

カルマンフィルタとクリッキングのハイブリッド法 による条件付確率波のシミュレーション

清野純史¹・鈴木 誠²

¹正会員 工博 山口大学助教授 工学部知能情報システム工学科 (〒755 山口県宇部市常盤台 2557)

²正会員 工博 清水建設株式会社 和泉研究室 (〒100 東京都千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

近年、観測点では標本値として観測された波形を厳密に満たし、その他の点では確率場の特性を満足するような地震動の条件付シミュレーション法が種々提案されている。本研究では、従来水文学や鉱山工学における物理量の空間分布の推定に広く用いられてきたクリッキングの推定誤差共分散が、カルマンフィルタの観測更新による推定誤差共分散と等価であることに着目し、場の確率特性として指数型の共分散関数が与えられた場合に、時間方向、空間方向の相関をそれぞれ満足するような波形を、カルマンフィルタとクリッキングのハイブリッド法により逐次推定する手法を開発した。

Key Words : Kalman filter, kriging, stochastic waves, conditional simulation, covariance function

1. ま え が き

地震動は時間的、空間的に変動する。構造物を設計するとき、その構造物が地震動の空間的な変動を考慮しなくて良いと考えられる場合には、過去の代表的な強震記録波を入力地震動として耐震設計されることが多い。しかし、長大構造物のようにその展開距離が地震波の波長に対して長い場合には、その構造物に沿った複数の地点における波形を把握することが必要である。従来の複数地点の波形のシミュレーション手法では、過去に実際に観測された強震波形が、ある一定の見かけ速度で水平方向に伝搬するとして波形を得てきた。しかし、地震動の場所による変形に関する種々の検討が行われた結果、実現象に即した形で波形の変形を取り入れる手法が提案されてきた。さらに、地震時における地動の検知という立場から、ある領域に分布した数少ない観測点から、その領域内の任意点での波形を推定するというような必要性も考えられ、通常の内挿法による推定からさらに確率場の特性を反映させるような波動推定法が提案されるようになってきた。これらが、限られた数の測定点における観測波形から未測定点における応答波形をシミュレーションするための手法であり、単なる内挿法ではなく、そこに確率場の概念が取り入れられている。これらの手法の一つが、波形の空間分布を条件付き確率場として表現し、未測定点での波形を推定する方法である。ここで、条件付き確率場とは、推定された波形が測定点では観測波形

と一致するという条件をもつ確率場である。

この条件付き確率場での未測定点における地震動シミュレーションの研究として、川上は波形を二重フーリエ級数に展開し、最適化手法によって係数を算定することにより与えられた相互相関関数を満足するような時空間発生させた¹⁾。さらに、二重フーリエ級数の代わりに、多変数の確率過程を用いる方法²⁾や多変数 AR モデルを用いた方法³⁾も提案している。Kameda and Morikawa^{4),5)}はフーリエ係数に関する条件付き確率密度関数に基づいて波形を決定する方法を提案している。観測点では観測波を厳密に満たすという与条件を簡便な形で組み込むために、クリッキングを取り入れた研究も行われている。クリッキング手法に関しては、鈴木ら^{6),7),8)}、清野ら^{9),10)}が土質、地盤工学の分野における地盤物性値の空間分布の推定問題や、最大地動の空間分布の推定問題に応用している。Vanmarcke と Fenton¹¹⁾はアレー観測による地震波動を用いて、クリッキングとモンテカルロ法により未測定点の波形を線形補間により予測する方法、土岐ら¹²⁾、清野ら¹³⁾はクリッキングを不整形地盤上の地震動のシミュレーションに応用して、不整形地盤上で観測された空間的に非正常な地震動から任意点での波形を推定する手法を提案している。星谷¹⁴⁾はクリッキングの基本式に工夫を凝らし、漸次拡張方式によって与えられた確率場の特性を満足するように波形をシミュレートする方法を提案している。丸山ら¹⁵⁾は上述の星谷の理論を用いて、表層地盤における波動の伝播問題を解いている。ま

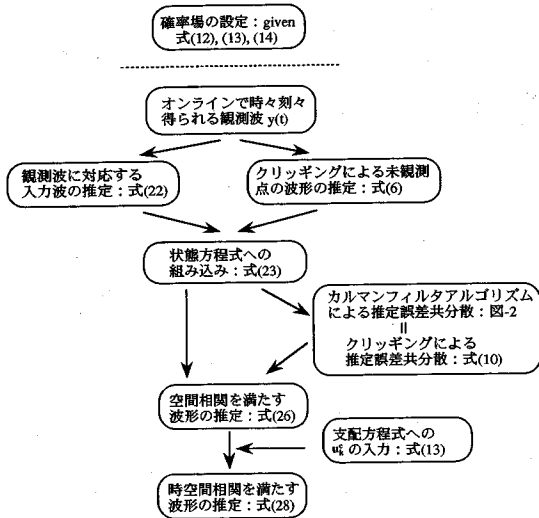


図-1 本研究におけるオンライン、逐次推定のための手順と対応する式

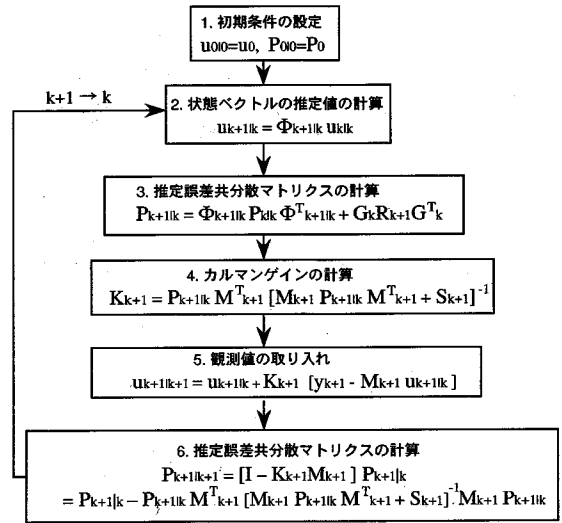


図-2 カルマンフィルタアルゴリズム

た、野田ら^{16), 17)}はこれらの条件付き推定問題を非正規確率場へと拡張している。

本研究の目的は、カルマンフィルタの観測更新の逐次推定アルゴリズムにおける推定誤差共分散がクリッキングにおける推定誤差共分散と一致することに着目し、カルマンフィルタとクリッキングのハイブリッド法により、確率場が与えられたときに有限個の測定点で得られる観測波形から任意の未測定点での波形の条件付きシミュレーションを行うことである。しかも、これら一連のシミュレーションが観測波形を取り込むと同時にシーケンシャルに行えることが大きな特徴である。カルマンフィルタは観測更新アルゴリズムと時間更新アルゴリズムから成り立っているが、クリッキングには時間更新アルゴリズムに相当するものがない。本研究では、カルマンフィルタの時間更新アルゴリズムにクリッキングを取り入れたハイブリッド法を提案する。図-1は本研究の流れとそれに対応する式を示したものである。分離型指数関数の確率場が与えられたときに、時々刻々オンラインで得られる観測点での記録を基に、任意点での波形を逐次推定するためのアルゴリズムである。カルマンフィルタは逐次推定のために、また、クリッキングは線形補間のために用いている。与えられた確率場の条件を満足させるために両者の推定誤差共分散を利用している。このハイブリッド法¹⁸⁾は、本研究と同時期に Sato et al.¹⁹⁾によっても提案されているが、本研究がカルマンフィルタへの導入が容易な1階の線形確率微分方程式で規定される確率場を想定しているのに対し、佐藤らは適用範囲の広いAR-MA過程²⁰⁾で地震波を表現し、これをカルマンフィルタに組み込んでいる点が異なる。

2. カルマンフィルタとクリッキング

(1) カルマンフィルタ

カルマンフィルタは、信号を生成するシステムの動特性、雑音の統計的性質、初期値に対する先験情報、及び時々刻々と与えられる観測データを用いてシステムの状態の最小2乗推定値を逐次的に与えるコンピュータ計算に適したアルゴリズムで、i) システム方程式の線形性、ii) システム、および観測ノイズの白色性、iii) ノイズのガウス性、の仮定の基に、種々の問題に対して統計的予測、同定および推定が行われている。

いま、カルマンフィルタの対象とする確率システムとして、離散時間線形定常確率システムを考える。時刻 $k\Delta t$ (Δt はサンプリング時間間隔) における離散量を添字 k で表すと、このシステムの状態方程式と観測方程式は次式で与えられる。

$$u_{k+1} = \Phi_{k+1|k} u_k + G_k w_k \quad (1)$$

$$y_k = M_k u_k + v_k \quad (2)$$

ここに、 Φ 、 M 、 G はそれぞれ状態遷移マトリクス、観測マトリクス、システムノイズマトリクスであり、それぞれ時刻に依存しない定常行列とする。 w 、 v はシステムノイズおよび観測ノイズで、平均値は 0 であり、その共分散行列は次のようになる。

$$E \left\{ \begin{pmatrix} w_m \\ v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n^T & v_n^T \end{pmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} R_m & 0 \\ 0 & S_m \end{bmatrix} \delta_{mn} \quad (3)$$

ここに、マトリクス R_m 、 S_m は正定値対称行列、 δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。このとき、カルマンフィルタアルゴリズムは図-2で与えられる。状態量の推定

値と推定誤差共分散は、時間更新アルゴリズムと観測更新アルゴリズムによってそれぞれ時刻 k および時刻 $k+1$ において更新される。このアルゴリズムにしたがえば、状態変数ベクトルおよび推定誤差共分散マトリクスの初期値 u_0 , P_0 を与えることにより最適推定値を得ることができる。

(2) クリッキング

クリッキングは限られた数のサンプル場から、未測定点の推定値を線形補間する手法である。まず、推定を行う標本場 $z(x)$ は次式のように表現できるものとする。簡単のためスカラー量で表示する。

$$z(x) = m(x) + u(x) \quad (4)$$

ここに x は位置ベクトルであり、 $u(x)$ は期待値 0 の確率過程、 $m(x)$ は次式のような $z(x)$ の期待値であり、通常はクリッキングの中で求められる。

$$m(x) = E[z(x)] \quad (5)$$

ただし、今回のような地震動を扱う問題に対しては本研究では $z(x)$ の期待値を 0 と置き、測定値を $u(x_i)$ とする。クリッキングでは、 n 個の観測点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ における測定値 $u(x_i)$ が得られた場合、未観測点 x_s の推定値 $u^*(x_s)$ は次式のように観測点 x_i における測定値の線形結合で表現される。

$$u^*(x_s) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \quad (6)$$

ここに、 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ は $\sum \lambda_i = 1$ を満足する重み係数である。

ここで、真値と推定値との誤差共分散値を最小とする λ_i を求め、これを式 (6) に適用することにより $u^*(x_s)$ を求めることができる (Appendix A)。このときの推定誤差の分散は次式で表される。

$$\sigma^2(x_s) = E[u^2(x_s)] - \sum_{i=1}^n \lambda_i C[u(x_s), u(x_i)] \quad (7)$$

x_s が測定値 x_i と一致する場合は上式から $\sigma^2(x_s) = 0$ となる。これより、観測点における推定値は測定値と一致することが分かる。

(3) カルマンフィルタとクリッキング

いま、クリッキングに用いる状態量として、以下のよう
にトレンド成分 (式 (4) の $m(x)$) を考えない量を扱う。

$$u = (u^T(x_i), u^T(x_s))^T \quad (8)$$

ここに、 $u(x_i)$ は観測点 i での状態量、 $u(x_s)$ は未測定点での状態量である。 $u(x_s)$ は式 (6) より $u(x_i)$ の重み付きの線形結合で表されるものとする。ただし、ここで扱っているクリッキングは平均値が既知 (=0) の多変量正規分布の条件付き分布を考えている。ここで、 $u(x_i)$, $u(x_s)$ の共分散マトリクスとして Q_{ii} , Q_{is} , Q_{si} ,

Q_{ss} を考え、また、クリッキングによる観測点の推定量 $u^*(x_i)$ が観測点での状態量 $u(x_i)$ に一致することを考慮すると、推定誤差共分散行列は

$$E[(u-u^*)(u-u^*)^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \quad (9)$$

となり、ゼロ以外の成分 P は次式で表される (Appendix B)。

$$P = Q_{ss} - Q_{si} Q_{ii}^{-1} Q_{is} \quad (10)$$

これは図-2 のカルマンフィルタアルゴリズムの観測更新による推定誤差の共分散と一致する。ただし、

$$\left. \begin{aligned} Q_{ss} &= P_{k+1|k} \\ Q_{si} &= P_{k+1|k} M_{k+1}^T \\ Q_{is} &= M_{k+1} P_{k+1|k} \\ Q_{ii} &= M_{k+1} P_{k+1|k} M_{k+1}^T + S_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

すなわち、クリッキングを用いて推定しようとする量 (未観測点での物理量) を式 (8) の形で状態量に組み込み、カルマンフィルタアルゴリズムによって推定誤差の共分散を時々刻々推定すれば、それがクリッキングの推定誤差の共分散と等価であることを意味する。

3. 条件付き確率場のシミュレーション

(1) 問題の設定

まず、次の連続型確率微分方程式を考える。簡単のためスカラー量を考えると

$$\dot{u} = au + b\gamma \quad (12)$$

ここで、 u は白色雑音 γ によってドライブされる状態変数、係数 a , b は確率場を支配するパラメータである。この式の離散表示は次式で与えられる。

$$u_k = \Phi u_{k-1} + b\gamma_{k-1} \sqrt{\Delta t} \quad (13)$$

式 (12) で与えられる方程式を満足する状態量は、次式で与えられる共分散関数を持つ。

$$C(\tau) = -\frac{b^2}{2a} e^{a|\tau|} \quad (14)$$

ここでは、共分散関数として時間差 τ_i および空間距離 x_{ij} が大きくなるに従って相関が減少するような指数関数型を想定するため、次式のような分離型指数関数に対応する τ を与える。

$$\tau = \tau_i + \tau_{ij} \quad (15)$$

$$\tau_{ij} = \frac{x_{ij}}{v_0} \quad (16)$$

本研究では、式 (14) の定数 a , b は確率場を規定するパラメータとして予め与えられているものとし、それぞれ -2 , 2 としている。式 (14) を x 軸に時間差 τ_i , y 軸に 2 点 i, j 間の距離 x_{ij} をとって表示したものが図-3 である。時間方向、空間方向に指数関数に従って減少して

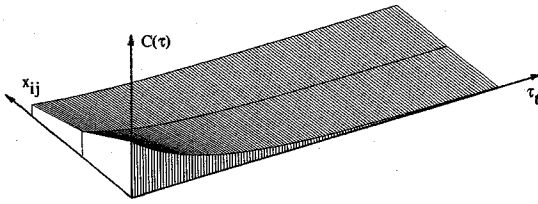


図-3 確率場を規定する共分散関数

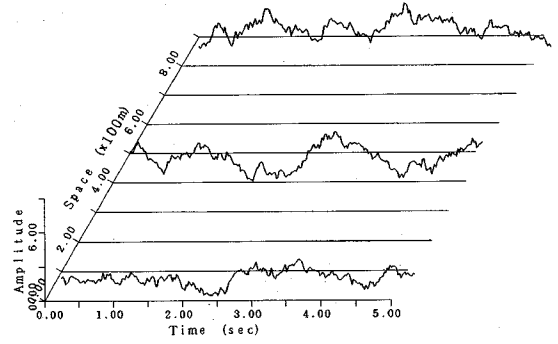
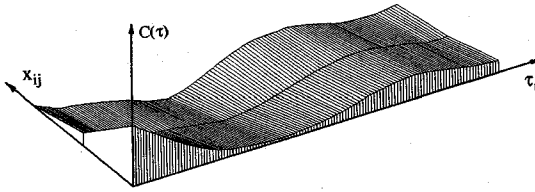


図-4 与えられた共分散関数に従って発生させたサンプル波



(a)



(b)

図-5 (a) サンプル波の共分散関数, (b) サンプル波の共分散関数のアンサンプル平均 (サンプル波 20 組)

いる。

図-4 は、式 (13) を用いて式 (14)~(16) に示す時空間的な相関を満足するように発生させた波形である。確率場のシミュレーションの際に用いる観測波形に、ここで発生させた波形を対応させる。観測波形は 3 点で得られており、波形を推定すべき点は 6 点である。すなわち、図において距離 100 m, 500 m, 900 m の 3 点が観測点に、200 m, 300 m, 400 m, 600 m, 700 m, 800 m が推定する点に対応している。また、式 (16) における v_0 の値として 1000 (m/sec) を仮定している。観測波形として発生させたサンプル波の共分散関数を示したものが図-5 (a) である。サンプル波の共分散関数であるため、これだけでは設定された関数に一致はしないが、アンサンプル平均をとることによってこれらの波の確率特性が式 (14) に従うことがわかる。図-5 (b) は 20 組のサンプル波のアンサンプル平均をとったものであり、図-3 の分布に近づいていることがわかる。

入力白色雑音については、観測波形が得られても通常は未知である。シミュレーションでは式 (13) を用いて観測波としてのサンプル波を発生させている。その場合は γ に白色雑音を与えればよいが、実観測波形ではこの入力未知である。したがって、出力としての観測波形から逐次入力を求めなければならない。これは、場を規定するパラメータ (ここでは a と b) さえ既知であれば、次節に示すように推定可能である²⁾。

(2) 入力波形の推定

まず、式 (13) の右辺第二項を次式のようにおく。

$$h_{k-1} = b\gamma_{k-1}\sqrt{\Delta t} \quad (17)$$

これより式 (13) は、次式のようにになる。

$$u_k = \Phi u_{k-1} + h_{k-1} \quad (18)$$

これを h について解くと

$$h_{k-1} = u_k - \Phi u_{k-1} \quad (19)$$

ここで、 u の真値は実際には未知量であるので、先に述べたカルマンフィルタアルゴリズムから得られる次式の推定値を利用する。

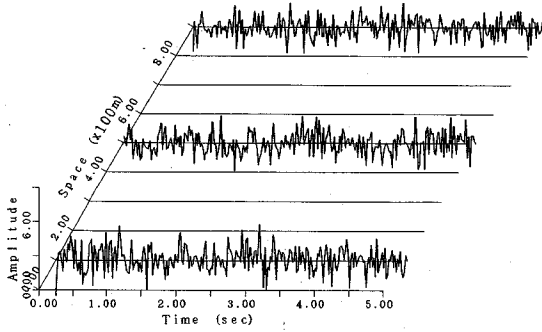
$$u_k = u_{k|k} \quad (20)$$

$$\Phi u_{k-1} = u_{k|k-1} \quad (21)$$

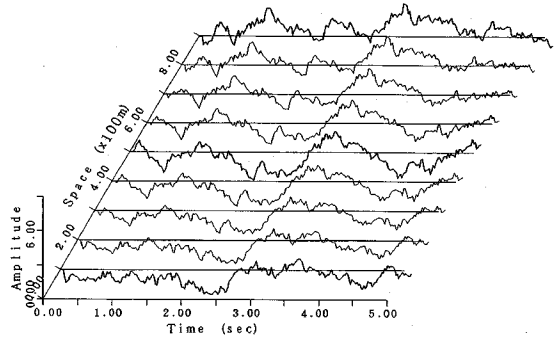
すなわち、 u_k としては時刻 k における最適推定値 $u_{k|k}$ 、 Φu_{k-1} としては時刻 $k-1$ において推定した時刻 k における最適推定値 $u_{k|k-1}$ を充当する。両式を式 (19) に代入すると次式を得る。

$$h_{k-1} = u_{k|k} - u_{k|k-1} \quad (22)$$

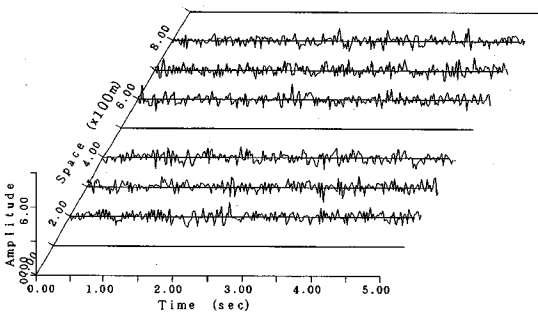
式 (17) と式 (22) を等値とすることにより γ_k を求めることができる。図-6 は図-4 に示した波形を観測波形として、場を規定する特性が既知という条件の基に入力を逆推定したものである。この手順もカルマンフィルタアルゴリズムに従っているため観測が得られると共に入力を計算する逐次推定が可能である。



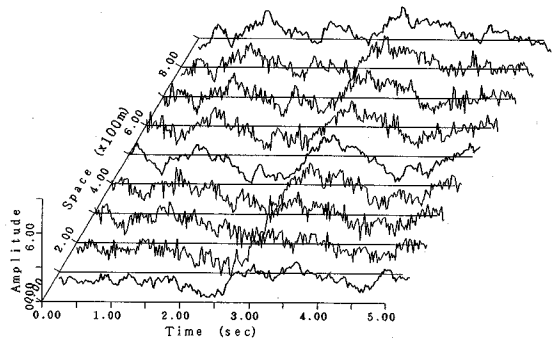
図—6 観測波から逆推定した入力波形



図—7 クリッピングにより求めた各観測点での波形 (Point 1, 5, 9 では観測波形と一致)



(a)



(b)

図—8 (a) 推定誤差共分散をコレスキー分解することにより得られた時系列
(b) (a) の波形をクリッピングで求めた波形に加えた推定波形

(3) カルマンフィルタとクリッピング

図—7は、図—4に示した3点での波形を観測波形として、2.(2)で述べたクリッピングにより6つの未観測点の波形を線形補間したものである。カルマンフィルタの定式化に適合させるために、未観測点の時刻 $t+1$ における値をいくつかの観測点の時刻 t の値の線形結合として求めている。推定誤差を最小にする規範で求められているが、式(14)で規定される確率場の特性を満足するとは限らない。

ここで、カルマンフィルタの状態方程式、観測方程式として次式を考える。

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \Lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{k-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r_{k-1} \quad (23)$$

$$\mathbf{y}_k = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (24)$$

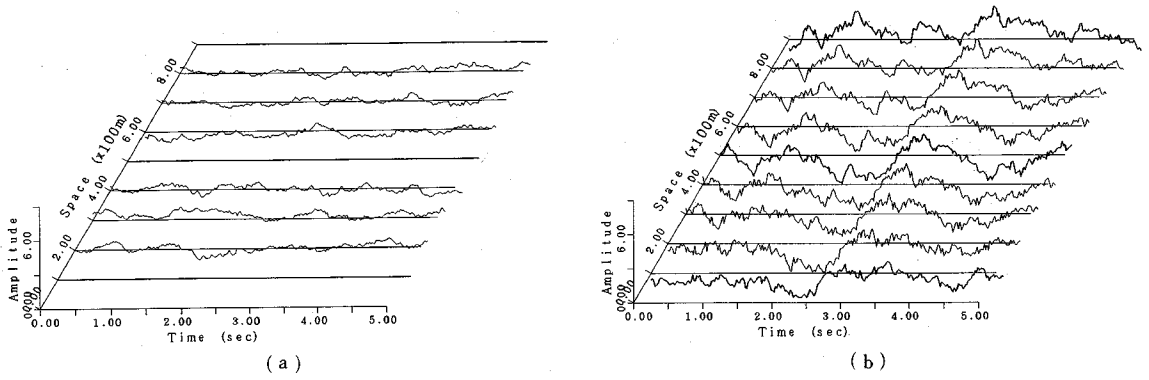
ただし、状態量 \mathbf{u} は式(8)に示したように観測点での状態量 $\mathbf{u}(x_i)$ と未観測点での状態量 $\mathbf{u}(x_s)$ から成っている。 Λ はAppendix Bの Λ と同じものである。また、本研究では観測ノイズ \mathbf{v}_k は含まれないものとしている。この観測方程式による未測定点の推定誤差共分散は、前述のようにクリッピングによる推定誤差共分散と一致する。状態方程式の未測定点に対応する遷移マトリクスに

はクリッピングにより推定された重み係数を入れているが、時間更新アルゴリズムに従うと推定誤差共分散の値が $\mathbf{0}$ となり、観測更新に引き継ぐことができない。したがって、時間更新のたびに状態量の共分散を初期値として与え、観測の度に与えた初期値から更新される推定誤差共分散行列 \mathbf{P} を次式のようにコレスキー分解する。これを基に推定誤差分散を満足する波形 \mathbf{u}^c を発生させ、カルマンフィルタの状態方程式に組み込んだクリッピングにより推定された波形 \mathbf{u}_k に加えればよい。

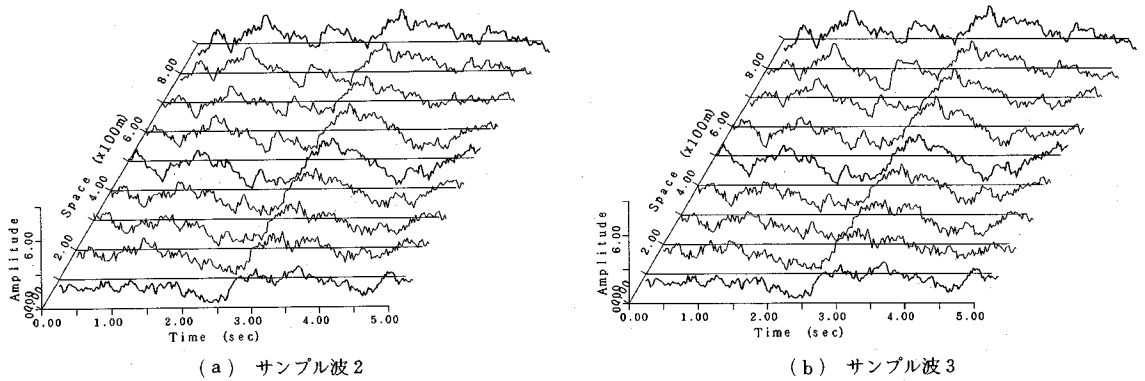
$$\mathbf{P} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{u}_k^c = \mathbf{L} \boldsymbol{\Psi}_k \quad (25)$$

$$\mathbf{u}_k(x_s) = \mathbf{u}_k(x_s) + \mathbf{u}_k^c(x_s) \quad (26)$$

ここに、 $\boldsymbol{\Psi}$ は平均値0、分散1の正規乱数ベクトル、 \mathbf{u}_k^c はクリッピングにより推定された波形と \mathbf{P} のコレスキー分解から得られた波形を加えたものである。図—8(a)は、 \mathbf{P} をコレスキー分解した結果の時系列を表したものであり、これをクリッピングによって得られた波形に加えたものが図—8(b)である。この場合、コレスキー分解は各時間ステップごとに独立に行っているため、空間方向の確率場の特性は満足するが、未観測点における推定波形の時間方向の相関は満足されていない



図—9 (a) コレスキー分解により得られたものを再度支配方程式に通すことによって得られた時系列
(b) (a) の波形をクリッキングで求めた波形に加えた推定波形 (サンプル波 1)



図—10 一連の手法で得られるサンプル波の例 (サンプル波 2, 3)

い。

この点を解決するために、図—8 (a) に示されるような時々刻々得られる波形を再度式 (13) の支配方程式の入力として通し、これによってドライブされる波形 u^p をクリッキング波形に加えることにする。もちろん、推定誤差共分散 P は、その値を保持したまま操作を行う。対象とする P の対角成分、すなわち自己共分散 p を考えると、次式を導くことができる (Appendix C)。ただし、スカラー量 u^p はベクトル u_p の任意の成分である。

$$E[u^p u^p] = C(0) E[u^c u^c] = C(0) p \quad (27)$$

すなわち、推定波に補正波を加える場合には、補正波の振幅 u^p を $1/\sqrt{C(0)}$ 倍して加えればよい。ただし、本例では $C(0)=1$ の場合を扱っているので、そのままの形で加えることになる。これにより、式 (26) に代わる新たな形の式を得る。

$$u_k''(x_s) = u_k(x_s) + u_k^p(x_s) \quad (28)$$

こうして得られた波形を示したものが図—9 (a) であり、図—9 (b) は (a) の波形をクリッキングによ

る波形に加えた、本研究の最終結果である。さらに、観測波形は同じものを用いてもう 2 組のシミュレーションを行った結果を図—10 (a), (b) に示す。このように、与えられた確率場を満足するサンプル波形は無数に発生させることができる。

得られた波形の時間方向の相関は、次式のようになる。ただし、 τ_{ij} は 2 地点間の距離に相当する時間のずれである。ただし、スカラー量 u_k^p はベクトル u_k^p の任意の成分である。

$$\begin{aligned} C'' &= E[u''(x_s, t) u''(x_s, t + \tau)] \\ &= E[\{u(x_s, t) + u^p(x_s, t)\} \{u(x_s, t + \tau) + u^p(x_s, t + \tau)\}] \\ &= E\left[\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i, t) + u^p(x_s, t)\right\} \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i, t + \tau) + u^p(x_s, t + \tau)\right\}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\tau + \tau_{ij}) + p C(\tau) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、式 (B-5) と式 (10) より P の対角成分 p は

$$p = C(0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\tau_{ij}) \quad (30)$$

また、共分散関数が指数型のため、 $C(\tau + \tau_{ij}) = C(\tau)C(\tau_{ij})$ となること、および $C(0) = 1$ を考慮すると、式(29)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} C'' &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\tau) C(\tau_{ij}) \\ &+ \{C(0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\tau_{ij})\} C(\tau) \\ &= C(0) C(\tau) = C(\tau) \end{aligned} \quad (31)$$

すなわち、式(14)で表される関数に一致する。したがって、シミュレートされた波形は時間差および空間距離が大きくなるに従って相関が減少するような指数関数型の共分散関数を満足していることがわかる。これまでの例では $C(0) = 1$ の場合を扱ったが、本論文では $C(\tau)$ を含む確率場の特性は予め与えられているものという前提に立って理論を進めているため、 $C(0)$ が1以外の場合、観測波形を逐次 $1/\sqrt{C(0)}$ して一連の推定を行い、その結果を $\sqrt{C(0)}$ 倍すればよいことになる。

4. 結 論

本研究では、1階の確率微分方程式で規定される場を対象として、その共分散関数が指数型で表現される場合にカルマンフィルタとクリッキングを組み合わせることで、確率場の特性を満たすような条件付きシミュレーションを行った。本研究で得られた成果は以下の通りである。

(1) クリッキングの推定誤差共分散と、カルマンフィルタアルゴリズムで得られる推定誤差共分散は一致する。このことを用いて、カルマンフィルタとクリッキングを組み合わせたハイブリッド推定法のアルゴリズムを構築した。

(2) クリッキングにより重み係数を決定した後、これをカルマンフィルタアルゴリズムに組み込んで未測定点の波形をシミュレーションする方法を提示した。

(3) このとき、時間方向の相関を満足させるため、カルマンフィルタアルゴリズムで得られる推定値を再度支配方程式に通すことにより、空間方向の相関を満足する波形を作成した。また、これが与えられた確率場の特性を満たすことを確認した。

(4) 以上の結果より、与えられた確率場を満足するような波形の逐次推定が可能となった。すなわち、与えられた確率場の特性を満足しながら、観測点で時々刻々得られる波形を用いてリアルタイムで未観測点における波形を推定することが可能となった。

謝辞：本研究は、文部省科学研究費補助金試験研究(B)

(研究代表者：武蔵工業大学 星谷勝教授)の一環として行われたものである。有意義な御討論をいただいた星谷勝教授を始めとする研究メンバーの方々、および山口大学三浦房紀教授に感謝の意を表する次第である。

付 録

Appendix A

真値と推定値の誤差共分散値は

$$\sigma^2(x_s) = E\{[u(x_s) - u^*(x_s)]^2\}$$

$$\begin{aligned} &= C[u(x_s), u(x_s)] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C[u(x_s), u(x_i)] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C[u(x_i), u(x_j)] \end{aligned} \quad (A-1)$$

これを最小とする λ_k を求める式は次のようになる。

$$\frac{\partial \sigma^2(x_s)}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (A-2)$$

これより次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C[u(x_s), u(x_k)] &= \sum_{i=1}^n \lambda_i C[u(x_i), u(x_k)] \\ &\quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (A-3)$$

上式から λ_i を求め、これを式(6)に適用することにより $u^*(x_s)$ を求めることができる。

Appendix B

$$u^*(x_s) = \Lambda u(x_i) \quad (B-1)$$

$$u^{*T}(x_s) = u^T(x_i) \Lambda^T \quad (B-2)$$

ここに、 Λ は観測点数 n 、未観測点数 m とすると、次式のように式(6)の λ を成分とする行列となる。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \quad (B-3)$$

この関係を考慮すると、式(9)における右辺のマトリクス P は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} P &= E\{[u(x_s) - u^*(x_s)] [u^T(x_s) - u^{*T}(x_s)]\} \\ &= E[u(x_s) u^T(x_s)] - E[u(x_s) u^{*T}(x_s)] \\ &\quad - E[u^*(x_s) u^T(x_s)] + E[u^*(x_s) u^{*T}(x_s)] \\ &= Q_{ss} - Q_{si} \Lambda^T - \Lambda Q_{si} + \Lambda Q_{ii} \Lambda^T \\ &= Q_{ss} - 2Q_{si} \Lambda^T + \Lambda Q_{ii} \Lambda^T \end{aligned} \quad (B-4)$$

ところで式(A-3)は次式のように表現できる。

$$Q_{si} = \Lambda Q_{ii} \quad (B-5)$$

したがって、上式を Λ について解き、式(B-4)に代入することにより P の最終形として式(10)を得る。

Appendix C

対象とする P の対角成分 p 、すなわち自己共分散を考える。まず、式(13)より

$$\begin{aligned} u_1^i &= \Phi u_0^i + b u_0^i \sqrt{\Delta t} \\ u_2^i &= \Phi u_1^i + b u_1^i \sqrt{\Delta t} \\ &\dots \\ u_{k+1}^i &= \Phi u_k^i + b u_k^i \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (C-1)$$

いま、時刻 $k+1$ における任意の 2 点 i, j の共分散を考える。 u_k^i, u_k^j に関する条件は

$$E[u_k^i] = E[u_k^j] = 0 \quad (C-2)$$

$$E[u_k^i u_k^j] = 0 \quad (C-3)$$

推定誤差共分散の値としては、時間更新のたびに状態量の共分散を初期値として与えているので、図-2 の観測更新（流れ図の 6. 推定誤差共分散マトリクスの計算）に於いて、 $P_{k+1|k}$ には逐次同じ値が入ることになり、したがって観測更新後の値は時間によらず一定となる。このため、空間方向の相関は次式で表される。ただし、 p は P の自己共分散に対応する 1 つの対角成分である。

$$E[u_0^i u_0^j] = E[u_1^i u_1^j] = \dots = E[u_k^i u_k^j] = p \quad (C-4)$$

これより、 $E[u_{k+1}^i u_{k+1}^j]$ は

$$\begin{aligned} E[u_k^i u_k^j] &= \Phi^2 E[u_{k-1}^i u_{k-1}^j] + b^2 \Delta t E[u_{k-1}^i u_{k-1}^j] \\ E[u_{k+1}^i u_{k+1}^j] &= \Phi^2 E[u_k^i u_k^j] + b^2 \Delta t E[u_k^i u_k^j] \\ &= \Phi^4 E[u_{k-1}^i u_{k-1}^j] \\ &\quad + \Phi^2 b^2 \Delta t E[u_{k-1}^i u_{k-1}^j] + b^2 \Delta t E[u_k^i u_k^j] \\ &\dots \\ E[u_{k+1}^i u_{k+1}^j] &= \Phi^{2(k+1)} E[u_0^i u_0^j] \\ &\quad + (\Phi^{2k} + \dots + \Phi^0) b^2 \Delta t E[u_0^i u_0^j] \\ &= \Phi^{2(k+1)} E[u_0^i u_0^j] \\ &\quad + \frac{1 - \Phi^{2k}}{1 - \Phi^2} b^2 \Delta t p \end{aligned} \quad (C-5)$$

上式は $\Phi^2 < 1$ のとき $k \rightarrow \infty$ なる定常状態で収束する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi^{2k}}{1 - \Phi^2} b^2 \Delta t p = \frac{b^2 \Delta t}{1 - \Phi^2} p \quad (C-6)$$

ここで

$$\Phi = 1 + a \Delta t + \frac{a^2}{2!} \Delta t^2 + \dots \quad (C-7)$$

を式 (C-6) に代入し、 Δt^2 以降の項を無視すると

$$\frac{b^2 \Delta t}{1 - \Phi^2} p = -\frac{b^2}{2a} p = C(0) p \quad (C-8)$$

これより式 (27) が導かれる。

参考文献

- 1) 川上英二：一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーション，土木学会論文集，第 410 号 / I-12, pp.435-443, 1989.
- 2) 川上英二，小野牧夫：一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション，土木学会論文集，第 441 号 / I-18, pp.167-175, 1992.
- 3) 川上英二，小野牧夫：多変量 AR モデルを用いた観測記録を含む時空間地震波形のシミュレーション，埼玉大学

工学部建設系研究報告，第 22 巻，pp.115-127, 1992.

- 4) Kameda, H. and H. Morikawa : An interpolation stochastic process for simulation of conditional random fields, *Probabilistic Eng. Mech.*, 7(4), pp.243-254, 1992.
- 5) Kameda, H. and H. Morikawa : Conditioned stochastic processes for conditional random fields, *ASCE Jour. of Eng. Mech.*, Vol.120, No.4, pp.855-875, 1994.
- 6) 鈴木 誠，石井 清：土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法，土木学会論文集，第 394 号，pp.97-104, 1988.
- 7) 鈴木 誠：空間的に分布する地盤物性値の統計量推定，JCOSSAR '91, 1991.
- 8) 鈴木 誠：地盤物性値の空間分布のモデル化と最適問題，第 3 回システム最適化シンポジウム，1993.
- 9) 清野純史，土岐憲三，佐藤忠信：不整形地盤上における地震動の時空間分布特性，第 20 回地震工学研究発表会講演概要集，pp.157-160, 1989.
- 10) 清野純史，土岐憲三，佐藤忠信：堆積層厚データ処理のためのサンプリング点の最適配置について，第 26 回土質工学研究発表会講演概要集，pp.195-198, 1991.
- 11) Vanmarcke, E.H. and Fenton, G.A. : Conditioned simulation of local fields of earthquake ground motion, *Structural Safety*, Vol.10, 1991.
- 12) 土岐憲三，佐藤忠信，清野純史，水谷治弘：非均質な確率場を考慮した時空間波形のシミュレーション，土木学会第 47 回年次学術講演会講演概要集，pp.856-857, 1992.
- 13) 清野純史，土岐憲三，佐藤忠信，今林浩史：非均質確率場における時空間波形の条件付シミュレーション，土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集，pp.984-985, 1993.
- 14) 星谷 勝：条件付き確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集，第 459 号，pp.113-118, 1993.
- 15) 丸山 収：条件付き確率場の補間理論における最尤推定法と Kalman Filter についての基礎考察，土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集，pp.980-981, 1993.
- 16) 野田 茂，星谷 勝：対数正規確率場における条件付きブロック推定，土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集，pp.1000-1001, 1994.
- 17) 星谷 勝，野田 茂，笠野智成：非正規確率場における補間問題の本質と条件付きシミュレーション，土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集，pp.994-995, 1994.
- 18) 清野純史，三浦房紀，中野 崇：カルマンフィルタを用いた条件付き確率場のシミュレーション，土木学会中国四国支部第 46 回研究発表会講演概要集，pp.84-85, 1994.
- 19) Sato, T. and H. Miyanishi : Instantaneous conditional simulation of earthquake ground motion, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Earthq. Resistant Construction and Design*, Vol.1, pp.85-92, 1994.
- 20) 丸山 収，星谷 勝，山口和英：定常，均一ガウス確率場の条件付き地震波動シミュレーション，土木学会論文集，No.489 / I-27, pp.177-185, 1994.
- 21) Toki, K., T. Sato and J. Kiyono : Identification of Structural Parameters and Input Ground Motion from Response Time Histories, *Proc. of JSCE, Struc. Eng./Earthq. Eng.*, No.410, pp.243-251, 1989.

(1994.11.7 受付)

SIMULATION OF STOCHASTIC WAVES BY HYBRID METHOD OF KALMAN FILTER AND KRIGING TECHNIQUES

Junji KIYONO and Makoto SUZUKI

Recently, many methods are proposed for the simulation of stochastic waves involving deterministic time functions. We here presented a hybrid method of Kalman filter and kriging techniques with which the stochastic waves in a time-space random field are simulated. Kriging provides a minimum-variance unbiased linear estimators of physical parameters especially in the space random field. Estimation error covariance for the kriging is coincident with that for Kalman filter. By using the relation, we proposed an on-line hybrid estimation technique which satisfies the given covariance function of both time and space field. We have shown that the simulated waves satisfy the characteristics of the given random field theoretically.