

**投稿論文(和文)
PAPERS**

単体鉄筋の疲労寿命のばらつきと 相関性を考慮した RC 曲げ部材の疲労寿命

吉川弘道¹・大井祥之²

¹正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部 土木工学科 (〒158 世田谷区玉堤1-28-1)

²正会員 正修 武蔵工業大学大学院 (現 川田工業(株))

本研究は、繰返し曲げ荷重を受ける鉄筋コンクリート梁を対象とし、材料の平均強度に対して従来からある S-N 線図を用い、累積損傷理論ならびに確率論により、鉄筋コンクリート梁の疲労寿命の算定法を定式化・提案するものである。加えて、モンテカルロシミュレーションによる数値計算を実施し、主鉄筋の逐次破断の再現ならびに疲労寿命の算出とその統計処理を試み、鉄筋素材のばらつきと相関性、本数の影響などについて検討した。

Key Words : fatigue life, Miner's rule, S-N curve, reliability theory, Monte-Carlo simulation, reinforced concrete beam, variation and correlation of reinforcing bar

1. はじめに

鉄筋コンクリート構造部材の耐久性を考えるうえで、繰返し荷重下における疲労性状は重要な要素の一つである。例えば、車輪の運行を受ける道路橋・鉄道橋ならびに波浪を受ける海洋構造物では、疲労荷重が主要な劣化原因となっている。このため、鉄筋コンクリート構造物の疲労限界状態に対する照査は、限界状態の一つとして主要な検討項目となっている¹⁾。

繰返し荷重を受ける鉄筋コンクリート部材は、構成材料であるコンクリートと鉄筋のいずれかの疲労破壊によって決定する。しかし、それらの実験結果を見ると、大きなばらつきを呈す^{2)~4)}、これは設計作業の大きな障害となる。

しかし、ここで大切なことは、このような材料の変動性をいかに構造部材へ反映させ、合理的な設計手順を確立するかということである。例えば、確率過程としての取り扱いやいわゆるランダムシミュレーションの採用なども有力な解決策である。鉄筋コンクリートの終局強度についての研究は古くから試みられており^{5),6)}、いくつかの有用な知見を与えているが、疲労破壊についてはきわめて限られたものとなっている。宮本ら⁸⁾、松本ら^{9),10)}は、多本数の主鉄筋をもつ曲げ部材に着目し、その逐次疲労破壊についての実験的検討、シミュレーションによる再現を試みており、本研究の端緒を与えた。

本研究は、曲げ荷重を受ける鉄筋コンクリート梁(以下 RC 梁とする)を対象とし、引張主鉄筋の疲労寿命を確率量としたときの、RC 梁としての最終的な疲労寿命に

ついて考察するものである。数値シミュレーションに際しては、疲労損傷に関する線形被害則を適用するとともに、モンテカルロ法を用いた。これにより、主鉄筋の逐次破断の再現ならびに疲労寿命の算出とその統計処理を試みるもので、単体鉄筋の疲労寿命に関するばらつきと相関性、軸力の影響、本数の影響などについて検討するものである。

2. 解析対象の設定と疲労特性

(1) 問題の設定

対象とする鉄筋コンクリート梁に一定の繰返し荷重を付与する。引張鉄筋の疲労寿命はばらつきを有するものとし、本論文の主題である。そして、多数本ある引張鉄筋を逐次疲労破壊させ、最終的に梁部材としての崩壊に至る疲労回数を求めるものである。このため次のようないくつかの基本条件を設定した。

- ① 繰返し荷重を受ける複鉄筋の RC 梁を考える(図-1)。引張鉄筋は複数本(m 本)を有し、その疲労寿命(疲労に至るまでの繰返し回数)を確率変数とする。
- ② 載荷荷重は、最大曲げモーメント M_{max} 、最小曲げモーメント M_{min} を終始一定とし、従って、振幅 $M_r = M_{max} - M_{min}$ = 一定の片振りとする。さらに、軸力 P を含む $M \sim P$ 荷重を受ける場合についても計算を試みる。
- ③ m 本の鉄筋は最弱のものから逐次疲労破壊し、残存する鉄筋にて、全荷重を等分に分担するものとする。従って、個々の鉄筋の応力振幅は徐々に増大し(図

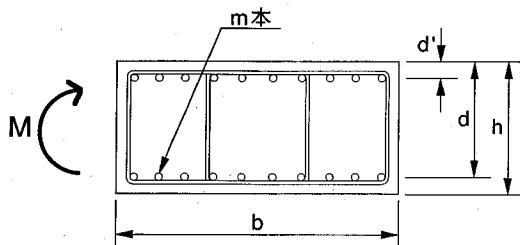


図-1 RC 梁の断面図

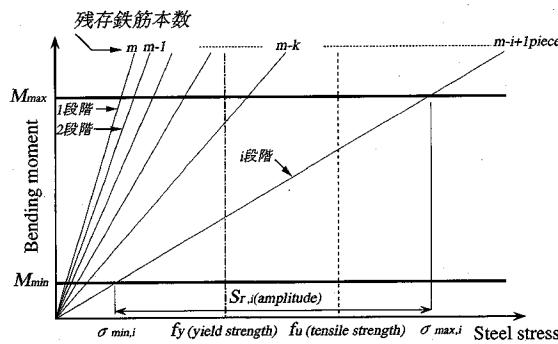


図-2 逐次破断過程における作用曲げモーメントと鉄筋応力との関係図

-2), その疲労寿命の算定に際して線形被害則 (Palmgren-Miner 則) を適用する。

- ④ これをモンテカルロ法により数値シミュレーションを実行し, RC 梁部材としての疲労寿命を求め, その平均値, 分散を考察する。

このようなシミュレーションにより, 次の点について, 定量的に明らかになることが期待される。

- ① 鉄筋単体のばらつき (変動係数) が, RC 梁の疲労寿命に与える影響。
- ② RC 梁の疲労寿命のばらつきが正規分布をなすか, またその時の平均値と変動係数。
- ③ 鉄筋単体の疲労寿命の相関性が RC 梁の疲労寿命に与える影響。
- ④ 鉄筋本数の大小が RC 梁の疲労寿命に与える影響 (本数効果)。
- ⑤ 疲労特性に与える軸力の影響。
- ⑥ 疲労による引張鉄筋の逐次破断および終局間近における残存鉄筋の連鎖降伏への影響。

(2) 鉄筋コンクリート断面の応答応力

図-1 に示す断面を有する複鉄筋のコンクリート梁を考える。この梁に, 最大載荷荷重 P_{\max} , 最小載荷荷重 P_{\min} が作用した時に発生する最大曲げモーメント, 最小曲げモーメントをそれぞれ M_{\max} , M_{\min} とし, これに対応す

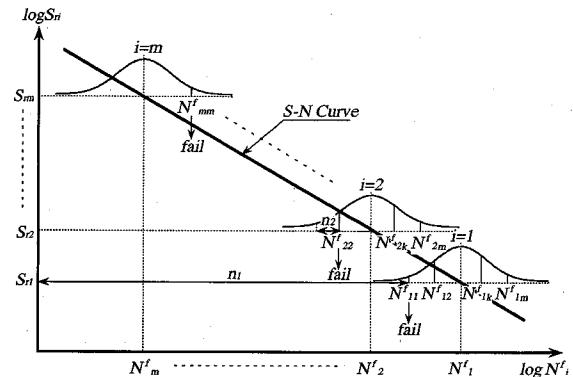


図-3 単体鉄筋のばらつきと逐次破断モデルの概念図

る引張鉄筋の最大応力, 最小応力をそれぞれ σ_{\max} , σ_{\min} とする。

複鉄筋の鉄筋コンクリート断面に曲げモーメント M が作用した時の, 中立軸の位置 X , コンクリートの圧縮応力 σ_c , 引張鉄筋の応力 σ_s については, 従来の RC 理論によって容易に与えられる (巻末 Appendix 1 参照)。

(3) 単体鉄筋の疲労特性 (S-N 線図)

本研究においては, 松本ら⁹⁾が行った異形鉄筋の単純引張空中疲労試験から導いた式を用いることにし, これは以下のように示される。

$$\log N_f = 20.13 - 4.188 \log S_r \quad (1)$$

3. 線形被害則に基づく疲労寿命の算定手法¹⁵⁾

(1) 基本モデルと算定手順

RC 梁中に配置された m 本の鉄筋を線形被害則を適用することにより, 最弱鉄筋から逐次破断させていく, 梁全体が破壊するに至るまでの過程を並列システムの破壊現象と考える。以下にそのモデル化と算定手順を示す。

- ① $i-1$ 本の鉄筋が破断した状態を i 段階 ($i=1, 2, 3, \dots, m$) とし, i 段階における鉄筋の最大応力, 最小応力をそれぞれ $\sigma_{\max,i}$, $\sigma_{\min,i}$ とする。従ってこのときの応力振幅 $S_{r,i}$ は $S_{r,i} = \sigma_{\max,i} - \sigma_{\min,i}$ によって与えられる。

この応力振幅 $S_{r,i}$ に対して, 所定の S-N 線図より, 鉄筋が $m-i+1$ 本ある時の平均疲労寿命 $\log N_f$ が求まる(図-3)。従って, $S_{r,i}$ は徐々に増加し, S-N 線図を左上りに移動する。

- ② m 本の鉄筋の疲労寿命はばらつきを呈し, 対数軸 (log スケール) 上で正規分布をなすものとする。そして, 最弱の疲労寿命のものから, $j=1, 2, 3, \dots, m$ のように番号付けを行う (後述の表-2 参照)。 i 段階で $i-1$ 本の鉄筋が破断したとき, それらの鉄筋が分担し

表-1 i 段階 j 番目鉄筋の損傷増分 ΔM_{ij} と累積損傷 M_{ij}

段階	繰り返し回数	損傷量	最弱 ← → 最強				
			$j=1$	2	j
1	n_1	ΔM_{1j}	$\frac{n_1}{N'_{11}}$	$\frac{n_1}{N'_{12}}$	$\frac{n_1}{N'_{1j}}$
		M_{1j}	$M_{11}=1$	M_{12}	M_{1j}
2	n_2	ΔM_{2j}		$\frac{n_2}{N'_{22}}$	$\frac{n_2}{N'_{2j}}$
		M_{2j}		$M_{22}=1$	M_{2j}
.....
i	n_i	ΔM_{ij}			$\frac{n_i}{N'_{ij}}$	$\frac{n_i}{N'_{im}}$
		M_{ij}			M_{ij}	M_{km}
.....
m	n_m	ΔM_{mj}				$\frac{n_m}{N'_{1m}}$	$\frac{n_m}{N'_{mm}}$
		M_{mj}				$M_{mm}=1$	

ていた荷重は、残りの $m-(i-1)$ 本の鉄筋に再分配されるものとする（図-2）。

- ③ i 段階における繰り返し回数を n_i とし、 i 段階が終了したときの j 番目鉄筋の累積損傷量を M_{ij} 、損傷量の増分を ΔM_{ij} とし、次式のような線形被害則を適用する。

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^i \Delta M_{kj} = \sum_{k=1}^i \left(\frac{n_k}{N'_{kj}} \right) \quad (2)$$

i 段階において、 $M_{ij}=1$ が成立した最弱の疲労寿命をもつ鉄筋 ($j=i$ 番目の鉄筋) が疲労破壊することになる。これによって、 i 段階は終了し、次の $i+1$ 段階に進む。

- ④ 以上の①～③が i 段階における 1 つのループを示すもので、各段階で鉄筋を 1 本づつ疲労破壊させて、 m 段階まで繰り返す。なお、 σ_{max} が降伏点を超えて計算を打ち切らず、 $i=m$ が最終ループであり、これが完了したとき、すなわち、全鉄筋が疲労破壊したとき、RC 梁としての疲労寿命 N'_{beam} とする。

以上をとりまとめ、表-1 に一覧化した。

(2) 線形被害則の適用

i 段階における最弱の鉄筋は $j=i$ 番目の鉄筋で ($j=1 \sim i-1$ の鉄筋は既に疲労破壊している。)，このときの疲労破壊に至る条件は、式(2)で表される累積損傷量を 1 に等値させることで表される。すなわち、

$$M_{ij}|_{i=j} = \sum_{k=1}^j \left(\frac{n_k}{N'_{kj}} \right) = 1 \quad (3)$$

のように記述することができ、これより、 m 個の連立一次方程式を誘導することができる。すなわち、

$$M_{11} = \frac{n_1}{N'_{11}} = 1$$

$$M_{22} = \frac{n_1}{N'_{12}} + \frac{n_2}{N'_{22}} = 1 \quad (4)$$

$$M_{mm} = \frac{n_1}{N'_{1m}} + \frac{n_2}{N'_{2m}} + \dots + \frac{n_m}{N'_{mm}} = 1$$

従って、上式は次のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N'_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N'_{12}} & \frac{1}{N'_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N'_{1m}} & \frac{1}{N'_{2m}} & \frac{1}{N'_{3m}} & \cdots & \frac{1}{N'_{mm}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

さらに、上式、左辺のマトリックスを $[A]$ 、ベクトルを $\{n\}$ とすると

$$[A]\{n\} = \{I\} \quad (6)$$

のように略記することができる。ただし、 $\{I\}$ は単位ベクトルで、 $\{I\}^T = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$ 。従って、

$$\{n\} = [A]^{-1}\{I\} \quad (7)$$

のように処理すると、未知数 $\{n\}$ が求まる。この $\{n\}^T = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m\}$ より、 i 段階における繰り返し回数 n_i ($i=1 \sim m$) が全て求まる。よって、梁としての疲労寿命 N'_{beam} は次式より求められる。

$$N'_{beam} = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{i=1}^m n_i \quad (8)$$

式(7)、(8)をまとめると、最終的に次式のように表示することができる。

$$\begin{aligned} N'_{beam} &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m \\ &= [1, 1, \dots, 1] \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{Bmatrix} = \{I\}^T \{n\} \end{aligned} \quad (9)$$

上式が m 本の引張鉄筋をもつ RC 梁の疲労寿命を与えるもので、本研究での根幹をなすものである。これによって、ばらつきを考慮した鉄筋素材の疲労寿命で構成されるマトリックス $[A]$ を与えると、中途の破壊過程および RC 梁の疲労寿命を直ちに算出することができる。

このような簡便な処理は、線形被害則の成立を前提としているもので、累積損傷の非線形性の導入¹¹⁾については別報で論じたい。

4. モンテカルロ法による数値シミュレーション

(1) 確率基本値の割付け

配置される m 本の鉄筋の疲労寿命が唯一の確率変数であり、RC 梁の寿命の算出に際しては、まず、これを決

表-2 確率基本値の割付けと i 段階 j 鉄筋の疲労寿命

		最弱 ← → 最強						
段階	平均値	$S_{r,i}$	$j=1$	2	j	m
		Y_1	Y_2	Y_j	Y_m	
$i=1$	N^f_1	$S_{r,1}$	N^f_{11}	N^f_{12}	N^f_{1j}	N^f_{1m}
2	N^f_2	$S_{r,2}$		N^f_{22}	N^f_{2j}	N^f_{2m}
							
i	N^f_i	$S_{r,i}$			N^f_{ij}	N^f_{im}
							
m	N^f_m	$S_{r,m}$					N^f_{mm}

$S_{r,i}$ = 曲げモーメント M_r による全引張応力 / (m-i+1)

N^f_i : $S_{r,i}$ に対応する疲労寿命 (平均値)

める必要がある。そこで、本研究では、 $X_{j(RND)}$ ($j=1, 2, 3, \dots, m$) なる確率基本値の割付けから出発する。確率基本値は、標準正規分布 Normal (0, 1) に従う、相互に独立な実現値 (サンプリング値) m 個とする。ここで、標準正規に従う乱数の作成には中心極限定理 (例えば、12), (13)) を用いる。このようにして得られた m 本の鉄筋に関する疲労寿命の順番は、小さいものより付番する。すなわち、

$$\text{確率基本値: } X_{j(RND)} \quad (X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_m) \quad (10)$$

また、この確率基本値は、 m 本がすべて健全なうちに与えられ、逐次破壊過程で変化しないものとする。

(2) 相関特性の導入

このような実現値 m 個の値は相互に相関性をもつことが考えられる。これは、実際の場合を考えたとき、用いられる m 本の鉄筋が同一の会社 (メーカー) の製品であったり、同じロットから切り出されたものであれば、それらの鉄筋の性能 (力学特性) は大小の違いはある、そこには相関性が存在するはずである。そこで、確率基本値に相関をもたせることによって、 m 本の鉄筋の疲労寿命にどのような影響を与えるか、独立な場合と比較してみることにする。

相互に相関をもつ m 個の確率基本値 $Y_{j(RND)}$ は、独立な確率基本値 $X_{j(RND)}$ を用いて次のように抽出される^{12), 13)}。ただし、このときの共分散を $\text{cov}[Y_i, Y_j]$ ($i=1, 2, 3, \dots, m, j=1, 2, 3, \dots, m$) のように表示する。

共分散 $\text{cov}[Y_i, Y_j]$ を要素とする共分散マトリックス $[C_x]$ をコレスキー法を用いて次のような三角行列 C_{ij} の積に分解する。 $\text{var}[\cdot]$ は分散値を表し、 $\text{var}[Y_i] = \text{cov}[Y_i, Y_i]$ のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \text{var}[Y_1] & \cdots & \text{cov}[Y_1, Y_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[Y_m, Y_1] & \cdots & \text{var}[Y_m] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ 0 & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_{mm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

あるいは、略記して次のように記述する。

$$[C_x] = [C_{ij}][C_{ij}]^T \quad (12)$$

このようにすることにより、相互に相関をもつ m 個の確率基本値 $Y_{j(RND)}$ は、相互に独立な確率基本値 $X_{j(RND)}$ を用いて次式で求められる。

$$Y_{i(RND)} = \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{j(RND)} = \sum_{j=1}^i C_{ij} X_{j(RND)} \quad (13)$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix} \quad (14)$$

となる。なお、いわゆる相関係数は $\rho_{ij} = \text{cov}[Y_i, Y_j]/\sigma_i \cdot \sigma_j$ で定義される。これ以降、すべての相関係数を同一 ($\rho_{ij} = \rho$) とし、この相関係数 ρ によって、鉄筋相互の相関性を一義的に表し、 $0 < \rho < 1$ の範囲で仮定する。

(3) i 段階 j 番目鉄筋の疲労寿命

i 段階の平均値 N^f_i に対する j 番目鉄筋の実現値 N^f_{ij} は、確率基本値を一次変数変換することによって次式で与えられる。

$$\log N^f_{ij} = (V_r \cdot Y_{j(RND)} + 1) \cdot \log N^f_i \quad (15)$$

ただし、 $\log N^f_{ij}$: Normal ($\log N^f_i, V_r \cdot \log N^f_i$)

ここで、 V_r は鉄筋の疲労寿命の変動係数を表し、 $V_r = (\log N^f_i)$ の標準偏差 / ($\log N^f_i$ の平均値) で定義される。(ただし、本論では、平均値 a 、標準偏差 σ なる正規分布を Normal (a, σ) のように表現している。) 従って、最終的には、次式のように与えられる。

$$N^f_{ij} = N^f_i^{(V_r \cdot Y_{j(RND)} + 1)} \quad (16)$$

これらをまとめたのが表-2 である。

5. 数値シミュレーションの実施

(1) シミュレーションの手順とパラメータ

以上までに記した数値計算の手順をフローチャートにまとめ、図-4 に示した。このような算定手順に従い、合計 10^5 回の数値シミュレーションを実施した。これは m 本の鉄筋のばらつきが異なる 10^5 回の RC 梁の疲労試験を行ったのと同等である。ここでは、 $Y_{j(RND)}$ を唯一の確率的な変動値とし、他のパラメータは全て確定値として扱っている。シミュレーションに用いた各種パラメータ

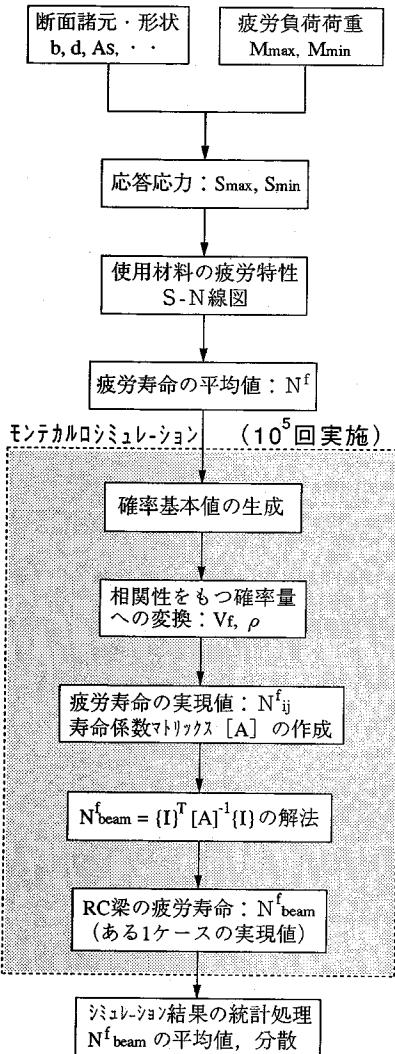


図-4 RC 梁の疲労寿命に関するモンテカルロシミュレーション

表-3 シミュレーションに用いた各種パラメータ

パラメータ	数値
M _{max}	最大曲げモーメント 13.75 tf-m
M _{min}	最小曲げモーメント 1.65 tf-m
ρ	相関係数 0, 0.5, 0.9999
V _r	変動係数 2, 4, 6, 8, 10 %
m	鉄筋本数 1, 2, 4, 8, 10 本
T	試行回数 10000 回

タを表-3 に示す。

なお、ここで仮定した RC 断面は鉄筋比 $\rho=0.63\%$ で圧縮鉄筋を無視したときの曲げ耐力は $M_u=21.7 \text{ tf-m}$ である。また、ばらつきを考えないとき（すべての疲労

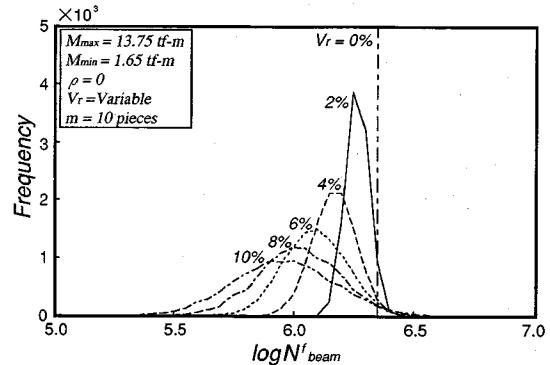


図-5 変動係数が RC 梁の疲労寿命に与える影響

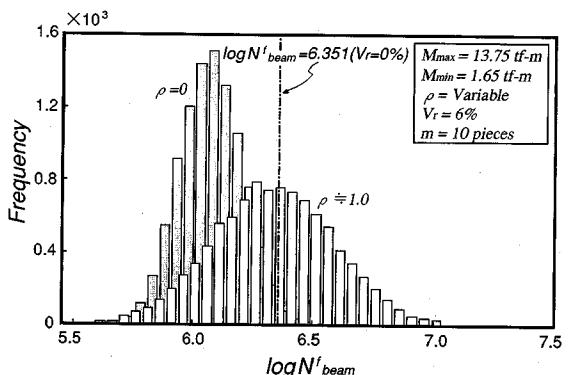


図-6 RC 梁の疲労寿命の分布形

寿命が同じ値をもつとき）の RC 梁の疲労寿命は、 $N^f_{beam}=2.24 \times 10^6 (\log N^f_{beam}=6.35)$ であり、これを確定値と呼ぶ。

(2) シミュレーション結果および考察

① 変動係数が RC 梁の疲労寿命に与える影響

式(1)のもとで、各変動係数に対する RC 梁の疲労寿命を求め、その度数分布を図-5 に示した（ただし、ここでは相関は考えていない）。ばらつきを考えた場合、シミュレーションによって得られた値の平均値は、先に示した確定値をすべて下回った。このことは、相関特性を導入したときにも同様のことが認められた。さらに、鉄筋単体の疲労寿命のばらつきの程度を表す変動係数 V_r を大きくしていくと、RC 梁の疲労寿命の平均値はより低下し、その変動係数は増加した（これは、また、配置される鉄筋本数にも依存し、⑤にて後述する。）。

② RC 梁の疲労寿命の分布形

RC 梁の疲労寿命の分布が正規分布するかどうかの検討をおこなった。図-6 は変動係数 6 %、相関係数 $\rho=0$ および $\rho=0.999$ における、RC 梁の疲労寿命 N^f_{beam} の 10^5 回に対する度数分布である。この分布に対して、正

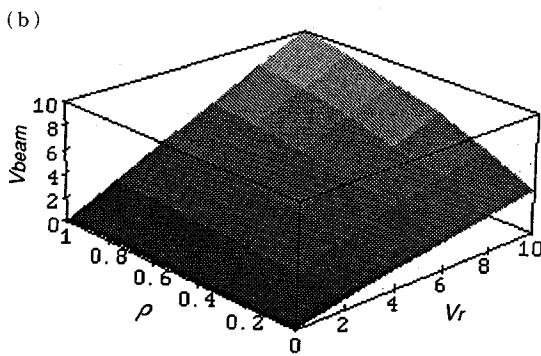
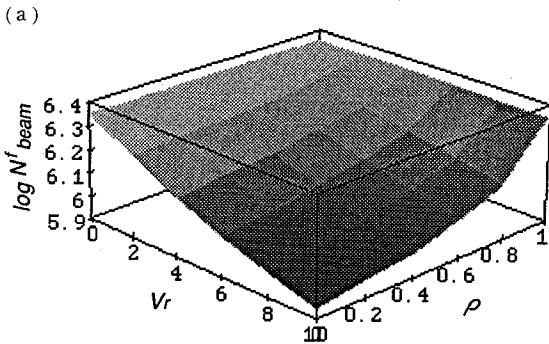


図-7 相関特性がRC梁の疲労寿命に与える影響
((a)平均値、(b)変動係数)

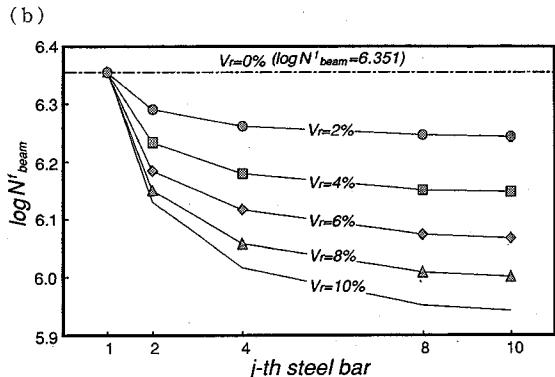
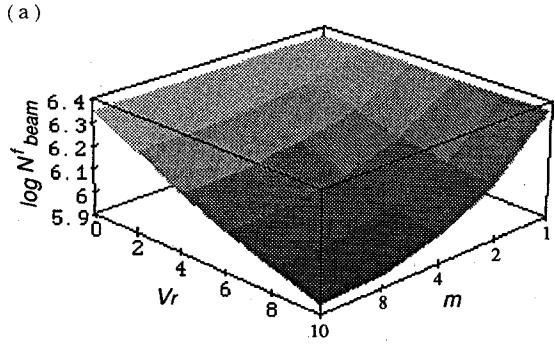


図-8 RC梁の疲労寿命に対する本数効果

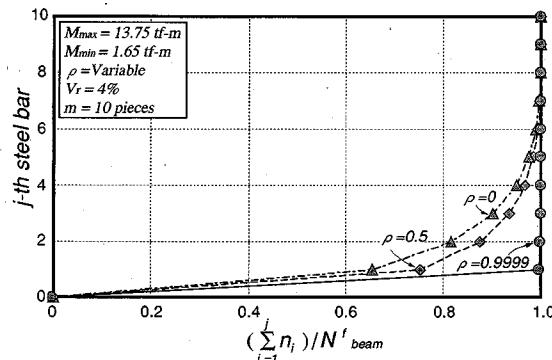


図-8 相関係数をパラメータとした連鎖崩壊の再現

規分布に関する χ^2 検定を行うと有意水準5%で仮定は棄却されず、分布は正規分布（ただし、対数軸上での）とみなすことができる。このことは、変動係数の値（0～10%）および相関係数の有無に関係なく、ほぼ同様のことが認められた。

③相関特性がRC梁の疲労寿命に与える影響

次に相関係数を考慮した場合を図-7に示す（ $m=10$ 本、 $V_r=6\%$ ）。このうち(a)は、相関係数—変動係数—RC梁の疲労寿命（平均値）の3者の関係を示したもので、同図より、RC梁の疲労寿命 N'_{beam} の平均値は、変

動係数 V_r の減少、相関係数 ρ の増加に伴って大きくなり、より確定値に近づくことがわかる。

さらに、図-7(b)は鉄筋単体の疲労寿命のばらつきがRC梁の疲労寿命のばらつきにどのような影響を与えるかを示したもので、縦軸にはRC梁の疲労寿命の変動係数 $V_{r,beam}$ を示している。これより、相関性の強いものほど、鉄筋単体のばらつきがそのままRC梁の疲労寿命のばらつきに反映しており、 $\rho=0.999$ のときは両者の変動係数は合致するのがわかる。鉄筋間の相関が強いということは、鉄筋どうしの性質が同じような値を持ちつつ、変動することを示すものである。すなわち、相関が大きい程、鉄筋単体の平均値、変動係数がRC梁のそれら（いわゆる確定値）に近づく。

以上、①、③のようなばらつきの特性は、単純な直列モデルや並列モデルでは表現し得ない累積損傷理論特有のものであり、本手法で定量的に明らかにされたと言える。

④連鎖崩壊の再現

図-8は変動係数4%における逐次破断の様子を示すものである。横軸は j 番目鉄筋の疲労寿命をRC梁の疲労寿命で除して無次元化した値である。その破壊の様子は相関係数が大きいほど最初の鉄筋が疲労破断すると、たちまちすべての残存鉄筋が破壊するといった連鎖崩壊

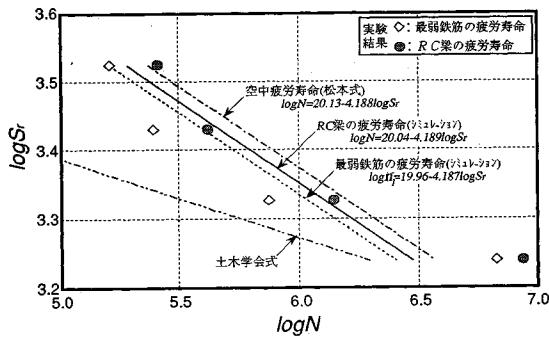


図-10 RC 梁の疲労寿命に関する実験結果との比較

型を呈するもので、鉄筋単体の変動係数と相関係数の両者が重要な要素となっていることがわかる。

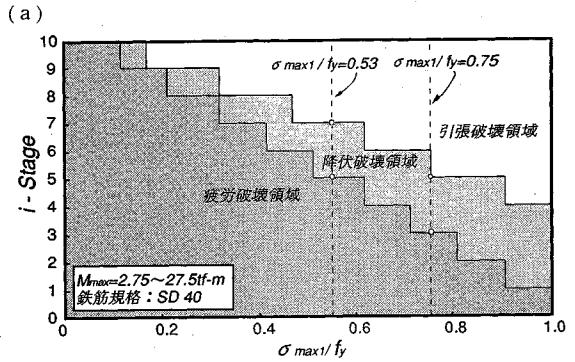
⑤ RC 梁の疲労寿命に対する本数効果

RC 梁中の鉄筋の本数を $m=10$ 本から、8 本、4 本、2 本、1 本と減らしたときの RC 梁の疲労寿命を図-9 に比較した。同図は、 $m=10$ 本のときの載荷荷重、RC 断面の大きさを 1 とし、鉄筋の本数が 8 本、4 本、2 本、1 本と減るにつれて、それぞれの大きさも 0.8, 0.4, 0.2, 0.1 と変化させて算出したものである。この図より、鉄筋の本数が 1 本のとき RC 梁の疲労寿命は一定値をとり、なおかつ確定値（変動係数 0 %）に合致し、変動係数および鉄筋本数の増大に伴い RC 梁の疲労寿命の平均値は低下するのがわかる。これは、疲労寿命に対する本数効果を示すもので、既になされた松本ら^{9,10)}や二羽ら⁵⁾の指摘を異なる手法で追認するものである。

また、本数の増加とともに疲労寿命は減少するものの、ある一定値に近づいていく。これは本数の増加によって、ばらつきが増加する程、最弱鉄筋の疲労寿命が低下するものの、本数が多いほど、鉄筋応力の再分配が緩やかになり、最弱鉄筋の破壊が RC 梁部材の破壊に直接結びつかないことを示唆している。

(3) 実験結果との比較

図-10 は、松本ら⁹⁾が行った RC 梁の疲労試験結果と本シミュレーション結果を比較したものである（計算条件について、引用文献の値をそのまま用いている）。図中では、各初期応力振幅に対して、最弱鉄筋の疲労寿命 (n_1)、RC 梁の疲労寿命（平均値）をプロットし、それぞれの回帰式を求めたもので文献 9) の図-11 で指摘された考察を再現したものである（ここでは、文献 9) より、空中疲労寿命の標準偏差 0.105 を採用している）。そして、実験結果と本手法を用いたシミュレーションから得られた回帰式を比較した場合、RC 梁の疲労寿命に対しては、ほぼ正確に推定するものの、最弱鉄筋の疲労寿命においては、その回帰式をかなり下回っている。これは、実際には、最弱鉄筋が破断してから RC 梁の疲労寿命



(a)

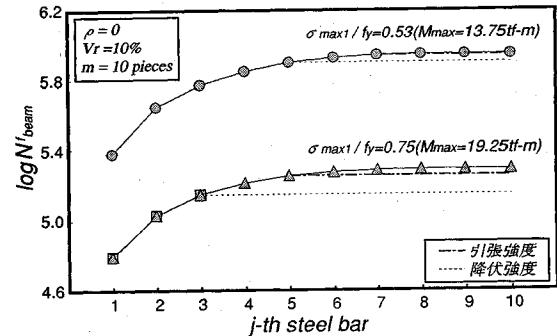


図-11 逐次破壊過程における、(a) 疲労破壊と降伏破壊との関係、(b) j 番目鉄筋の疲労寿命

に至るまでにはかなりの余命があることを示唆するものである。ただし、確率変数を含む構造部材に対して、数個の実験結果だけで比較するには無理があり、さらに多くの実験の蓄積と統計学的処理が必要と思われる。

6. 疲労破壊と降伏破壊の関係

本手法による RC 梁の疲労過程においては、全数が疲労破壊する前に残存鉄筋の応力が降伏点を越えることが考えられ（図-2）、疲労破壊と降伏破壊との関係を図-11(a) に示した。縦軸に i 段階（または疲労破壊本数）、横軸は鉄筋 10 本時（総数）の初期最大応力 $\sigma_{max,1}$ を降伏強度 f_y で除して無次元化したものである。降伏破壊は、残存鉄筋の最大応力が降伏点を、引張破壊は、引張強度を越えた時とした。図-11(b) は $\sigma_{max,1}/f_y = 0.53$ 、 $\sigma_{max,1}/f_y = 0.75$ 、変動係数 10% の場合の、 j 番目鉄筋疲労破壊時の繰返し回数の推移を示したものであり、点線は降伏破壊、一点鎖線は引張破壊を示している。降伏点を設定していない場合の j 番目鉄筋の疲労寿命は各変動係数に対して、おおむね半数の鉄筋が破壊するまで、変動係数の影響を受けてばらつくものの、それ以降においては、ほとんど余命が見られない。また $\sigma_{max,1}/f_y$ の比と変

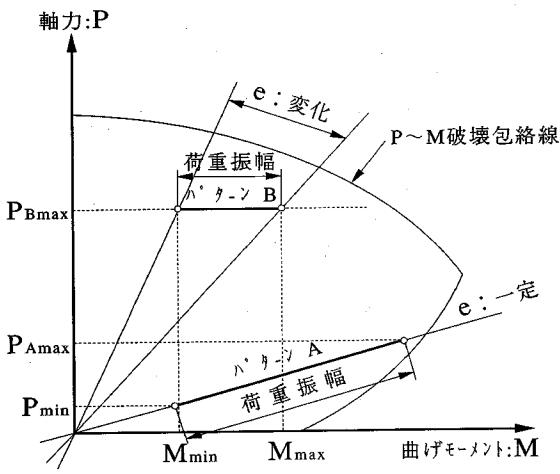


図-12 軸力+曲げ荷重下における疲労載荷パターン

動係数が大きくなるほど、早期に降伏破壊に達する。

これは、多数本の鉄筋が配置された場合、全ての鉄筋の疲労破壊以前に降伏破壊（または引張破壊）に至ることを示し、十分予想された結果である。しかし、ここで大切なことは、上限荷重による降伏破壊に至る時期が上限応力比、断面形状、鉄筋の本数、降伏強度によって異なるということである。そして、現行標準示方書¹⁴⁾では、終局限界と疲労限界が全く独立に定義されているが、既存構造物では、両者が相関する（正確に言えば、終局限界が疲労荷重の影響を受ける）ことがあり得る。例えば、第1本目の鉄筋（最弱鉄筋）の疲労破断を梁の疲労寿命とすること、関連する安全係数を割り増すことなどが対処策として考えられる。少なくとも、逐次疲労破壊により、いわゆる保有残存耐力が低下することは明らかであり、既存の経年構造物の耐久性評価にどのように反映させるかが今後の主要な問題である。

7. 軸力と曲げを受けたときの疲労寿命

(1) 軸力と曲げモーメントの相互作用図

次に、軸力を付加したときの疲労耐力を考える。これは、軸力 P と曲げモーメント M を受けたときの RC 柱の疲労性状を考察するもので、圧縮側コンクリート、引張鉄筋両者の疲労寿命を確率変数と考えるものである。

これは、図-12 のような、いわゆる破壊包絡線（終局限強度）の中で考えるとわかりやすい。ここでは、疲労寿命を考えるので、想定する定振幅の載荷荷重は、この破壊包絡線の中で定義されることになる。ただし、その繰返し載荷方法は、偏心量 $e = M/P$ を一定とするパターン A と軸力 P を一定とするパターン B（図-12）、またはそれらの組み合わせに大別される。（ただし、後述するシミュレーションでは、簡単のため下限応力 P_{min} =

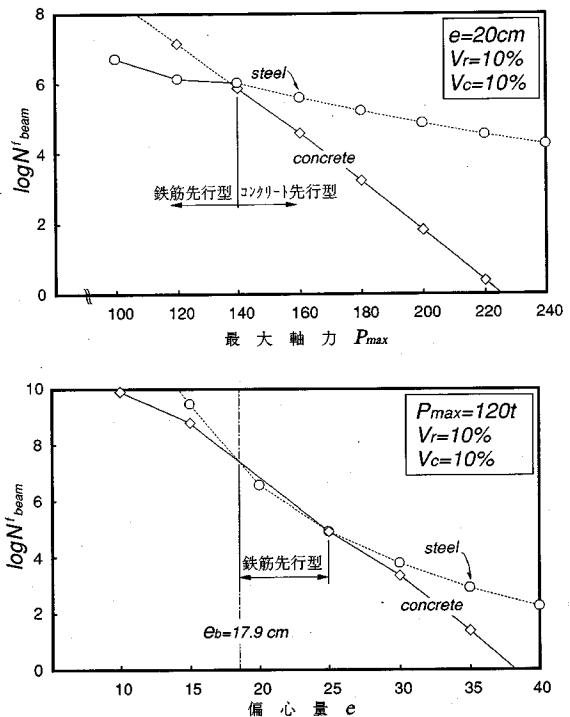


図-13 (a)最大軸力と疲労寿命の平均値との関係
(パターン A)
(b)偏心量と疲労寿命の平均値との関係
(パターン B)

$0 (M_{min}=0)$ としている。)

(2) シミュレーション結果¹⁶⁾

シミュレーションに際しては、鉄筋およびコンクリートの構成材料に対して、それぞれ線型被害則を適用し、相互に独立に疲労寿命を算出する。従って、鉄筋とコンクリート両材料の疲労寿命が確率変数となり、それぞれの変動係数を V_r, V_c とする。そして、鉄筋疲労破壊型については 3 節における式(9)をそのまま用い、コンクリート疲労破壊型については新たに、

$$M^c_i = \sum_{k=1}^i \left(\frac{n_k}{N^c_k} \right) \geq 1 \quad (17)$$

なる基準を設け、このときの繰返し回数の総数 N_c を求解するものである。ここで、 M^c_i は i 段階における圧縮縁コンクリートのマイナ一数であり、 N^c_k は k 段階における疲労寿命の平均値を示す。また、S-N 線図については土木学会示方書の疲労強度式を安全係数=1 としてそのまま用いた。

図-13 は、前節と同じ断面諸元を用い、モンテカルロシミュレーションを実行し、その結果を示したものである。（ちなみに、本例では釣合い偏心量は、 $e_b=17.9$ cm であり、このとき軸力 $P=366$ t、中心軸圧縮耐力 $P=$

1065 t である。)このうち、(a)は $e=20$ cm(パターン A)の疲労載荷に対する計算結果である。この場合、軸力 P の増加により、疲労寿命は低下するが、 $P=140$ t 近傍で破壊モードが変化していることがわかる。

同じく(b)は、 $P_{max}=120$ t のときのパターン B の載荷についての疲労寿命を示したものである。 $e=20\sim25$ cm 付近で両材料の疲労耐力はほぼ同一となるが(これは静的終局耐力の釣合い状態に相当), その他の偏心位置では、コンクリートの疲労破壊が先行する。これは、静的耐力の釣合偏心量 $e_b=17.9$ cm と大略合致するが、 $e > e_b$ なる領域で疲労耐力は必ずしも鉄筋先行型ではなく、静的耐力の破壊モードとは一致しないことがわかる。

以上の考察は限られたケースについて述べたものであるが、静的載荷における破壊性状と異なる場合があることがわかった。ただし、一般的な結論を得るにはさらに広範囲なシミュレーションを必要とし、別報で論じたい。

8. 結 論

本研究は、配置される鉄筋の疲労寿命がばらつきと相関性をもつときの RC 梁の疲労耐力を数値シミュレーションによって再現したものである。本文の結論を以下のように要約する。

(I) ばらつきをもつ引張鉄筋が複数本配置された場合、これらは繰返し荷重下において、逐次破断する。このときの破壊過程および疲労寿命を線型被害則を適用することにより定式化し、次のような結果を得た。

破壊過程: $\{n\} = [A]^{-1}\{I\}$

RC 梁の疲労寿命: $N_{beam}^f = \{I\}^T [A]^{-1}\{I\}$
すなわち、鉄筋単体の疲労寿命で形成されるマトリックス $[A]$ を定義することにより、直ちに線型代数学的に処理できる。

(II) さらに、モンテカルロシミュレーションを採用し、多くのパラメトリック・スタディを実行し、いくつかの有用な知見を得た。

単体鉄筋の疲労寿命が対数正規分布する場合、RC 梁部材の疲労寿命の分布も対数正規分布した。また、ばらつきが全くないときに比べて、単体鉄筋の疲労寿命の変動係数が大きい程、梁の疲労寿命の平均値は低下し、変動係数は増加した。このような傾向は配置される鉄筋本数が多い程著しく、いわゆる本数効果についても確認した。

さらに、鉄筋相互の相関特性を導入することにより、相関性が高い程、RC 梁の疲労寿命は平均値、変動係数とも鉄筋単体のそれらに近づくことがわかった。

(III) 本手法を 4 例の既往実験結果を比較した結果、RC 梁の疲労寿命(平均値)についてはよく一致したが、最弱鉄筋の疲労破断(1 本目の鉄筋破断)についてはや

や上回った。ただし、本来、ばらつきを内在する力学挙動を比較するものであるので、最終的な良否の判断については、さらに多くの実験データの蓄積および統計学的の考察が必要である。

(IV) さらに軸力を付加し、軸力+曲げ荷重下における RC 部材の疲労寿命についてのシミュレーションを実行した。この場合は、圧縮コンクリートの疲労破壊と引張鉄筋の疲労破壊の 2 つの破壊モードが存在する。しかし、疲労破壊での破壊モードが、静的耐力の破壊モードと必ずしも一致しないことが数例の数値シミュレーションから認められた。

(V) 初期疲労破断(最弱鉄筋の破断)後に余寿命を呈する、いわゆるシステムとしての冗長性(redundancy)を確認したが、一方では保有終局耐力が低下することがわかった。これは、多数本の鉄筋をもつ RC 部材に対して、疲労寿命(疲労限界)についての冗長性を認める場合、終局耐力(終局限界)の低下に配慮する必要があることを示唆するものである。

謝辞: 本研究は、文献^{9,10)}の著者である松本氏(鉄道総合技術研究所)とのディスカッションによるところが大きく、また、信頼性理論の適用に際しては、武藏工業大学星谷教授にご教示を受けた。併せて謝辞を申し上げます。

Appendix I

中立軸の位置 $x=kd$

コンクリートの応力

$$\sigma_c' = \frac{M}{bd_1^2} \cdot \frac{1}{\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right) + \frac{np_2}{k}\left(k-\frac{d_2}{d_1}\right)\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

$$\text{引張鉄筋の応力 } \sigma_s = n\left(\frac{1-k}{k}\right)\sigma_c'$$

ただし、

$$\text{鉄筋比(引張)} \quad p_1 = \frac{A_{s1}}{bd_1}$$

$$\text{鉄筋比(圧縮)} \quad p_2 = \frac{A_{s2}}{bd_2}$$

中立軸比

$$k = -n(p_1 + p_2) + \sqrt{2n\left(p_1 + p_2\frac{d_2}{d_1} + n^2(p_1 + p_2)^2\right)}$$

Appendix II : 主要記号

m : 鉄筋本数

i : 現段階 ($i-1$ 本の鉄筋が破断している状態, $i=1\sim m$)

j : 鉄筋を最弱順にならべたときの鉄筋番号 ($j=1\sim m$)

$S_{r,i}$: i 段階における応力振幅

- n_i : i 段階における繰返し回数
 N'_{ij} : i 段階における鉄筋の平均疲労寿命
 N'_{ij} : i 段階, j 番目鉄筋の疲労寿命
 $(S_{r,i})$ に対する j 番目鉄筋の疲労寿命)
 $[A]$: N'_{ij} で記述される $m \times m$ マトリックス
 N'_{beam} : RC 梁としての疲労寿命
 M_{ij} : i 段階, j 番目鉄筋の累積損傷量 (マイナーナンバー)
 ΔM_{ij} : i 段階における j 番目鉄筋の累積損傷の増加量
 N^c_i : i 段階におけるコンクリートの平均疲労寿命
 M^c_i : i 段階におけるコンクリートの累積損傷量
 V_r : 鉄筋の変動係数
 V_{beam} : RC 梁の疲労寿命の変動係数
 $X_{j(RND)}$: 相互に独立な標準正規乱数 (m 個のサンプル値)
 $Y_{j(RND)}$: 相互に相関を持つ標準正規乱数 (m 個のサンプル値)
 ρ : 相関係数 (0~1)
 $\text{Normal}(\mu, \sigma)$: 平均値 μ , 標準偏差 σ の正規分布

参考文献

- 1) 土木学会：コンクリート構造の限界状態設計法指針(案)「7. 疲労」、コンクリート・ライブラリー、第52号、pp. 285-300、1983。
- 2) 例えば、Hanson, J. M., M.F. Somes and T. Helgason : Investigation of Design Factors Affecting Fatigue Strength of Reinforcing Bars, *ACI SP-41*, pp.71-107, 1974.
- 3) 例えば、藤岡靖、平城弘一、大谷恭弘、鬼頭宏明：異形鉄筋の疲労試験データの統計的処理、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、第5部、pp.730-731、1993。
- 4) 二羽淳一郎、前田詔一、岡村甫：異形鉄筋の疲労強度算定式、土木学会論文集、第354号/V-2、pp.73-79、1985。

- 2.
- 5) 二羽淳一郎、榎本松司、岡村甫：複数本の溶接鉄筋を用いたRCはりの疲労強度の推定方法、コンクリート工学論文、No. 85.5-1, コンクリート工学 Vol. 23, No. 5, pp. 75-81, 1985.5.
- 6) 例えば、Grant, L.H., Mirza and MacGregor: Monte Carlo Study of Strength of Concrete Columns, *ACI Journal*, pp.348-358, 1978.8.
- 7) 例えば、高岡宣善、白木渡：確率過程論による複鉄筋コンクリートばかりの信頼性解析、鳥取大学工学部研究報告、第10巻、pp.153-166、1979。
- 8) 宮本征夫、石橋忠良、林淳：多本数の鉄筋を用いた鉄筋コンクリート梁の疲労破壊に関する研究、コンクリート工学年次論文報告集、9-2, pp.639-644, 1987.
- 9) 松本信之、山住克巳、宮本征夫：多本数の引張鉄筋を有するコンクリート梁の疲労寿命、鉄道総研報告、Vol. 4, No. 7, pp.22-29, 1990.
- 10) 松本信之、山住克巳、宮本征夫：多本数の引張鉄筋を配置したRC梁の疲労寿命、コンクリート工学年次論文報告集、13-2, pp.321-326, 1991.
- 11) K. Sobczyk, B.F. Spencer, Jr: RANDOM FATIGUE, Academic Press, pp.9-19, 1992.
- 12) 星谷勝、石井清：構造物の信頼性設計法、鹿島出版会、1986。
- 13) 伊東学、亀田弘行：土木・建築のための確率・統計の基礎、丸善、1977。
- 14) 土木学会：コンクリート標準示方書【平成3年制定】設計編、1991。
- 15) 吉川弘道、大井祥之：曲げを受ける鉄筋コンクリート梁の疲労寿命に関する信頼性解析、コンクリート工学年次論文報告集、14-2, pp.285-290, 1992。
- 16) 吉川弘道、大井祥之：曲げと軸力を受ける鉄筋コンクリート梁の疲労寿命に関する信頼性解析、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、第5部、pp.740-741、1993。

(1993.12.27 受付)

STOCHASTIC ANALYSIS OF FATIGUE LIVES OF REINFORCED CONCRETE SUBJECTED TO CYCLIC BENDING MOMENT

Hiromichi YOSHIKAWA and Yoshiyuki OI

Although fatigue strength is one of the important limit states for the design of concrete structures, fatigue lives of reinforcing bars and concrete exhibit wide variations. The present research deals with the fatigue lives of reinforced concrete beams subjected to bending moment, when fatigue lives of reinforcement is supposed to be a random variable. The fatigue strength of reinforced concrete beams under the repeated bending moment, steel bars with different fatigue being arranged, is formulated based upon the Miner's rule. Then, the Monte-Carlo technique for random simulation is employed to investigate the effect of variation and correlation of fatigue lives of reinforcing bars on the fatigue lives of reinforced concrete beams. The characteristics of fatigue behavior of reinforced concrete beams containing multiple reinforcement are discussed.