグラムだけを直に推定する場合には、観測データに対して後述する式 (7) を直にフィッティングし、そのパラメータを同定することが可能である。

以上のように式 (4) を提案したが、地盤の力学的な諸係数に関する自己相関係数の推定式としては、従来、次式がよく用いられている。

$$R(\tau) = \exp(-a \cdot \tau) \quad (5)$$

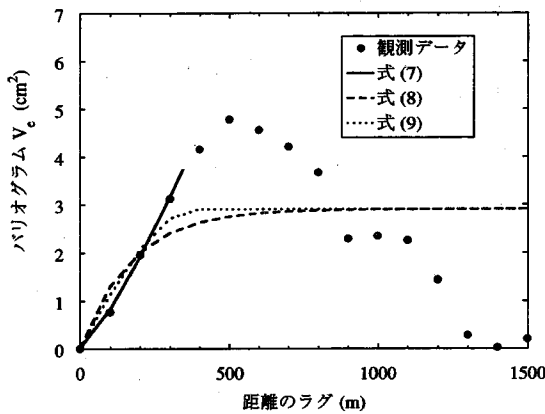
そこで、表—1 に示す不同沈下の観測データを用いて提案する式 (4) と従来からある式 (5) を比較検討し、それらの適用性を明らかにする。図—8 は表—1 の case E の観測データに対する両式の回帰分析の結果である。一般的に沈下に関する自己相関係数はこの図のように 2 点間の距離の差 (以後、距離のラグと呼ぶ) がある一定値以上となると、急激に減衰する傾向がある。したがって、式 (5) のように無限遠まで徐々に減衰する型の式よりもそのような状態に対応する式 (4) のような型のほうが適合度が高いと思われる。

次に、このことをもう少し多くのデータを用いて検証する。図—9 は回帰式による $R(\tau)$ の値と観測データの $R(\tau)$ の値との重相関係数 R_w を表示している。縦軸に式 (5) による R_{we} 、横軸に式 (4) による R_{wp} を表示している。図によると、式 (4) の方が式 (5) よりも重相関係数の値が大きく、不同沈下のデータに関しては従来よく用いられている式 (5) よりも提案する式 (4) の方が適合度が高い様子がわかる。なお、図—9 における重相関係数は次式により定義される値である。

$$R_w = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_e - \hat{Y}_e)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_e - \bar{Y})^2} \cdot \frac{n-1}{n-p-1} \quad (6)$$

ここに、 p は説明変数の数、 n はサンプル数、 \hat{Y}_e は回帰曲線による予測値、 Y_e は観測値、 \bar{Y} は観測値の平均値である。

以上の解析結果より、不同沈下データに対して適用性が高いと考えられるバリオグラム推定式は式 (4) を式 (2) に代入することにより、次のように得られる。



図一10 バリオグラム推定式の適合性の検討 (case E)

$$V_c = 2 \cdot C(0) \cdot \alpha' \cdot \tau' = \alpha \cdot \tau' \quad (7)$$

ところで、水平方向に連続する地盤内の力学的特性など(それらのうち本解析では沈下量を対象としているが)のバリオグラムの解析に関しては次のような2つの観点が考えられる。

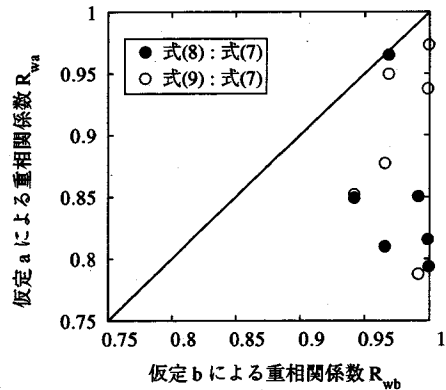
- a) 確率過程の観点で解析する立場: 力学的特性の離散データ列はエルゴード性が成立する定常なガウス過程に従うとして扱う。
- b) フラクタルの観点で解析する立場: 力学的特性の離散データ列はフラクタルであるとして扱う。一般的に、 $1/f^\beta$ ノイズやカオスは定常性を保つためのしくみと考えられているように、それらに基づく時系列は定常性の高い現象であるが、ガウス分布を示す母集団から無作為に標本を抽出した時のような確率過程の示すランダム性とは異なると考えられる。

観点 a の立場に従うと、力学的特性のバリオグラムは2点間の距離の増加と共にしだいに増加し、ある一定の距離以上離れると、一定値 $2\sigma^2$ (σ^2 は母集団の分散) となる。これを式で表わしたものとして、次の式(8)、あるいは、式(9)が著名である。これらの式は地盤の力学的特性などのクリギングによる推定でしばしば用いられている⁹⁾。

$$V_c = 2 \cdot \sigma^2 \{1 - \exp(-a \cdot \tau)\} \quad (8)$$

$$V_c = 2 \cdot \sigma^2 \cdot \left(\frac{3\tau}{2a} - \frac{\tau^3}{2a^3} \right) \quad (9)$$

それに対して、本論文は観点 b の立場に立つものである。つまり、離散データ列のバリオグラムはフラクタルに支配され、自己相関係数が正の区間においては式(7)に従い、それ以上の距離の離れに対しては無意味(自己相関係数が負となるほど2点間のデータが離れている場合には、もはやそれらのデー



図一11 バリオグラム推定式の適合性の検討 (全ケース)

タは無関係であり、それらの関係を論じることは無意味)なものとなると考える。

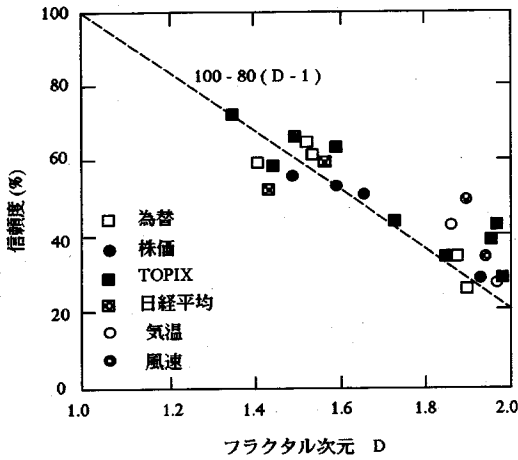
そこで、2つの観定のどちらが妥当なものであるか、また、不同沈下データに対する式(7)の適合性について次に検討する。現実の現場の沈下観測データのバリオグラムを用いて、式(7)~(9)の回帰分析を行い、それらの適合度を調べる。

図一10は表一1に示す case E の観測データに対する両式の回帰分析の結果である。図一8に示すようにこのケースでは自己相関係数は $\tau = 290$ m 付近で正の領域から外れている。したがって、図一10では解析の対象を $\tau = 290$ m 以内の区間に限定している。ただし、表示に関しては図一10では $\tau = 290$ m 以上の区間についても示している。

この区間における提案する式(7)の重相関係数は $R_w = 0.999$ であるが、式(8)の重相関係数は $R_w = 0.815$ であり、式(9)の重相関係数は $R_w = 0.937$ である。つまり、式(7)の適合度が最も高く、不同沈下がフラクタルであり、そのバリオグラムが式(7)に従うものであることを示している(前述(3.)したように、式(1)に従う運動はフラクタルであることが明らかにされており、式(7)は式(1)から誘導されたものである。したがって、式(7)に従う運動もまたフラクタルであるから)。

以上のことを case E 以外の表一1に示す他の観測データについて、さらに確認する。図一11は回帰式によるバリオグラム \hat{V}_c の値と観測データのバリオグラム V_c の値との重相関係数 R_w を表示している。縦軸に式(8)、(9)による R_{w1} 、横軸に式(7)による R_{w2} を表示している。

図によると、式(7)の方が式(8)、(9)よりも R_w が大きく、不同沈下のデータに関しては観点 b に基づく式(7)(つまり、式(1))の方が観点 a に基づく式(8)、(9)よりも適合度が高いと思われる。つ



図一12 予測の信頼度とフラクタル次元の関係¹¹⁾

まり、このことは不同沈下の離散データ列をエルゴード性の成立する定常なガウス過程と考えるよりも、統計的自己相似性に支配されたフラクタルであると考える方がより適切であることを示している。

4. フラクタル次元

フラクタル次元 D_F はフラクタルを示す離散データ列のランダム性を判断する基準の一つであるが、本節では不同沈下の時系列データのフラクタル次元について考察する。フラクタル次元の求め方に関しては種々の定義が存在する¹⁰⁾。それらの一つとして、フラクタル次元 D_F と通常、数学や物理学において用いられている次元 (ユークリッド次元 D_E) との間には次の関係があることが明らかにされている⁸⁾。

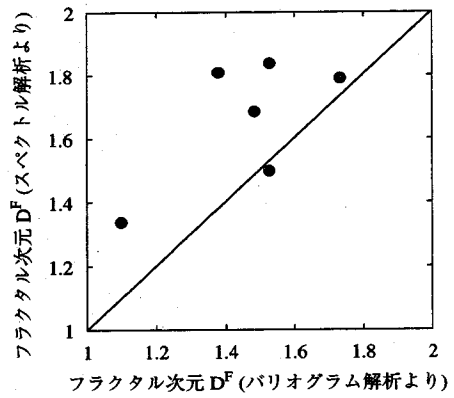
$$D_F = D_E + 1 - H \quad (10)$$

ここに、 H は前述の式(1)におけるパラメータ H と同一のものである。

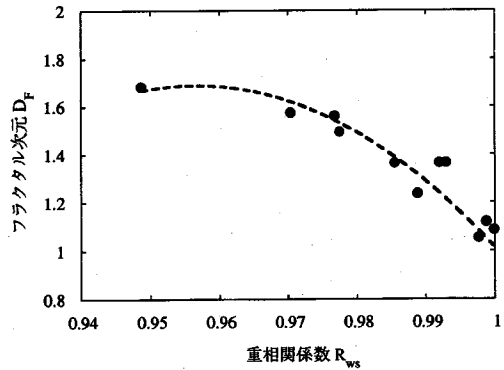
一方、対数グラフ上でスペクトル密度の傾き β (スペクトル分布を前述した「 $1/f^\beta$ ノイズ」で回帰した時の直線の勾配) とフラクタル次元 D_F の間に直線的な関係が存在することが明らかにされている。そして、次式が成立する⁸⁾。

$$D_F = 5 - 3 \cdot \beta \quad (11)$$

$1 \leq D_F \leq 2$ の関係がある¹¹⁾ ので、式(11)よりスペクトル数 β は $1 \leq \beta \leq 3$ の範囲の値を取り得る。 $D_F = 2$ 、すなわち、 $\beta = 1$ の時、スペクトルの回帰直線の勾配が最小となり、離散データ列のランダム性は最大となる。また、 $D_F = 1$ 、すなわち、 $\beta = 3$ の時はその逆で、離散データ列のラン



図一13 「パリオグラム法」と「スペクトル法」によるフラクタル次元の比較 (全ケース)



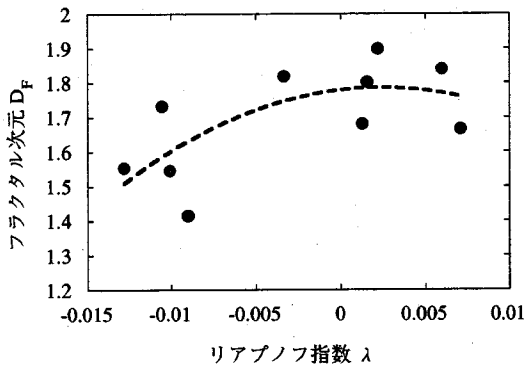
図一14 不同沈下の観測例におけるフラクタル次元 (case F)

ダム性は最小となる。

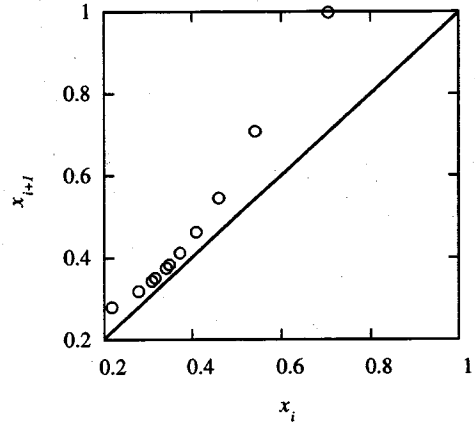
離散データ列について将来予測をする場合、 D_F の値が小さいほど予測精度の高い予測が可能で、 D_F の値が大きいほど予測精度は低くなる。図一12 は予測の信頼度とフラクタル次元の関係を式(11)に基づいて調べた例である¹¹⁾。

そこで、式(10)による方法 (パリオグラム法) と式(11)による方法 (スペクトル法) の両方を用いて、表一1に示す不同沈下の観測例についてフラクタル次元を調べた結果を図一13に示す。図一13によると、不同沈下のフラクタル次元はおおよそ1.4~1.8の範囲にあり、図一12上へプロットしてみると、フラクタルを示す他の一般的な事例と比べて、その挙動の予測の困難度は中間的な部類に属している様子がわかる。

また、図一14はスペクトルの回帰直線と観測値の間の重相関係数 R_{ws} とフラクタル次元 D_F (式(11)による) の関係を示しているが、重相関係数



図一15 フラクタル次元とリアプノフ指数の関係 (case C)



図一16 式(13)に基づく時系列データのポアンカレ・マップ

R_{ws} の値が大きくなるほど、フラクタル次元は低下する関係にある。つまり、直線への近似度がよくなるほど、フラクタル次元は低下する性質があると考えられる。

5. スペクトルのフラクタル性のメカニズム

(1) 不同沈下データのカオス性の判定

離散データ列がカオスである場合の特徴、あるいはカオスの定義に関しては文献により少しづつ異なるものであるが、それらのうちの主なものとして次のようなものがある。

- 自己相関関数がタイム・ラグの増加と共に急速に減衰する。
- 大部分のカオス領域においてリアプノフ指数が正である。
- パワースペクトルが連続的な分布(角振動数成分の分布が離散的ではなく、振動数全域に渡る分布)を示す。

不同沈下の分布に関して、これらの項目についてその性質を調べ、不同沈下のデータがカオスであるかどうか以下で判定する。

まず、a) の項目に関する判定結果は次のとおりである。前述の図一8 は不同沈下の観測例について自己相関関数の分布を調べた例であるが、このように一般的に不同沈下に関する自己相関関数は距離の増加と共に急速に(下向きに凸な曲線ではなく、上向きに凸な曲線に沿うように)減衰する。つまり、この判定項目に関しては不同沈下はカオスの可能性が高いと判定される。

次に b) の項目に関する判定結果は次のとおりである。離散データ列がカオスである場合、ストレンジ・アトラクター上ではどんなに近い 2 点もやがては指数関数的に離れていくという性質があ

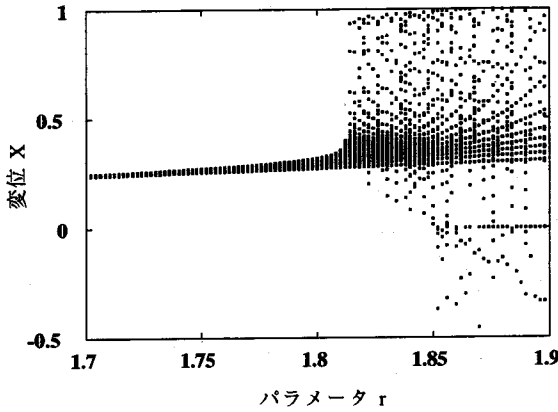
る。このような性質を定量的に表現したものがリアプノフ指数である。 $\{x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pk}, \dots\}$ をポアンカレ断面上の点の集合とする。この集合内でユークリッド距離が ϵ 以内の点のペアをすべて選び、それらのペアでアンサンブルを構成する。 ϵ 近傍内の 2 点を $x_{pk}, x_{pk'}$ と表わす。 pk, pk' からそれぞれ τ だけ離れた点 $x_{pk+\tau}, x_{pk'+\tau}$ を時系列ベクトルの集まり $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ から求める。この時、リアプノフ指数は次式により定義される¹²⁾。

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{N_p} \sum_{|x_{pk} - x_{pk'}| < \epsilon} \ln \left\{ \frac{|x_{pk+\tau} - x_{pk'+\tau}|}{|x_{pk} - x_{pk'}|} \right\} \quad (12)$$

ここに、 N_p は ϵ より小さいペアの総数である。図一15 は不同沈下の観測例 (case C) についてリアプノフ指数 λ とフラクタル次元 D_F (式(11)による) の関係を調べたものである。図によると、フラクタル次元が大きい領域ではリアプノフ指数は正となっている。他のケースでも同様であり、この判定項目に関しても不同沈下はカオスの可能性が高いと判定される。

最後に、c) の項目に関する判定結果は次のとおりである。前述の図一2 は不同沈下の現場観測例 (case E) のフーリエ・スペクトルの分布を示しているが、その振動数成分は連続的な分布を示している。この例と同様、他の観測例についてもフーリエ・スペクトルの分布は連続的な分布を示す。したがって、この判定項目に関しても不同沈下はカオスの可能性が高いと判定される。

以上のように不同沈下の分布は全項目を通してカオスの可能性が高いと判定される。



図一17 分岐ダイアグラム

(2) フラクタルのメカニズムに関する考察

以上の検討の結果、不同沈下がフラクタルであると共に、カオスの性質も合わせ持つことが明らかとなった。不同沈下のフラクタルおよびカオスの支配方程式として、次のような間欠性カオスのモデルを想定し、どのようなしくみでスペクトルがフラクタルとなるかについて考察する。

次式は時系列データの代表的な支配方程式であるARMAモデル (Auto-Regressive Moving Average Model) である¹³⁾。

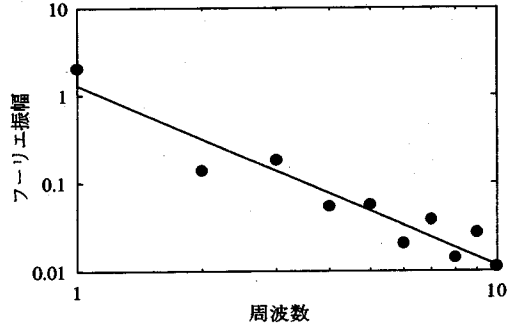
$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_i + \mathbf{B}u_i \quad (13)$$

ここに、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} はパラメータベクトル、 \mathbf{X}_i は状態量ベクトル、 u_i は入力荷重である。 i ステップの状態量 \mathbf{X}_i に反応してシステムが $(i+1)$ ステップで次式で表わされる荷重 u_{i+1} を返すとする。

$$u_{i+1} = f(\mathbf{X}_i) \quad (14)$$

この場合、パラメータ \mathbf{A} 、 \mathbf{B} の値によりシステムはカオス挙動を示す場合とそうでない場合がある。一例として、 $\mathbf{A} = [r]$ 、 $\mathbf{B} = [1]$ 、 $u_{i+1} = -17.47 x_{i4} + 26.95 x_{i3} - 12.4 x_{i2} + 1.05 x_i$ と置く。

図一16はその場合の離散データ列をポアンカレ・マップ (ポアンカレ・マップとは、この図のように離散データ列を横軸に時間 t_i の値、縦軸に次の時間の t_{i+1} の値の組に整理して、プロットしたものに整理したものである。図一17はこの時のパラメータ r と状態量 x_i との関係を表している。 r の値がしだいに大きくなるにつれて、その挙動がしだいにカオスになっていく様子が観られる。図一18はそれらのうちの、 $r = 1.83$ の時のスペクトル解析の結果を示しているが、スペクトル分布は直線性を示している。つまり、フラクタルな性質を示すスペクトルを生み出すしくみ



図一18 式(13)に基づく時系列データのスペクトル分布

の一つとして、式(13)、(14)のようなモデルが考えられる。

6. 不同沈下の分布とスペクトルの関係

次節でスペクトルのフラクタル性を応用した沈下推定法を提案するが、その準備として、本節ではその解析に用いるスペクトルと沈下分布の関係について考察する。

(1) 基本となる関係式

フーリエ変換は次式で定義される¹⁴⁾。

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot e^{-i(2\pi k m / N)}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (15)$$

ここに、 x_m は離散データ列、 N はその個数である。また、式(15)と逆の関係にあるフーリエ逆変換は次式で定義される¹⁴⁾。

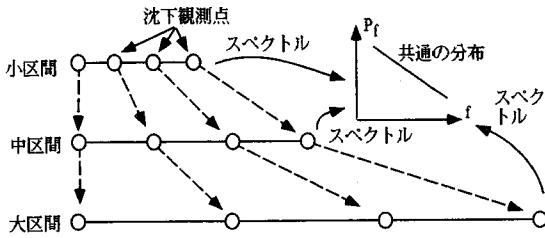
$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot e^{-i(2\pi k m / N)}, \quad (m=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (16)$$

つまり、式(15)により不同沈下の離散データ列からフーリエ・スペクトルに変換し、式(16)によりそのフーリエ・スペクトルから再び元の不同沈下の離散データ列へ逆変換を行なうことができる。このように、不同沈下データとそのスペクトルは相互に変換が可能な関係にある。フーリエ・スペクトルとは式(15)で計算される複素フーリエ係数 C_k の値を用いて、次式で計算されるフーリエ振幅 X_k を縦軸に、周波数 f を横軸にとり、対数表示でプロットしたものである¹⁴⁾。

$$X_k = \sqrt{C_k \cdot C_k^*} / N \quad (17)$$

ここに、 C_k^* は C_k の共役複素数である。

観測された値 x_m^o とまだ観測されていない推定す



図一19 スペクトルのフラクタル性が沈下分布に及ぼす影響

べき値 x_m^k を含む離散データ列があるとすると、式 (15), (17) よりフーリエ振幅 X_k を x_m^k と x_m^k の関数として表わすことができる。つまり、次の関係式が構成できる。

$$X_k = f(x_m^k, x_m^k) \quad (18)$$

周波数 f を x に、フーリエ振幅 X_k を y において、それらの間に $[y = a + b x]$ の直線をフィッティングさせるとすると、最小二乗法による近似直線の係数 a, b は次式で与えられる。

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (19)$$

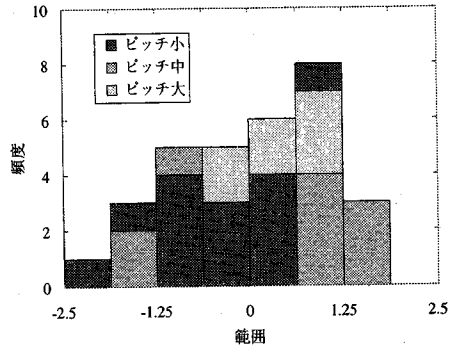
$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (20)$$

以後の解析において、これらの係数 a, b や直線 $[y = a + b x]$ と観測値が一定の関係を満足するよう x_m^k を求める最適化を行なうが、その場合の関係式として式 (18) ~ (20) を用いる。

(2) サンプルピッチの影響

スペクトル分布がフラクタルであると、図一19に示すように沈下観測の小区間とそれを含む中区间、さらにそれを含む大区间のスペクトルが同一の分布形となることが予想される。そこで、それを実例で確かめるために、表一1に示す観測例のうち、case B, C, F (これらのデータは他よりも観測点数が多いので) について、全区間を小区間、中区间、大区间に分け、それぞれ9点ずつピック・アップ (つまり、サンプル・ピッチを変化させ) し、それぞれについてスペクトルの直線回帰を行ない、回帰直線の勾配の分布を調べた。

図一20はその結果を示している。ただし、case B, C, F は同一の現場データではないので、それぞれ結果の分布範囲が異なる。したがって、図一20



図一20 スペクトルの回帰直線の勾配の分布 (case B, C, F)

では各データを $N(0,1)$ の分布に正規化して整理している。それによると、各ピッチ毎の結果は混在しており、特別な傾向は観られず、サンプル・ピッチの影響はないと思われる。すなわち、サンプル点数さえ同じであれば、ピッチの大小にはほぼ無関係にスペクトルの回帰直線の勾配は同一のガウス分布の母集団の属すると考えられる。

(3) スペクトルの勾配の影響

スペクトルの勾配を変化させ、それが沈下分布に及ぼす影響を調べる。沈下の観測データを用いて、次のような最適化を行ない、スペクトルの勾配を変化させたデータを生成する。

$$\text{目的関数: } f = |R_{wo} - R_{we}| \rightarrow \text{最小化} \quad (21)$$

ここに、 R_{wo} は元となる沈下の観測データのフーリエ・スペクトルの回帰直線に関する重相関係数である。また、 R_{we} は生成するデータのフーリエ・スペクトルの回帰直線に関する重相関係数である。

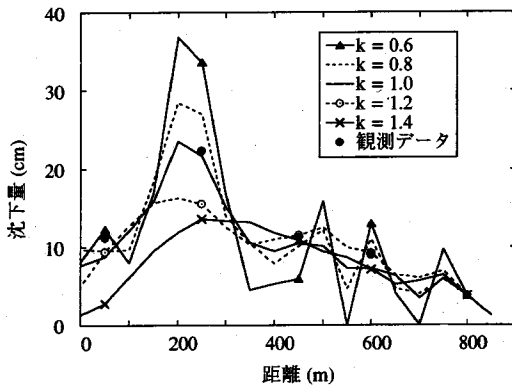
重相関係数は式 (6) で定義されるものであるが、重回帰分析等において寄与率と呼ばれるものであり、ここではスペクトルの回帰式で説明できる変動部分の比率を表わす。つまり、この目的関数の最小化は生成するデータのスペクトルの直線性を観測データのそれと同程度にすることを狙いとしている。

この最適化において次の制約条件を考慮する。

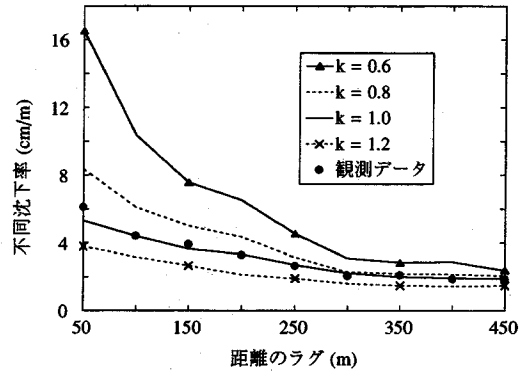
$$\text{制約条件 1: } \beta_e = k \cdot \beta_o \quad (22)$$

$$\text{制約条件 2: } \alpha_e = \alpha_o \quad (23)$$

ここに、 $\beta_o (>0)$ は観測データのフーリエ・スペクトルの回帰直線の勾配、 β_e は生成するデータのフーリエ・スペクトルの回帰直線の勾配、 k はそれら両者の間の勾配の倍率である。また、観測



図—21 スペクトルの勾配を変化させた時の沈下分布の推移 (case C)



図—22 スペクトルの勾配を変化させた時の不同沈下率の推移 (case C)

データの周波数の平均位置における元のデータのスペクトルの回帰直線による値 α と生成するデータのスペクトルの回帰直線による値 α_0 を等しいと置いている。これらの制約条件を設けることにより、スペクトルの勾配が変化したデータを生成することができる。

本解析においては制約条件 1 における k の値を変化 (図—21, 22 では k の値を 0.6 ~ 1.4 の範囲で) させて、それが沈下分布に及ぼす影響を調べる。最適化手法としてはいろいろな手法が適用可能であるが、ここでは SQP 法 (Sequential Quadratic Programming)¹⁵⁾ を用いている。

なお、解析結果の整理上、次のような量を定義しておく。不同沈下は一般的に 2 点の沈下量の差の大きさで表わされる。しかし、2 点の沈下量の差が同じであっても、それらの間の距離が異なれば、工学的には別な意味を持つ。そこで、距離の影響を考慮し、次式により不同沈下率 θ_a を定義する。

$$\theta_a = \frac{|S_a - S_b|}{d} \quad (24)$$

ここに、 S_a は観測点 a における沈下量、 S_b は観測点 b における沈下量、 d は a ~ b 間の距離である。

図—21 は表—1 の case C のデータを用いてそのスペクトルの勾配 β を変化させた場合の沈下分布の変化の様子を表わしている。図中の記号 k は式 (22) に示すものと同一である。また、図—22 はその場合の不同沈下率 θ_a の変化を表わしている。これらの図によると β の値が大きくなる (k の値が大きくなる) ほど不陸の小さい、なめらかな曲線に近づき、その逆に β の値が小さくなるほど不陸が大きく、したがって、不同沈下が大きく

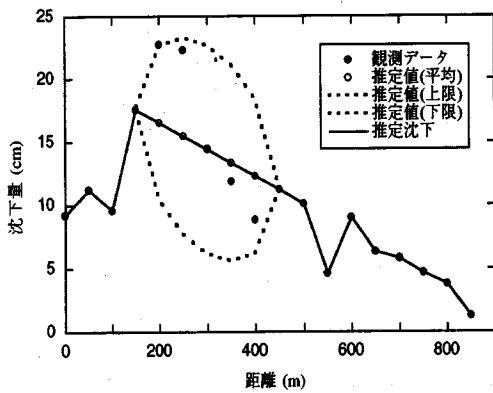
なることがわかる。この傾向は case C のみならず、他のデータについても同様である。

7. スペクトルのフラクタル性を考慮した沈下推定法

(1) クリギング手法による不同沈下推定上の問題点

軟弱地盤上に盛土やその上に構造物を建設する場合、施工範囲をいくつか分割して、先行区間の沈下観測データを用いて、将来施工区間の沈下を予測することがよく行われる。あるいは、不同沈下データの一部に測定値の欠落部がある場合や、測定値間の任意の位置の沈下を推定する必要がある場合、沈下推定法としてはクリギング (Kriging) 手法¹⁶⁾などが有効である。図—23 はクリギングにより距離 200 ~ 400 m の区間の不同沈下を推定した例を示している。図中、推定の平均値を○印で、また、95% 信頼区間の上限と下限を破線で表示している。この図からも明らかなように、この手法を不同沈下の推定に用いる場合には次のような問題点があると考えられる。

- 信頼度 95% の推定範囲が広すぎて、実務設計上、不同沈下の大きさを絞りにくい。
- 隣接する値間を結んだライン付近に平均値の予測が出やすい。しかし、それらを結んだラインは現実の分布とは大きく異なる。たとえば、図—23 において推定値の平均がプロットされているが、現実の分布とは大きく異なる。このようなクリギングによる推定結果と現実の分布との相違は、個々の推定値と観測値の間のバリオグラムに基づくばらつきは考慮されていても、個々の推定値の間の関係を支配する変動要因が考慮されてい



図一23 クリギングによる不同沈下の推定例 (case C)

ないことによるものであると考えられる。

以上のような問題点に対して、本論文では次のように考える。つまり、クリギングの信頼区間の概念は不同沈下の推定においても有効であるが、フラクタルの特性が推定法の中で考慮されていないと考えられる。そこで、スペクトルのフラクタル性を併せて考慮することにより、新たな不同沈下の推定法を構成する。

(2) 提案する推定法の概要

前述したように、フーリエ解析により離散データ列とそのスペクトルは一対一に対応している。つまり、それらのうちどちらかが決まれば、他方は一意的に確定される。そこで、このことを応用して、将来施工区間の未観測部分の沈下を推定することを試みる。

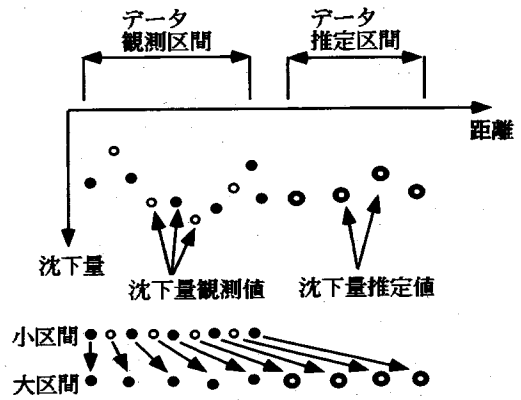
図一24に示すような小区間のスペクトルは大区間のスペクトルとフラクタル(統計的に自己相似)の関係にある。そこで小区間の観測データを用いて、スペクトルを求め、中区間のスペクトルがその小区間のスペクトルの特徴を満足するように、沈下推定を行う。つまり、図一24において○、●のデータを用いてスペクトルを求め、次にそれと●のデータを既知データとして用いて、○の未知データを推定する。

(3) アルゴリズム

予測区間の沈下の値を推定するために、次のような最適化を行なう。

$$\text{目的関数} : f = |R_{wo} - R_{ve}| \rightarrow \text{最小化} \quad (25)$$

ここに、 R_{wo} は図一24に示す観測区間のデータ



図一24 フラクタルを考慮した不同沈下の推定法

のフーリエ・スペクトルの直線回帰に対する重相関係数である。また、 R_{wo} は予測区間のデータのフーリエ・スペクトルの直線回帰に対する重相関係数である。そして、式(25)における重相関係数の定義は前述の式(6)である。

この最適化において次の制約条件を考慮する。

$$\text{制約条件 1} : \beta_o = \beta_p \quad (26)$$

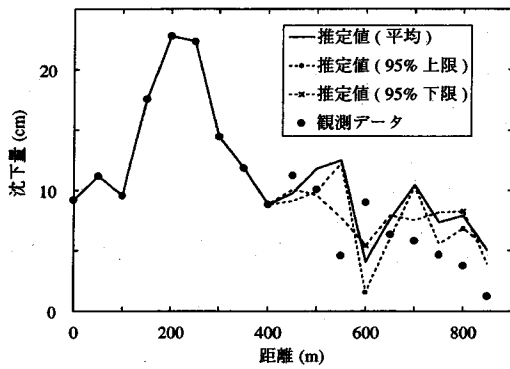
$$\text{制約条件 2} : 0 \leq x_L \leq x_i \leq x_U \quad (27)$$

ここに、 $\beta_o (> 0)$ は図一24に示す観測区間のデータのフーリエ・スペクトルの回帰直線の勾配、 β_p は予測区間のデータのフーリエ・スペクトルの回帰直線の勾配である。つまり、スペクトルに関してフラクタルな関係が成立するならば、観測区間と予測区間のそれぞれのスペクトルの回帰直線の勾配は同一の確率分布に従うと考えられるので、それらを等しいと置いている。ただし、その確率分布を考慮し、 β_o の値として95%信頼限界に対応する値を与え、沈下分布を確率的に推定する。

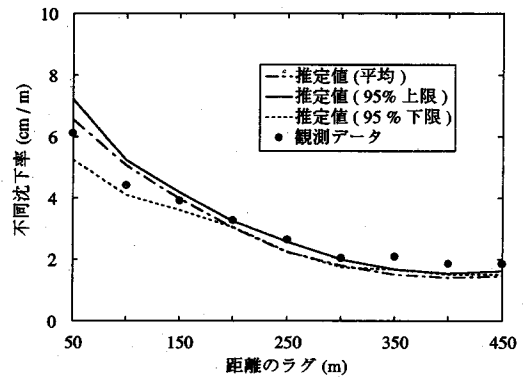
また、 x_i は予測対象の沈下量の値、 x_L, x_U はバリオグラム推定式として式(8)、(9)ではなく、式(7)を用いて、クリギングにより推定した95%信頼限界に対応する沈下量の値である。つまり、クリギングによる信頼限界の範囲内でスペクトルのフラクタル性を満足する沈下量の値を推定するものである。

(4) スペクトルの勾配に関する信頼限界

スペクトルの勾配 β は沈下観測の全区間において一定なものではなく、確率的に変化すると考えられる。変化する不同沈下に対して、その上下限界が実務設計上、重要である。そこで、この勾配の分布がガウス分布に従うとして、不同沈下の95



図一25 沈下推定結果：沈下分布 (case C)



図一26 沈下推定結果：不同沈下率 (case C)

% 信頼限界 (実務上 95 % が設定されることが一般的に多いので、ここで設定する) について検討する。

スペクトルの勾配の平均値を β_0 、95 % 限界に対応する上限値を β_U 、下限値を β_L とすると、これらの値は次式により推定することができる。

$$\beta_{U,L} = \beta_0 \pm t(n-2, 0.05) \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2) \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (28)$$

ここに、 $t(n-2, 0.05)$ は自由度 $(n-2)$ の t 分布表の値である。

(5) 解析結果

図一25 は表一1 の case C に関する沈下分布の推定結果である。また、図一26 はその場合の不同沈下率の分布を表わしている。図によると、ほぼ信頼区間の近傍に観測データの多くが位置することがわかる。(この信頼区間の本来の意味は回帰直線の位置に関するものである。個々の観測値はその回帰直線の位置を中心にして分布するので、信頼区間外にも観測値が存在するのは当然である。つまり、沈下の分布の中心がこの信頼区間内にあることを意味する。) なお、図一25 および図一26 は表一1 の case C の例であるが、推定値と観測値は実用上、比較的良好に一致している様子が確認される。また、他のケースについても同様な結果を確認することができる。

8. まとめ

不同沈下の離散データ列に関して、次のような性質が明らかとなった。

a) 不同沈下のスペクトル分布は $1/f^\beta$ ノイズ型 (周波数とスペクトル密度の関係が直線) にな

る。このことは不同沈下の分布がフラクタルであることを示すものである。

b) バリオグラムに関する 2 種類の観点 a, b を設定し、それらに基づくバリオグラム推定式を比較検討した結果、不同沈下の離散データ列を観点 a (エルゴード性の成立する定常なガウス過程) として扱うより、観点 b (統計的自己相似性に支配されたフラクタル) として扱う方がより適切であることが明らかとなった。そして、それに基づく自己相関係数とバリオグラムの推定式を提案した。

c) 離散データ列 $x(t)$ そのものはガウス分布には従わず、増分 $((t + \tau)$ における値との差 $(x(t + \tau) - x(t))$ がガウス分布に従う。

d) 観測データのサンプル・ピッチの大小には無関係に、スペクトルは同一の分布形 (スペクトルの回帰直線の勾配が同一のガウス分布の母集団の属する) に従う、つまりこのことは不同沈下の分布がフラクタルであることを意味する。

e) 不同沈下の離散データ列のフラクタル次元 D_f について、次の性質が明らかとなった。 D_f が小さいほどスペクトルの直線に対する近似度がよくなり、推定精度も高い性質がある。 $1 \leq D_f \leq 2$ の関係があるが、不同沈下のフラクタル次元はおおよそ 1.4 ~ 1.8 の範囲にあり、フラクタルを示す他の一般的な事例と比べて、その挙動の予測の困難度は中間的な部類に属する。

f) 自己相関関数の分布、リアプノフ指数、スペクトル分布の各項目について判定を行った結果、不同沈下データはフラクタルであると共に、カオスの性質も併せ持つことが明らかとなった。

g) ARMA モデルによるカオスのモデルを構成し、数値解析を実施した結果、スペクトル分布が直線となる現象を説明することができた。

h) スペクトルの勾配 β を変化させて、それが沈下分布に及ぼす影響を調べた。その結果、スペクトルの勾配 β の値が大きくなるほど不陸の小さい、なめらかな曲線に近づき、その逆に β の値が小さくなるほど不陸が大きくなり、不同沈下が大きくなるということが明らかとなった。

以上明らかにした性質の一部を応用し、クリギングを基本に、それにスペクトルのフラクタル性を併せて考慮することにより、新たな不同沈下の推定法を構成した。この方法はたとえば、将来施工区間の未観測部分の沈下を推定する場合などに利用できる。数例の現場観測データへの適用の結果、推定値と観測値は実用上、比較的よく一致している様子が確認された。

参考文献

- 1) B.B. Mandelbrot : The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Co., 1977. ; 広中 (監訳) : フラクタル幾何学, 日経サイエンス社, 1985.
- 2) 西江弘 : 生命現象を説明するカオス, 日経サイエンス, pp.34 - 39, 1992.3.
- 3) 武者利光, 沢田康次 : ゆらぎ・カオス・フラクタル, 日本評論社, pp.59 - 89, 1991.
- 4) 森好生, 早田修一, 土田孝 : 羽田空港沖合展開事業における沈下観測と将来不同沈下の予測, 土と基礎, Vol.37, No.8, pp.45 - 50, 1989.
- 5) 土田孝 : 埋立地における不同沈下の予測, 港湾技術研究所講演会講演集, pp.155 - 228, 1989.
- 6) 土質工学会 : 土質工学ケースヒストリー集 (第1集), 土質工学会, pp.502 - 513, 1983.
- 7) J. フェダー著 (松下貢, 早川美徳, 佐藤信一 訳) : フラクタル, 啓学出版, pp.172 - 193, 1991.
- 8) H.-O. パイトゲン, D. ザウベ (山口昌哉 監訳) : フラクタル・イメージ, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp.35 - 42, 1990.
- 9) 大西有三, 田中誠, 大沢英昭 : 不均質地盤内の地盤定数の推定に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No. 457 / III- 21, pp.51 - 58, 1992.
- 10) 高安秀樹 他 : フラクタル科学, 浅倉書店, pp.88 - 98, 1989.
- 11) 松葉育雄 : カオスと予測, 数理科学, No.348, June, pp.64 - 69, 1992.
- 12) 長島知正, 永井喜則, 萩原利彦, 土屋尚 : 時系列データ解析とカオス, 計測と制御, Vol. 29, No.9, pp.53 - 60, 1990.
- 13) 赤池弘次, 中川東一郎 : ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 1972.
- 14) 大崎順彦 : 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, pp.25 - 79, 1994.
- 15) M.J.D.Powell : A Fast Algorithm for Nonlinear Constrained Optimization Calculations, Numerical Analysis, ed.G.A.Watson, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Vol.630, 1978.
- 16) T.M.Burgess et al. : Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping of Soil Properties, Journal of Soil Science, 1980.

(1994. 10. 21受付)

FEATURE OF DIFFERENTIAL SETTLEMENT AS FRACTAL AND ITS APPLICATION FOR SETTLEMENT ESTIMATION

Eiji WAKITA and Minoru MATSUO

The fractal is a concept of the statistical self-similarity that has been found in many natural phenomena. The distribution of the differential settlement may be one of the fractals. Then, the justice of this supposition is examined by using observed data at sites. Also, the feature of the differential settlement as a fractal is revealed. The estimation method of the differential settlement is constituted by applying the feature as the fractal. This method is applied for the estimation of the settlement of a place where the construction is planned in the future, and the applicability is testified by using observed data at the site. At the results, the effectiveness of this method was confirmed.