

衝撃帯載荷による半無限体の遷移応答と地盤-基礎系の動的相互作用の波動論的考察

竹宮宏和¹・堀内 深²

¹正会員 工博 岡山大学教授 環境理工学部環境デザイン工学科 (〒700 岡山県岡山市津島中3)
²岡山大学大学院生

本論文は、衝撃帯載荷下の半無限弾性体の厳密遷移解に対して、波速積分を含まない表現の精度の良い近似解析式を与えたものである。ここでは、線載荷解がレーリ波の到達以外で解析表現ができること、また帯載荷解がそのとき有限値の解析表現をとることができる利点を合わせたものである。同グリーン関数の応用例として、近傍において衝撃を受けたときの地盤-構造物系の動的相互作用応答を構造物の質量をパラメータにとって波動伝播の観点から考察している。

Key Words: *Lamb's problem, impulse response, approximate closed form solution, wave propagation, soil-structure interaction, BEM*

1. まえがき

著者らは^{1)~4)}、地盤と構造物系の応答制御に関して動的相互作用場の波動論的考察の必要性を述べ、前論文³⁾では半無限体/層状地盤の衝撃応答性状について調べた。同問題の解析上の本質はLamb問題と呼ばれるものであり、Lamb (1904)⁵⁾は、半無限弾性体の表面調和振動載荷と共に、衝撃載荷に対してもフーリエ級数展開を利用して媒体の波動伝播の様相を究明しようとした。以後、同類の問題は多くの研究者の研究テーマとなった、著者らは⁶⁾、最近、2次元問題において帯状衝撃載荷に対する精度の高い解を得る積分変換法を提案した。しかし、解の表現は、P波、S波の伝播に関して波速積分を含むため数値積分を要した。

本論文では、上記の波速積分を含まない形の近似解をLambの手法に従って求めると共に、レーリ波の伝播に関する著者らの解析解を併用する。これをグリーン関数として混合境界値問題を境界要素法から解くことが容易となる。さらに入射問題に対する動的相互作用解析では、2段階解析法を経て載荷問題へと変換できることを示している。そしてLamb問題解の応用例として、地表面への衝撃載荷による周辺構造物の応答解析から動的相互作用現象の波動論的考察を試みている。

2. 衝撃帯載荷による半無限一様弾性体のグリーン関数

等方、均質な半無限弾性地盤（密度 ρ 、弾性定数 E 、ポアソン比 ν ）上に、時間変動が $\delta(t)$ -型の帯状載荷をしたときの時刻歴応答は、Takemiya and Guan の研究によって一部波数積分を含む表現で与えられる⁶⁾。特に、一様な帯状載荷による水平距離 x の位置の表面応答は、以下の式で表される¹⁾。

$$u_{xx}(x, 0, t) = \frac{(1-d^2)d}{2\pi\mu K(C_R)} \chi_1(x, t, C_R) - \frac{2}{\pi^2\mu} \int_B^\alpha \frac{(1+b^2)b(1-b^2)^2}{(1-b^2)^4 + 16\bar{a}^2 b^2} \chi_1(x, t, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi^2\mu} \int_\alpha^\infty \frac{(1+b^2)b}{(1-b^2)^2 + 4ab} \chi_1(x, t, \eta) d\eta \quad (1a)$$

$$u_{zx}(x, 0, t) = \frac{(1+d^2)(1-d^2)}{4\pi\mu K(C_R)} \chi_2(x, t, C_R) - \frac{4}{\pi^2\mu} \int_B^\alpha \frac{(1+b^2)\bar{a}b(1-b^2)}{(1-b^2)^4 + 16\bar{a}^2 b^2} \chi_2(x, t, \eta) d\eta \quad (1b)$$

$$u_{zz}(x, 0, t) = -u_{zz}(x, 0, t) \quad (1c)$$

$$u_{zz}(x, 0, t) = \frac{(1-d^2)c}{2\pi\mu K(C_R)} \chi_1(x, t, C_R) - \frac{8}{\pi^2\mu} \int_B^\alpha \frac{(1+b^2)\bar{a}^2 b}{(1-b^2)^4 + 16\bar{a}^2 b^2} \chi_1(x, t, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi^2\mu} \int_\alpha^\infty \frac{(1+b^2)a}{(1-b^2)^2 + 4ab} \chi_1(x, t, \eta) d\eta \quad (1d)$$

ここで、 α , β , C_R はそれぞれ P 波, S 波および表面波であるレーリ波の伝播速度を表す。そして

$$\bar{a} = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\alpha^2}}, \quad a = \sqrt{\frac{\eta^2}{\alpha^2} - 1}, \quad b = \sqrt{\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1}$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{\alpha^2}}, \quad d = \sqrt{1 - \frac{C_R^2}{\beta^2}}$$

$$K(C_R) = C_R \left[\frac{1}{\beta^2} (1 + d^2) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d}{c} - \frac{1}{\beta^2} \frac{c}{d} \right]$$

関数 $\chi_l(x, t, \eta)$ ($l=1, 2$) は、載荷力の空間的分布と、作用方向に関係している。中心が原点に位置した、強度 q の水平と鉛直の一樣な衝撃分布載荷 (幅 $2w$) の場合、 χ_1 は次のように表される。

$$\begin{aligned} \chi_1(x, t, \eta) &= q \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\xi) \frac{\sin w\xi}{w\xi} \sin \xi \eta t e^{-i\xi x} d\xi \\ &= \frac{q}{2} \left(\ln \left| \frac{\eta t + x + w}{\eta t - x - w} \right| + \ln \left| \frac{\eta t - x + w}{\eta t + x - w} \right| \right) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(x, t, \eta) &= q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w\xi}{w\xi} \sin \xi \eta t e^{-i\xi x} d\xi \\ &= q \text{sgn}(x) \begin{cases} 0; & |x| - w > \eta t \text{ and } \eta t > |x| + w \\ \frac{1}{4}; & |x| - w = \eta t \text{ and } \eta t = |x| + w \\ \frac{1}{2}; & |x| - w < \eta t < |x| + w \end{cases} \end{aligned} \quad (2b)$$

式 (2a) をみると明らかなように、レーリ波面において対数特異点が存在する。これは時間積分を通して容易に除去される。そしてレーリ波による貢献は第一項が相当している。さらに P, S 波の貢献は波速積分によることが判かる。

載荷強度を $q=1/2w$ として $w \rightarrow 0$ とすると、単位の線状衝撃載荷に相当する。このとき、上記の χ_1 , χ_2 関数は

$$\chi_1(x, t, \eta) = i\pi \{ \delta(\eta t + x) + \delta(\eta t - x) \} \quad (3a)$$

$$\chi_2(x, t, \eta) = i\pi \{ \delta(\eta t - x) - \delta(\eta t + x) \} \quad (3b)$$

となり、対応する遷移応答は Lamb の解に基づいて Eringen and Suhubi が与えているもの (付録) に帰着される。記号 $\delta(\)$ はデルタ関数を意味する。

Lamb が示した手法はまず調和振動解を誘導し、そのフーリエ逆変換から時間応答を評価するが、応答の合積分はレーリ波の到達する近傍の時刻を除いては衝撃関数 $Q(t)$ の特徴を利用して容易に求められる。

3. 半無限一樣弾性体の Green 関数の近似的表現

載荷状態として、理想的な線状載荷は現実にはあり得ず、带状載荷の方がより物理的な意義がある。しかも後者はレーリ波面での特異性を含まず、使用に際して安定した解を与える。しかし、線状載荷解が解析式で表現さ

れるのに対して、带状載荷解は式 (1) に見られるように波速に関する積分表現となっている。この数値積分には時間を要することから、ここでは上記の Green 関数を積分を含まない形で近似することを考える。いま、 $w/x \ll 1$ の時、応答への載荷幅の影響は無視できるようになり線載荷の状態に近づく。そこでレーリ波の到達時刻において応答の発散を防ぐため $t_s < t < t_R + (t_R - t_s)$ では、上記の带状載荷の Green 関数の第一項を使用した。また、 $t > t_R + (t_R - t_s)$ における u_{xx} , u_{zz} にも同様のものを使用した。したがって

1) $t_p < t < t_s$ のとき

$$u_{xx} = \frac{\bar{Q}}{\pi\mu\beta^2|x|} U_x(\gamma) \quad (4a)$$

$$u_{zz} = \text{sgn}(x) \left[\frac{2\bar{Q}}{\pi\eta\beta^2|x|} V_x(\gamma) + \bar{Q}K\delta\left(t - \frac{|x|}{C_R}\right) \right] \quad (4b)$$

$$u_{xz} = -u_{zx} \quad (4c)$$

$$u_{zz} = \frac{\bar{Q}}{\pi\mu\beta^2|x|} V_z(\gamma) \quad (4d)$$

2) $t_s < t < t_R + (t_R - t_s)$ のとき

$$u_{xx} = \frac{(1-d^2)d}{2\pi\mu K(C_R)} \chi_1(x, t, C_R) \quad (5a)$$

$$u_{zz} = \frac{(1+d^2)(1-d^2)}{4\pi\mu K(C_R)} \chi_2(x, t, C_R) \quad (5b)$$

$$u_{xz} = -u_{zx} \quad (5c)$$

$$u_{zz} = \frac{(1-d^2)c}{2\pi\mu K(C_R)} \chi_1(x, t, C_R) \quad (5d)$$

3) $t > t_R + (t_R - t_s)$ のとき

$$u_{xx} = \frac{\bar{Q}}{\pi\mu\beta^2|x|} U_x(\gamma) \quad (6a)$$

$$u_{zz} = \frac{(1+d^2)(1-d^2)}{4\pi\mu K(C_R)} \chi_2(x, t, C_R) \quad (6b)$$

$$u_{xz} = -u_{zx} \quad (6c)$$

$$u_{zz} = \frac{\bar{Q}}{\pi\mu\beta^2|x|} V_z(\gamma) \quad (6d)$$

ただし、 $\gamma = t/x$, $K(C_R) = \frac{(2-C_R^2/\beta^2)C_R^4}{4\mu\beta^2 K(C_R)}$, t_p : P 波到達時刻, t_s : S 波到達時刻, t_R : レーリ波到達時刻である。 $\bar{Q} = \int Q(t) dt$ は衝撃の力積を表す。 $U_x(\gamma)$, $V_x(\gamma)$, $V_z(\gamma)$ の詳細は付録に示す。

また別解としてレーリ波の応答に関して、Lamb は $\delta(t)$ 一型の線載荷に対して発生するレーリ波の応答を次の有理関数で近似した。

$$\chi_1(x, t, \eta) = \bar{\chi}_1 = \frac{Q\varepsilon}{\tau^2 + \varepsilon^2}, \quad \chi_2(x, t, \eta) = \bar{\chi}_2 = \frac{Q\tau}{\tau^2 + \varepsilon^2} \quad (7a), (7b)$$

ただし $\tau = t - x/C_R$, ε は応答の時間変動の鋭さを規定するパラメータである。式 (7a), 式 (7b) は式 (5a),

(5b) の χ_1, χ_2 関数より使用上簡便であるので、本研究では帯状載荷に基づいて応答の最大値を一定とすることから

$$\chi_1(x, t, \eta) = \hat{\chi}_1 = \frac{Q\varepsilon^2}{\tau^2 + \varepsilon^2}, \quad \chi_2(x, t, \eta) = \hat{\chi}_2 = \frac{Q\tau\varepsilon}{\tau^2 + \varepsilon^2} \quad (8b), (8b)$$

として近似式を与える (Fig.2 の Approximate 2). として $\varepsilon = 2w/C_R$ は厳密解と近似解との比較から決定することができる。したがってレーリ波の貢献は

$$\begin{bmatrix} u_{xz}^R(t) & u_{zz}^R(t) \\ u_{xz}^R(t) & u_{zz}^R(t) \end{bmatrix} = -\frac{C_R^2/\beta^2}{4\pi\mu K(C_R)} \begin{bmatrix} 2\sqrt{1-C_R^2/\beta^2} \frac{\varepsilon^2}{\tau^2 + \varepsilon^2} \bar{Q} & (2-C_R^2/\beta^2) \frac{\varepsilon\tau}{\tau^2 + \varepsilon^2} \bar{Q} \\ (2-C_R^2/\beta^2) \frac{\varepsilon\tau}{\tau^2 + \varepsilon^2} \bar{Q} & 2\sqrt{1-C_R^2/\alpha^2} \frac{\varepsilon^2}{\tau^2 + \varepsilon^2} \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (9)$$

4. 地盤と構造物の動的相互作用場

(1) 時間領域 BEM 手法による厳密解

半無限地盤上に剛な表面基礎を想定し、その近傍において衝撃載荷を行った場合の応答を境界要素法から求める。ここでは半無限平面のグリーン関数を使用していることから、支配方程式は地表面に関する添字を S 、剛体とのインターフェイスに関する添字を R とすると、時刻 $t_m = m\Delta t$ 後の各要素の変位は、時間に関する合積分の離散化で表され

$$\begin{bmatrix} u_R \\ u_S \end{bmatrix}^m = \sum_{i=0}^m \begin{bmatrix} G_{RR} & G_{RS} \\ G_{SR} & G_{SS} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} T_R \\ P_S \end{bmatrix}^{m-i} \quad (10)$$

いま、基礎に関する要素を取り出すと、

$$u_R^m = \sum_{i=0}^m [G_{RR} \ G_{RS}]^i \begin{bmatrix} T_R \\ P_S \end{bmatrix}^{m-i} = G_{RR}^0 T_R^m + \sum_{i=1}^m G_{RR}^i T_R^{m-i} + \sum_{i=0}^m G_{RS}^i P_S^{m-i} \quad (11)$$

これよりインターフェイス上の未知表面力は

$$T_R^m = [G_{RR}^0]^{-1} \cdot \left\{ u_R^m - \left(\sum_{i=1}^m G_{RR}^i T_R^{m-i} + \sum_{i=0}^m G_{RS}^i P_S^{m-i} \right) \right\} \quad (12)$$

基礎の力のつりあいを考えると

$$-M\Delta^m = DT^m \quad (13)$$

ここに $\{\Delta\}$: 剛体構造物の変位を求めるに当たって、 $\{M\}$: 剛体構造物の質量である。

したがって式 (13) を式 (12) 代入し、剛体変位の適合条件 D を導入して

$$u_R^m = D^T \Delta^m \quad (14)$$

を考慮すると、式 (13) は

$$M\Delta^m + K^0 \Delta^m = D [G_{RR}^0]^{-1}$$

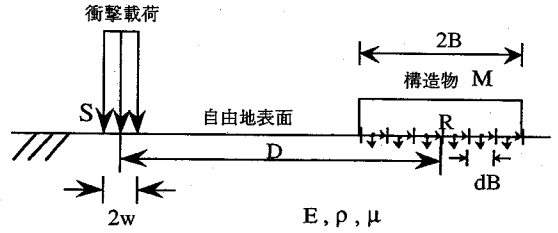


Fig.1 Soil-Structure system under impuse loading

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^m G_{RR}^i T_R^{m-i} + \sum_{i=0}^m G_{RS}^i P_S^{m-i} \right) \quad (15)$$

ここで、 $K^0 = D [G_{RR}^0]^{-1} D^T$ を定義する。

地表面の応答は、既知量となった表面力より得られ、

$$u_S^m = \sum_{i=0}^m [G_{SR} \ G_{SS}]^i \begin{bmatrix} T_R \\ P_S \end{bmatrix}^{m-i} \quad (16)$$

(2) 載荷問題から入射問題への変換

地表面への載荷点が構造物からある程度離れている場合、載荷点も含めて解析対象とするよりも、まず載荷力による自然地盤応答を評価し、さらにその結果を地盤と構造物のインターフェイスに入射する2段階解析法を用いた方が計算容量及び時間上有利である。つまり載荷問題から入射問題への変換を行う。自然地盤応答を u^m 剛基礎の表面力による応答を u^{im} とすると、インターフェイスの各要素の応答 u_R^m は、

$$u_R^m = u^{im} + u^m = (G_{RR}^0 T_R^m + \sum_{j=1}^m (G_{RR}^j T_R^{m-j})) + u^m \quad (17)$$

$$T_R^k = [G_{RR}^0]^{-1} \left\{ u_R^m - \sum_{j=1}^m (G_{RR}^j T_R^{m-j}) - u^m \right\} \quad (18)$$

となり、剛体基礎での力のつりあいを考えると、

$$M\Delta^m + K^0 \Delta^m = D \left\{ \sum_{i=1}^m G_{RR}^i T_R^{m-i} + u^m \right\} \quad (19)$$

5. 数値解析例と考察

Lamb 問題の帯状載荷で $w/D = 1/100$ を想定したときの式 (1) の厳密解と式 (2), (8) を使用した式 (4) ~ (6) の近似解である Approximate 1, 2 の比較を Fig.2 に示す。ここで近似解 (8) において $\varepsilon = 4.47 \times 10^{-4}$ を採用している。両者の解の対応は非常によい。

つぎに、Lamb 解の応用として、Fig.1 に示した地盤-構造物系の解析結果を示す。応答は無次元時間に対する無次元量で表わし、質量比 $r = M/\rho B^2$ をパラメータにして描いた。 $r = 0$ はキネマチックな相互作用のみをもち、 $r = 1.25, 10$ の下での慣性力による相互作用効果

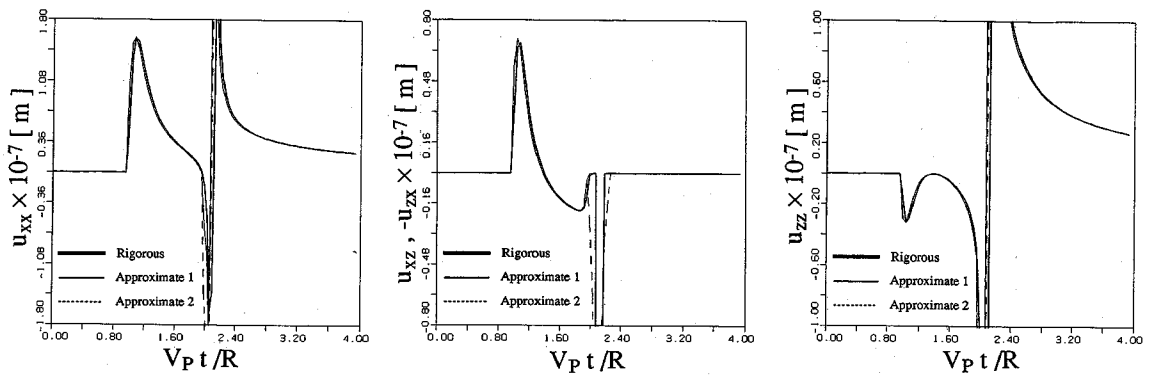


Fig.2 Lamb's Solution, Comparison among rigorous and approximate solutions, $w/D=1/100$, $\varepsilon=4.47 \times 10^{-4}$

を調べた。水平応答成分では、衝撃力によって発生した波には主にP波とレリー波として伝播し構造物に応答を与えている。これは Fig.2 の水平応答値がP波、レリー波到達時刻で卓越していることより判る。有質量基礎の場合は相互作用系としての固有周期を有し、 r 値が大きくなると慣性相互作用が支配的となる。無質量基礎との応答差は慣性力効果によるものである。鉛直応答成分では、S波とレリー波の伝播が卓越している。これは Fig.2 の鉛直応答値がS波、レリー波の到達時刻で卓越していることより判る。質量効果の周期性は僅かに見られる程度で大きな減衰性を伴っている。これは地盤の逸散エネルギーがこの振動形態では大きいことを意味している。回転応答成分では、レリー波の効果が支配的である。

6. むずび

本文では著者らが以前、帯状载荷に対して Lamb 問題の厳密解を導いたが⁶⁾、それへの精度の良い近似解の解析的表現を与えることができた。応用例として、地盤-構造系の相互作用応答においてキネマチックな成分と慣性力による貢献度を波動の伝播性から明確に捉えることができることを示した。

付録

1) $\gamma_P < \gamma < \gamma_S$ において

$$U_x(\gamma) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_S^2}}{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^2 - 4\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2} \sqrt{\gamma^2 - \gamma_S^2}}$$

$$V_x(\gamma) = -\frac{|\gamma| (2\gamma^2 - \gamma_S^2) \sqrt{\gamma^2 - \gamma_S^2} \sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2}}{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^4 + 16\gamma^4 (\gamma^2 - \gamma_P^2) (\gamma_S^2 - \gamma^2)}$$

$$V_z(\gamma) = \frac{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^2 \sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2}}{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^4 + 16\gamma^4 (\gamma^2 - \gamma_P^2) (\gamma_S^2 - \gamma^2)}$$

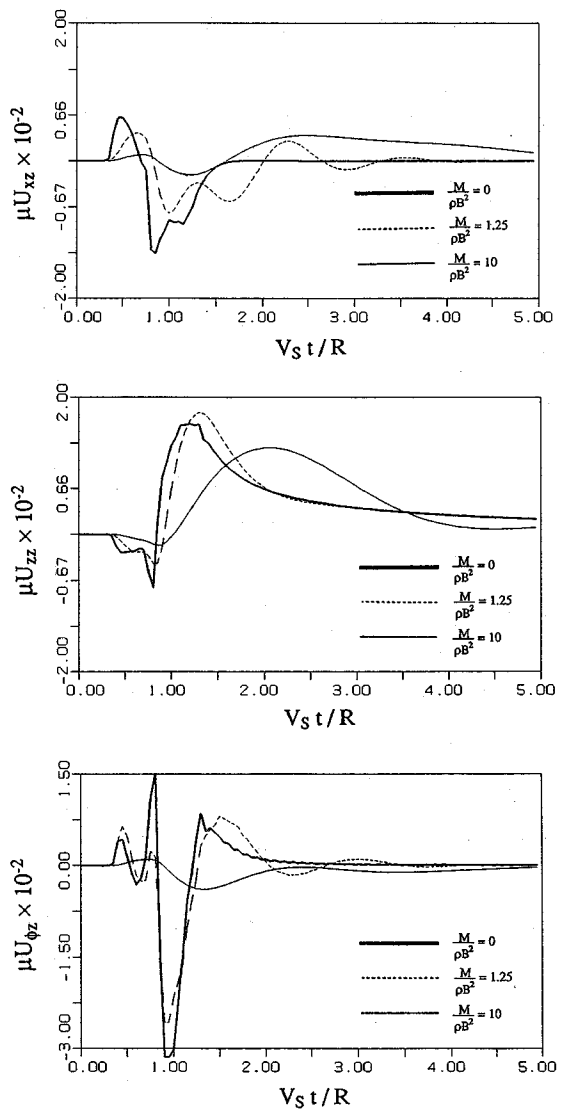


Fig.3 Response of a rigid foundation due to impuse load nearby, $D/B=40$, $D/B=4$

2) $\gamma > \gamma_R + (\gamma_R - \gamma_S)$ において

$$U_x(\gamma) = -\frac{4\gamma^2(\frac{\gamma}{\beta} - \gamma^2)^2 \sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2}}{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^4 + 16\gamma^4(\gamma^2 - \gamma_P^2)(\gamma_S^2 - \gamma^2)}$$

$$V_z(\gamma) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2}}{(2\gamma^2 - \gamma_S^2)^2 - 4\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - \gamma_P^2} \sqrt{\gamma^2 - \gamma_S^2}}$$

ここで, $\gamma = t/x$, $\gamma_P = 1/\alpha$, $\gamma_S = 1/\beta$, $\gamma_R = 1/C_R$

参考文献

- 1) Takemiya, H. Guan, F. and Sukeyasu, Y. : 2-D Transient Soil-Surface Foundation Interaction and Wave Propagation by Time Domain BEM, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.23. pp.931-945, 1994.
- 2) 竹宮, 藤原: 地盤-構造物系の制振法としての波動遮断ブロック (WIB) の導入, 土木学会論文集, No. 489/I-27, pp. 243-250, 1994.
- 3) 竹宮, 祐保: 分布帯状載荷に対する全無限弾性体の遷移グリーン関数評価と半無限/層状地盤の表面載荷による波動伝播性状, 土木学会論文集, No.483/I-26, pp. 147-155, 1994.
- 4) 竹宮, 祐保: 直接時間領域 BEM による地盤と構造物の動的相互作用場の波動論的考察, 土木学会論文集, No. 525/I-33, pp. 237-245, 1995. 10.
- 5) Lamb, H. : On the propagation of tremors on the surface of an elastic solid, *Philos. Trans. Royal Soc, London Ser. A* 203, 1-42, 1904.
- 6) Takemiya, H. and Guan, F. : Transient Lamb's Solution for Surface Strip Impulsas, Vol.119, No.EM 12, ASCE, pp.2385-2403, 1993.
- 7) A. Cemal Gringen and Erdogan S. Suhubi : *Dlastodynamics II, LINEAR THEORY*, Prentice-Hall, 1975. (1994. 6. 20 受付)

AN APPROXIMATION TO STRIP IMPULSE RESPONSE OF A HALFSPACE AND INTERPRETATION OF DSSI FROM WAVE SCATTERING/PROPAGATION

Hirokazu TAKEMIYA and Shin HORIUCHI

This paper presents a simple but useful approximation to the entire transient response of a uniform halfspace due to surface impulse loading by taking an advantage of finite response at the Rayleigh wave arrival for strip loads in comparison to the infinite value for line loads for which otherwise explicit expressions are available.

Implementation of the proposed expression to the time domain BEM formulation is performed in order solve a dynamic soil structure interaction (DSSI) problem. Example studies made clear the wave scattering/propagataion across under a structure with the mass as a parameter.