

周波数領域の同定問題におけるモデル パラメータ誤差, 観測ノイズの影響

栗田哲史¹・松井邦人²

¹正会員 工修 東電設計(株)技術開発本部 耐震技術部 (〒110 東京都台東区東上野 3-3-3)

²正会員 Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

本研究は、周波数領域の同定問題におけるモデルパラメータの誤差、及び観測ノイズの同定結果に及ぼす影響を、同定パラメータの誤差に対する感度という形で評価する手法を示すものである。また、周波数領域の同定問題で用いられる評価関数の定式化において、伝達関数の振幅をそのまま使用する場合と、振幅の自然対数を使用する場合の2種類に対して誤差の感度を求め、その比較を行っている。簡単なモデルを用いた数値実験により理論の検証を行った結果、感度から推定した誤差の同定結果への影響は実際に誤差を与えて同定を行った結果と良く一致し、本報で示した理論の妥当性が示された。

Key Words : frequency domain identification, sensitivity, model parameter error, measurement noise, evaluation function

1. はじめに

地盤の鉛直アレイ観測の充実、また各種構造物への加速度計設置が進み、それらの実地震観測データを用いて、地盤構造あるいは構造パラメータの同定が試みられている^{1)~3)}。同定結果は構造物の診断指標、シミュレーション解析のための入力パラメータ、情報化施工のためのデータ等様々に利用されている。このように一般化しつつある動的な同定問題はデータの取扱方法により時間領域^{3), 4)}と周波数領域^{5), 6)}の2種類に分類することができる。同定を行う目的、条件等により問題に適した定式化を選択すべきである。時間領域、周波数領域各々に利点は有ると思われるが、周波数領域で同定を行うことの利点の一つとして、観測データのデータセットが十分充実している場合、ひずみレベルが同程度の記録のフーリエスペクトル比を幾何平均し、その平均スペクトル比を用いて同定を行う事により平均的な物性が推定できることが挙げられる。地盤の地震観測記録のように、地震記象毎に伝達関数がばらつく場合には、このような手法が有効である。また、時間領域の同定の場合、低次のモードが一致すれば残差が比較的小さくなるため低次のモードに重きを置いた解析となる。低次モードのみでなく、高次モードの情報までが必要な場合、例えば周波数依存型の減衰²⁾を求める時などには周波数領域の同定が必要となる。

著者等は、Gauss-Newton法を用いた時間領域の同定

手法を提案し数値実験によりその妥当性を検討している^{7), 8)}。更に、時間領域の同定問題におけるモデルパラメータ誤差、観測誤差の同定パラメータに及ぼす影響について検討している⁹⁾。同定パラメータの誤差に対する感度は、同定結果の精度を把握するだけでなく、既知として与えているパラメータに要求される精度も知ることができる。また、実際の観測データを用いての同定問題のとき重要となる、計測器の最適な配置¹⁰⁾に関する判断材料にもなる。このように、モデルパラメータ誤差、観測ノイズの同定結果に及ぼす影響を調べることは重要であるが、このような視点に立った検討は殆ど行われていない。近年の同定問題における精度に関する研究では、辻原等¹¹⁾は地盤構造の動的パラメータの同定問題において、観測量にノイズを付加して各種同定手法の誤差の影響について比較検討している。また、吉田等¹²⁾は静的な問題を対象として、観測量誤差の標準偏差と推定精度について述べている。

本研究は、基本的には文献9)の考え方に従い周波数領域の同定問題における誤差の影響を求める感度方程式を誘導し、数値実験によりその妥当性の検討を行っている。その際、二つの誤差の影響を考えている。一つはモデルパラメータ誤差の影響、もう一つは観測誤差の影響である。ここでモデルパラメータ誤差の影響とは、同定問題で扱うパラメータ(即ち、既知パラメータと未知パラメータ)の内、既知として与えるパラメータに誤差が含まれていた場合の同定結果の精度に関する問題であ

る。観測誤差の影響は、同様に観測量に誤差が含まれていた場合の同定結果の精度の問題である。また、各々の問題において周波数領域の同定問題特有の評価関数の違いによる、同定パラメータに及ぼす影響の違いについても検討している。

2. 周波数領域における同定問題の評価関数

地震荷重を受ける線形多自由度系の運動方程式は、次のように表せる。

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = -M\mathbf{1}\ddot{y}_0(t) \quad (1)$$

ここで、 M 、 C 、 K は質量、減衰、剛性マトリックス、 $\ddot{z}(t)$ 、 $\dot{z}(t)$ 、 $z(t)$ は相対加速度、相対速度、相対変位ベクトルを表している。また、 $\mathbf{1}$ は全ての成分が1.0のベクトル、 $\ddot{y}_0(t)$ は地表の地震動（加速度）を表すスカラー量である。同定問題の評価関数を周波数領域で定式化するために複素応答解析法を用いる。式（1）の両辺をフーリエ変換すると、

$$(-\omega^2 M + i\omega C + K)U(\omega) = \omega^2 M\mathbf{1}Y_0(\omega) \quad (2)$$

となる。ここで、 $U(\omega)$ は相対変位 $z(t)$ 、 $Y_0(\omega)$ は地表変位 $y_0(t)$ のフーリエ変換を表している。式（2）より地表面に対する各質点の伝達関数は次式のような。

$$H(\omega) = \omega^2 (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1} M\mathbf{1} + \mathbf{1} \quad (3)$$

一般的に伝達関数は、地表の変動量と各質点の絶対変動量との比で表現するため、第2項にベクトル $\mathbf{1}$ が表れる。式（3）の伝達関数を用いて評価関数を作成する。ここで、式（3）の $H(\omega)$ は複素数であるが、この絶対値即ち振幅のみを用いることが多い。それは、周波数領域の伝達関数のフーリエ変換対である時間領域の衝撃応答関数が最小位相推移関数であることから、ヒルベルト変換により伝達関数の振幅より位相特性を完全に表すことができるからである¹³⁾。従って、沢田ら⁵⁾の指摘するように伝達関数の振幅のみでも同定は可能である。更に、地震観測記録を用いた場合、伝達関数の位相は余り良い精度で得られないため、比較的精度良く求められる振幅のみを用いて評価関数を作成する方が实际的である。いま、モデルパラメータのうち未知の同定パラメータを $X = \{X_1, X_2, \dots, X_M\}$ 、既知の定数を $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_L\}$ と表す。最小二乗法の考えに従い、評価関数を次式のように定義する。

$$J(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \{ |R_i(\omega_m)| - |H_i(\omega_m)| \}^2 \right] \quad (4)$$

ここで、 $R_i(\omega_m)$ 、 $(i \in A)$ は観測データのフーリエスペクトル比、 A はスペクトル比の組み合わせの集合を表している。 w_i は重み係数であり、観測量の重要度や信頼性に従って設定する¹⁴⁾。 w_i を観測量誤差の共分散マトリッ

クスに基づいて設定すれば確率論的な同定問題と考えることができる。なお、伝達関数は円振動数軸上で $\omega_m (m = 1, \dots, N)$ と離散化している。また、フーリエスペクトル比（伝達関数）を用いているということから、振幅の自然対数を用いた次式のような評価関数も用いられている²⁾。

$$J(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \{ \ln |R_i(\omega_m)| - \ln |H_i(\omega_m)| \}^2 \right] \quad (5)$$

式（4）の評価関数は振幅のピーク付近の残差に重点をおいた式であり、式（5）は伝達関数のピークと谷の部分公平に評価しようと狙ったものである。なぜなら、伝達関数の振幅はピークの部分と谷の部分では桁数が異なり、従って非常に大きい値となるピーク付近の残差が残差二乗和に占める割合が大きくなるからである。本研究では、この両者の評価関数を用いて各種誤差の影響について調べる。以下では、伝達関数の振幅の真数を用いた評価関数を真数型、振幅の対数を用いた評価関数を対数型と称することとする。定数ベクトル Y の真値を \bar{Y} 、観測データより求めたフーリエスペクトル比から観測ノイズを完全に除外したものを $\overline{R_i(\omega_m)}$ と表すこととする。この時、式（4）および式（5）の評価関数を最小とする条件は $\frac{\partial J}{\partial X_j} = 0 (j=1, \dots, M)$ である。この条件を満たす X を \bar{X} で表す。この時の J_{min} の値はゼロとなり、式（4）、（5）は各々以下のように表される。

$$J_{min} = J(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \{ |\overline{R_i(\omega_m)}| - |H_i(\omega_m)| \}^2 \right] = 0 \quad (6)$$

$$J_{min} = J(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \{ \ln |\overline{R_i(\omega_m)}| - \ln |H_i(\omega_m)| \}^2 \right] = 0 \quad (7)$$

通常、 \bar{Y} 、 $\overline{R_i(\omega_m)}$ 等を求めることは不可能であるが、これらはサンプル集合の平均値と考えることによって、以下に示す理論式は種々の問題に適用することができる。

評価関数の最小化および、誤差の感度解析に必要な伝達関数の振幅の未知パラメータに対する偏微分は次式より求めた。

$$\frac{\partial H(\omega)}{\partial X_j} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial H(\omega)}{\partial X_j} H^*(\omega) + H(\omega) \frac{\partial H^*(\omega)}{\partial X_j} \right\} \cdot \{ H(\omega) H^*(\omega) \}^{-\frac{1}{2}} \quad (j=1, \dots, M) \quad (8)$$

ここで、記号 $(\cdot)^*$ は共役複素数を表している。同様に、振幅の自然対数の未知パラメータに対する偏微分は

$$\frac{\partial \ln |H(\omega)|}{\partial X_j} = |H(\omega)|^{-1} \frac{\partial H(\omega)}{\partial X_j} \quad (j=1, \dots, M) \quad (9)$$

となる。

3. モデルパラメータ誤差の影響

(1) 理論式の誘導

モデルパラメータの誤差が同定結果に及ぼす感度を求める式の誘導は、文献9)の考えに従い同様に求めることができる。いま、既知のモデルパラメータ Y_i が真値 \bar{Y}_i より ΔY_i だけ誤差を含んでいたとする。このとき、真数型の評価関数は、

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \left(|R_i(\omega_m)| - \left| H_i(\omega_m, \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial Y_i} \Delta Y_i, \bar{Y}_i + \Delta Y_i) \right| \right)^2 \right] \quad (10)$$

となる。 ΔY_i は十分小さく、この誤差が未知パラメータの同定結果に及ぼす影響も小さいと考える。すると、伝達関数は滑らかな関数であるため、式(10)は真値まわりの Taylor 展開の1次近似により次式のように表せる。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \left(|R_i(\omega_m)| - |H_i(\omega_m, \bar{X}, \bar{Y}_i)| - \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} \Delta Y_i - \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial Y_i} \Delta Y_i \right)^2 \right] \quad (11)$$

偏微分係数 $\frac{\partial X_j}{\partial Y_i}$ は未知パラメータのモデルパラメータ誤差に対する感度である。いま、 $\lambda_{ji} = \frac{\partial X_j}{\partial Y_i}$ と置き、 $|R_i(\omega_m)|$ と $|H_i(\omega_m, \bar{X}, \bar{Y}_i)|$ が一致することより式(11)を整理すると

$$J = \frac{1}{2} (\Delta Y_i)^2 \sum_{m=1}^N \left[\sum_{i \in A} w_i \left\{ - \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \lambda_{ji} - \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial Y_i} \right\}^2 \right] \quad (12)$$

式(12)が最小となる必要条件 $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{ki}} = 0$ より、未知パラメータのモデルパラメータ誤差に対する感度を求める式は以下ようになる。

$$\sum_{j=1}^M \left[\sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \right] \lambda_{ji} = - \sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial Y_i} \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \quad (13)$$

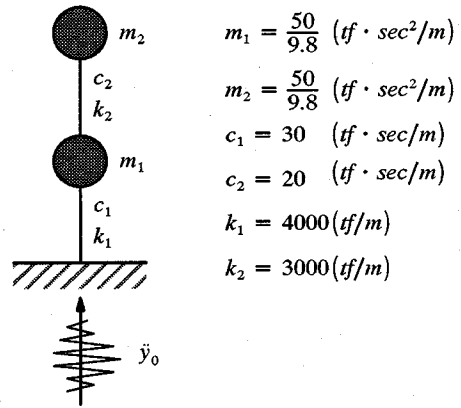
$(k=1, \dots, M)$

同様にして、振幅の自然対数を用いた評価関数の場合、式(13)に対応する式は、

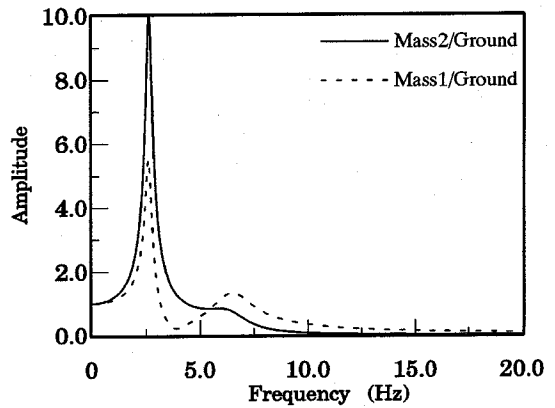
$$\sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \right\} \lambda_{ji} = - \sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial Y_i} \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \quad (14)$$

$(k=1, \dots, M)$

となる。



図—1 解析モデル



図—2 伝達関数の振幅

(2) 例題

数値実験により式(13)および式(14)の妥当性の確認を行った。用いたモデルは図—1に示す2質点系のモデルである。このモデルの伝達関数の振幅を図—2に示す。

入力波形は、1940年 Imperial Valley 地震の El Centro 波 (NS 成分) を最大加速度 300 gal に調節して用いた。観測データには式(3)の伝達関数を用いて、複素応答解析法により得られた各質点の応答を用いた。

ここでは、質量 m_1 、 m_2 を既知の構造パラメータとして、減衰係数 c_1 、 c_2 および剛性 k_1 、 k_2 を未知の同定パラメータとした。尚、解析周波数帯は後に行う観測ノイズの影響に関する検討と条件を合わせて 0.3 Hz ~ 10 Hz を使用し、重み係数 w_i は全て 1 としている。式(13)を用いて真数型の評価関数を用いた場合の同定パラメータの質量の誤差に対する感度を求めた結果を表—1に示す。表—1の結果は各々既知として与える質量が単位量だけ増加したとき、未知パラメータの同定結果が真値からどれだけ変動するかを示している。この値が正のとき

表一 同定パラメータの質量の誤差に対する感度 (真数型評価関数)

Y_e	$\frac{\partial c_1}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial c_2}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial k_1}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial k_2}{\partial Y_e}$
m_1	6.0720	-3.3550	238.29	55.385
m_2	-0.19202	7.2750	545.71	532.61

単位 $\frac{\partial c_i}{\partial m_j} : (1/sec)$ $\frac{\partial k_i}{\partial m_j} : (1/sec^2)$

表三 同定パラメータの質量の誤差に対する感度 (対数型評価関数)

Y_e	$\frac{\partial c_1}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial c_2}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial k_1}{\partial Y_e}$	$\frac{\partial k_2}{\partial Y_e}$
m_1	13.550	-4.0251	379.00	162.06
m_2	-7.6704	7.9451	405.00	425.94

単位 $\frac{\partial c_i}{\partial m_j} : (1/sec)$ $\frac{\partial k_i}{\partial m_j} : (1/sec^2)$

表二 感度からの推定値と同定結果との比較 (真数型評価関数)

		誤差5%		誤差10%		誤差20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
m_1 に誤差	c_1	31.549	31.837	33.098	33.938	36.196	36.446
	c_2	19.144	18.860	18.288	17.146	16.577	15.649
	k_1	4060.8	4039.2	4121.6	4058.6	4243.2	4138.6
	k_2	3014.1	3043.8	3028.3	3113.9	3056.5	32.013
m_2 に誤差	c_1	29.951	28.705	29.962	25.287	29.804	25.151
	c_2	21.856	22.940	23.712	27.551	27.423	30.010
	k_1	4139.2	4212.8	4278.4	4420.8	4556.8	4775.6
	k_2	3135.9	3044.8	3271.7	3100.3	3543.5	3304.2

単位 $c_i : (tf \cdot sec/m)$ $k_i : (tf/m)$

表四 感度からの推定値と同定結果との比較 (対数型評価関数)

		誤差5%		誤差10%		誤差20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
m_1 に誤差	c_1	33.456	34.273	36.913	40.102	43.827	53.973
	c_2	18.973	19.736	17.946	19.738	15.893	18.227
	k_1	4096.7	4065.9	4193.4	4104.9	4386.7	4114.6
	k_2	3041.3	3071.8	3082.7	3163.3	3165.4	3288.3
m_2 に誤差	c_1	28.043	27.861	26.087	25.517	22.173	22.358
	c_2	22.027	20.906	24.054	22.510	28.107	28.074
	k_1	4103.3	4154.4	4206.6	4291.2	4413.3	4546.7
	k_2	3108.7	3039.2	3217.3	3092.1	3434.6	3312.2

単位 $c_i : (tf \cdot sec/m)$ $k_i : (tf/m)$

の同定結果は真値より大きく評価され、逆に負のときは小さく評価される。表一に示した感度の精度を確認するため、実際、質量に誤差を与えて同定を行い、その結果と感度からの推定値 ($\bar{X} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial Y_i} \Delta Y_i$) との比較を行った。質量の一方に真値の5%, 10%, 20%にあたる誤差を付加して、全く誤差の混在しない観測データを用いて同定を行った。同定手法には修正 Marquardt 法¹⁵⁾を用いた。この方法は Gauss-Newton 法と最急降下法との

折衷であり、最適解から遠く離れて非線形性が強い場合には最急降下法として振舞い、最適解に近付くと Gauss-Newton 法として二次収束する。従って、Gauss-Newton 法で良く用いられる修正ベクトルの縮小因子を用いることなく非線形性の強い最小二乗問題に適用でき、収束性が良いという利点がある。表二に感度からの推定値と同定結果との比較を示す。表二の結果を比較すると、質量誤差の小さい場合は誤差の感度から

推定した値と同定結果とは良く一致している。誤差が大きくなるに従い推定値と同定結果との差が表れてくるが、これは理論式誘導の際仮定した微小な誤差の限界を超えたためであると思われる。しかし、変動の方向は一致している。

式(14)の対数型の評価関数を用いた場合の同定パラメータの質量の誤差に対する感度を表-3に示す。表-1の結果と同様に感度の精度を確認するため、実際に同定を行いその結果との比較を行った。表-4に感度からの推定値と同定結果との比較を示す。対数型の評価関数の場合にも、感度からの推定値と実際の同定結果は良く一致しており、求められた感度の精度は良いと言える。

4. 応答に含まれる観測ノイズの影響

(1) 理論式の誘導

いま、観測データのスペクトル比のデータセットのうち測点 l の測定値にのみノイズが含まれ、その他の観測データ $|R_i(\omega_m)|$, ($i \in A, i \neq l$) 及び、構造モデルのパラメータ \bar{Y} には全く誤差が含まれていないものとする。測点 l の測定値 $|R_l(\omega_m)|$ の真値を $|\overline{R}_l(\omega_m)|$, 誤差を $\Delta R_l(\omega_m) = \epsilon_l \eta_l(\omega_m)$ と表すと、 $|R_l(\omega_m)| = |\overline{R}_l(\omega_m)| + \Delta R_l(\omega_m)$ となる。ここで、 $\eta_l(\omega_m)$ は正規化された誤差ベクトル、 ϵ_l は誤差の大きさを表すスカラー量である。測点 l の測定値にのみノイズが含まれるとき、未知パラメータの同定結果は $\bar{X} + \Delta X^{(l)}$ と表される。 $\Delta X^{(l)}$ は観測誤差 $\Delta R_l(\omega_m)$ の影響で生じた同定結果の真値からの差分である。この時、評価関数は

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{\substack{i \in A \\ i \neq l}} w_i \{ |\overline{R}_i(\omega_m)| - |H_i(\omega_m, \bar{X} + \Delta X^{(l)})| \}^2 + w_l \{ |\overline{R}_l(\omega_m)| - |H_l(\omega_m, \bar{X} + \Delta X^{(l)})| \}^2 \right] \quad (15)$$

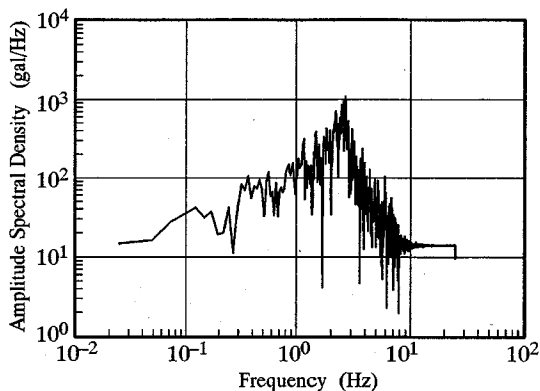
となる。観測の誤差 $\Delta R_l(\omega_m) = \epsilon_l \eta_l(\omega_m)$ は十分小さく、この誤差の同定結果に及ぼす影響も小さいと仮定すると、伝達関数の振幅は近似的に

$$\begin{aligned} |H_l(\omega_m, \bar{X} + \Delta X^{(l)})| &= |H_l(\omega_m, \bar{X})| \\ &+ \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_l(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial R_l} \Delta R_l(\omega_m) \\ &= |H_l(\omega_m, \bar{X})| + \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_l(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial R_l} \Delta R_l(\omega_m) \\ &= |H_l(\omega_m, \bar{X})| + \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_l(\omega_m)|}{\partial X_j} \Gamma_{jl} \epsilon_l \end{aligned} \quad (16)$$

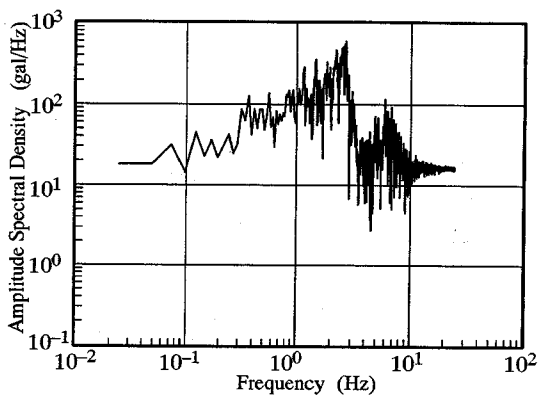
ここで、 $\Gamma_{jl} = \frac{\partial X_j}{\partial \epsilon_l}$ である。式(16)を式(15)に代入し、

$|\overline{R}_i(\omega_m)| = |H_i(\omega_m, \bar{X})|$ の関係を用いて整理すると、

$$J = \frac{\epsilon_l^2}{2} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{\substack{i \in A \\ i \neq l}} w_i \left\{ - \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \Gamma_{ji} \right\}^2 \right]$$



(1) 質点1の加速度応答



(2) 質点2の加速度応答

図-3 フーリエスペクトル

$$+ \frac{\epsilon_l^2}{2} \sum_{m=1}^N \left[w_l \left\{ - \sum_{j=1}^M \frac{\partial |H_l(\omega_m)|}{\partial X_j} \Gamma_{jl} + \eta_l(\omega_m) \right\}^2 \right] \quad (17)$$

となる。式(17)が ϵ_l^2 の値の如何に関わらず未知数 Γ_{ji} に関して最小となる必要条件 $\frac{\partial J}{\partial \Gamma_{ki}} = 0$ より、感度方程式

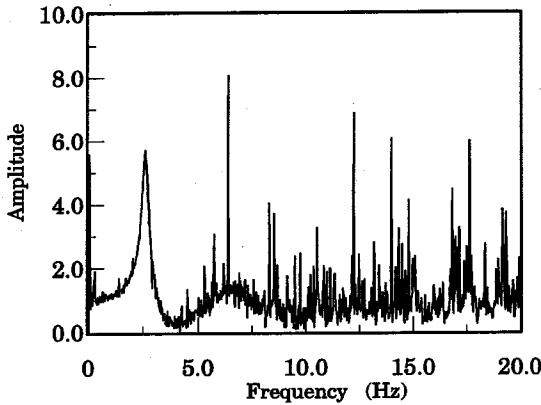
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \right\} \Gamma_{ji} \\ = \sum_{m=1}^N w_l \eta_l(\omega_m) \frac{\partial |H_l(\omega_m)|}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (18)$$

($k=1, \dots, M$)

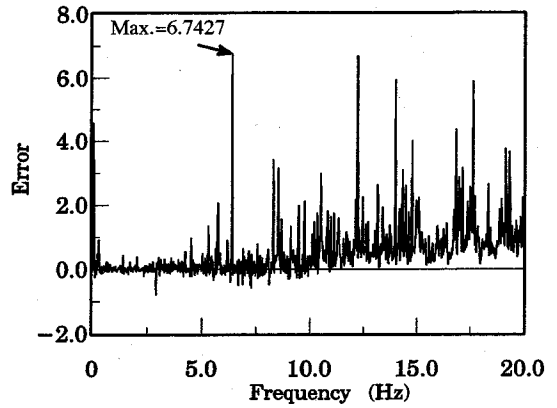
が得られる。ここで、 Γ_{ji} が未知パラメータの観測ノイズに対する感度である。同様の手続きで、伝達関数の振幅の自然対数を用いた評価関数の場合の感度方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{m=1}^N \sum_{i \in A} w_i \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial X_j} \frac{\partial \ln |H_i(\omega_m)|}{\partial X_k} \right\} \Gamma_{ji} \\ = \sum_{m=1}^N w_l \eta_l(\omega_m) \frac{\partial \ln |H_l(\omega_m)|}{\partial X_k} \end{aligned} \quad (19)$$

($k=1, \dots, M$)



図—4 応答に10%のノイズを含むフーリエスペクトル比 (Mass 1/Ground)



図—5 10%のノイズを含むフーリエスペクトル比の誤差 (Mass1/Ground)

表—6 感度からの推定値と同定結果との比較(真数型評価関数)

		ノイズ5%		ノイズ10%		ノイズ20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
R ₁ に誤差	c ₁	30.948	32.044	32.264	35.917	35.383	42.221
	c ₂	18.536	17.238	16.613	12.685	12.099	59.852
	k ₁	3998.9	4013.6	3997.7	4031.1	3995.7	4053.2
	k ₂	3002.6	2982.0	3009.9	2950.7	3028.4	2909.2
R ₂ に誤差	c ₁	30.109	30.536	30.326	30.984	30.771	33.689
	c ₂	19.877	19.343	19.582	18.694	18.933	14.060
	k ₁	4002.2	3983.7	4003.3	3983.1	4005.0	3856.2
	k ₂	3000.2	3025.4	3004.2	3035.9	3015.5	3228.2

単位 c_i: (tf・sec/m) k_i: (tf/m)

表—5 同定パラメータの観測誤差に対する感度(真数型評価関数)

ノイズ	ε _ℓ	∂c ₁	∂c ₂	∂k ₁	∂k ₂
		∂ε _ℓ	∂ε _ℓ	∂ε _ℓ	∂ε _ℓ
5%	ε ₁	0.29487	-0.45551	-0.33000	0.79837
	ε ₂	0.050908	-0.057317	1.0304	0.088170
10%	ε ₁	0.33571	-0.50232	-0.34051	1.4665
	ε ₂	0.062665	-0.080342	0.62952	0.80086
20%	ε ₁	0.38800	-0.56955	-0.30919	2.0438
	ε ₂	0.067722	-0.093812	0.44093	1.3626

単位 ∂c_i/∂ε_ℓ: (tf・sec/m) ∂k_i/∂ε_ℓ: (tf/m)

(2) 例題

理論検証のため、ここでも図—1の2質点系のモデルを用いて数値シミュレーションを行った。解析条件は3.(2)と全く同じである。加速度応答に付加するノイズは大きさ5%, 10%, 20%の周波数帯0.02 Hz~25 Hz

のバンドリミテッド・ホワイトノイズを用いた。ノイズの大きさは入力波形の最大加速度に対する、ノイズ波形の最大値の比で表している。この例題では、入力波形の最大加速度は300 galであるため、ノイズの大きさ5%, 10%, 20%は各々最大加速度15 gal, 30 gal, 60 galに対応している。図—3に20%のノイズを付加した質点1及び質点2の加速度応答のフーリエスペクトルを示す。図より明らかなように周波数10 Hz以上及び0.3 Hz以下はノイズに信号が埋没している。そこで、以下の検討では、SN比の状態の良い0.3 Hz~10 Hzを解析周波数帯とした。

質点1の応答に10%のノイズを付加したときの入力波形とのフーリエスペクトル比を図—4に示す。ここでは、入力波形にはノイズを加えていない。図—3のフーリエスペクトルからも明かであったように、周波数0.3 Hz以下と10 Hz以上のスペクトル比はSN比の状態が非常に悪いことが分る。このスペクトル比の真値からの差分、即ち誤差ΔR_i(ω_m)を図—5に示す。この誤差は、

表—8 感度からの推定値と同定結果との比較(対数型評価関数)

		ノイズ5%		ノイズ10%		ノイズ20%	
		推定値	同定結果	推定値	同定結果	推定値	同定結果
R_1 に誤差	c_1	32.033	32.403	35.689	38.720	44.835	53.221
	c_2	19.192	18.974	18.978	18.136	18.611	16.720
	k_1	4028.6	4044.3	4116.4	4199.4	4355.0	4736.1
	k_2	3006.6	2994.9	3013.8	2954.3	2965.3	2752.0
R_2 に誤差	c_1	38.504	43.139	45.565	79.057	51.947	102.78
	c_2	20.483	21.039	20.899	16.337	21.289	17.198
	k_1	4196.2	4191.8	4366.4	4330.3	4564.1	4382.7
	k_2	3151.4	3201.3	3285.6	3407.7	3452.9	3863.6

単位 $c_i : (tf \cdot sec/m)$ $k_i : (tf/m)$

表—7 同定パラメータの観測誤差に対する感度(対数型評価関数)

ノイズ	ϵ_ℓ	$\frac{\partial c_1}{\partial \epsilon_\ell}$	$\frac{\partial c_2}{\partial \epsilon_\ell}$	$\frac{\partial k_1}{\partial \epsilon_\ell}$	$\frac{\partial k_2}{\partial \epsilon_\ell}$
5%	ϵ_1	1.0846	-0.43113	15.249	3.5334
	ϵ_2	3.3563	0.19061	77.435	59.773
10%	ϵ_1	2.9638	-0.53264	60.636	7.1714
	ϵ_2	4.7679	0.27554	112.25	87.495
20%	ϵ_1	5.6864	-0.53241	136.07	-13.294
	ϵ_2	5.5002	0.32427	141.88	113.90

単位 $\frac{\partial c_i}{\partial \epsilon_\ell} : (tf \cdot sec/m)$ $\frac{\partial k_i}{\partial \epsilon_\ell} : (tf/m)$

解析周波数帯の範囲ではさほど大きくないが、10 Hz 以上では真の伝達関数がゼロに漸近するため急激に大きくなっている。

5%, 10%, 20% のノイズが応答に付加された場合の、同定パラメータの観測ノイズに対する感度を式(18)により計算した結果を表—5に示す。評価関数は真数型である。表—5の結果は正規化された観測誤差(最大値が1)に対して同定結果が真値から変動する量を示している。従って、この値と実際の観測誤差の大きさ(最大値)の積が同定結果が真値から変動する量を示している。表—5の結果より観測誤差の同定パラメータに与える影響は小さいと言える。特に、剛性の観測誤差に対する感度は非常に小さく、ほとんど観測誤差の影響を受けていない事が分る。表—5に示した感度の精度を調べるために感度から推定した同定結果と実際に観測誤差を有するデータを用いて同定した結果との比較を行った。その結果を表—6に示す。表—6の結果から減衰定数については感度からの推定値と同定結果とが良く一致していることが分る。剛性の推定値は同定結果と比べると、ほとん

どが真値からの変動量の符号が逆転している。これは、観測誤差の剛性の同定結果に及ぼす影響が非常に小さく、従って感度も非常に小さくなり数値計算上の誤差に埋もれてしまっていることによると思われる。また、ノイズの大きさが20%の場合は推定値と同定結果の一致度が悪いが、これもモデルパラメータの誤差の場合と同様、理論式の誘導過程で仮定した微小な誤差の限界を超えてしまったためと思われる。

次に、対数型の評価関数の場合の感度方程式(19)を用いて同定パラメータの観測誤差に対する感度を求めた結果を表—7に示す。対数型の評価関数の結果は、表—5の真数型の評価関数の結果と比べて誤差の感度が大きいことが分る。これは、真数型の評価関数では過小評価されていた伝達関数の谷の部分が、対数型の評価関数ではピークの部分と同等に評価されるため、伝達関数の谷の部分の誤差の影響が表れてきたことによると思われる。感度から推定した同定結果と実際同定を行った結果との比較を表—8に示す。対数型の評価関数の場合、真数型の評価関数に比べて観測誤差が同定結果に及ぼす影響が大きいことが同定結果からも分る。真数型の評価関数に比べて誤差の感度が大きいため、対数型の評価関数の場合の方が感度からの推定値と実際の同定結果との一致度は良い。しかし、真数型の評価関数の場合と同様、ノイズが20%の場合には精度は低下する。また、質量の誤差による影響に比べて、観測誤差の影響の方が非線形性が強いという事が分る。

5. 結 論

周波数領域の同定問題におけるモデルパラメータ誤差、観測ノイズの同定結果に及ぼす影響を感度という形で評価する手法を示した。評価関数が真数型の場合と対

数型の場合の2種類について理論式の誘導を行い、数値解析により理論の妥当性を検証した。検討の結果から以下のようなことが結論付けられる。

(1) 周波数領域で伝達関数の振幅のみを用いた評価関数を用いた場合、時間領域に比べて情報量が少なくなるが、ここで誘導した誤差の感度は十分精度良く求められた。

(2) 既知のモデルパラメータの誤差(例題では質量誤差)の同定結果に及ぼす影響は、評価関数が真数型、対数型の如何によらずほぼ同程度であった。

(3) 真数型の評価関数の場合は観測誤差の同定結果に及ぼす影響は非常に小さいが、対数型の場合は観測誤差の影響を受け易いことが分った。

以上のように、周波数領域の同定問題においても各種誤差の影響を評価できることを示した。また、評価関数の種類による違いについても示した。これにより、誤差の感度による検討を行うことによって、対象とする問題に合わせて最適な評価関数を選択することができる。本手法の応用としては、観測誤差の感度を調べることによってデータセットの中で感度の大きい観測点のデータは取り除く、またはそのような観測点は設けない等、観測点の最適配置問題にも応用できる。

参考文献

- 1) Beck, J.L. and Jennings, P.C. : Structural identification using linear model and earthquake records, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.8, pp.145-160, 1980.
- 2) 安中 正, 都築富雄, 増田民夫, 嶋田昌義, 岡留孝一 : 鉛直アレー記録から推定した表層地盤の剛性率及び減衰定数のひずみ依存性, 第9回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 493-498, 1994年12月.
- 3) 栗田哲史, 吉田郁政 : 1987年千葉県東方沖地震の本震・余震記録を用いた地盤構造の同定, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp.1524-1525, 1994年9月.
- 4) Distefano, N. and Dena-Pardo, B. : System identification of frames under seismic loads, *Proceedings of ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol.102, No.FM 2, pp 313-330, April 1976.
- 5) 沢田 勉, 辻原 治, 阿世賀宏, 神谷 宏 : セン断型線形多自由度系の同定問題の周波数領域における解析法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 32 A, pp. 739-748, 1986年3月.
- 6) McVelly, G.H. : Structural identification in the frequency domain from earthquake records, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.8, pp.161-180, 1980.
- 7) 松井邦人, 栗田哲史 : 応答加速度波を用いた構造特性の同定, 構造工学論文集, Vol. 35 A, pp. 689-698, 1989年3月.
- 8) 栗田哲史, 松井邦人 : 動的計画法とガウス・ニュートン法の動的構造同定問題への適用について, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第13巻, pp. 413-418, 1989年7月.
- 9) Matsui, K. and Kurita, T. : Sensitivities of parameters due to model errors and measurement noises in structural identification problems, *Proceedings of JSCE, Structural Engineering/Earthquake Engineering*, No.422/I-14, pp.263-272, October 1990.
- 10) Shah, P.C. : A methodology for optimal sensor location of dynamic systems, *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.45, pp.188-196, 1978.
- 11) 辻原 治, 沢田 勉, 平尾潔 : 地震時地盤の同定問題に適用する非線形最適化手法の比較, 土木学会論文集, No. 489/I-27, pp. 277-280, 1994年4月.
- 12) 吉田郁政, 豊田耕一, 星谷 勝 : 2次元FEMを用いた確率論に基づく逆解析の定式化とその解法, 土木学会論文集, No. 507/I-30, pp. 129-136, 1995年1月.
- 13) (株)小野測器音響技術研究室編 : デジタル信号処理の基礎用語集, (株)小野測器, 1986年6月.
- 14) 吉田郁政, 黒瀬浩公, 福井史朗 : 確率論に基づく逆解析手法の基礎的研究, 土木学会論文集, No. 483/I-26, pp. 61-68, 1994年1月.
- 15) 中川 徹, 小柳義夫 : 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982年5月.

(1994. 11. 18 受付)

SENSITIVITY ANALYSIS ON MODEL PARAMETER ERRORS AND MEASUREMENT NOISES IN FREQUENCY DOMAIN IDENTIFICATION PROBLEMS

Tetsushi KURITA and Kunihito MATSUI

This paper deals with the effectiveness of model parameter errors and measurement noises on structural identification problems by using sensitivity analysis in frequency domain. Two types of evaluation function are assumed. One is anti-logarithmical form of amplitude of transfer function, the other is of logarithmical form. The comparison between the two algorithms are carried out. Numerical experiments are presented for the verification of this theory. The estimated parameters by the sensitivity approach are in a good agreement with the results calculated by the identification method, which shows the validity of the theory introduced in this paper.