

骨組構造物の応答感度係数特性に基づく感度解析法

榎本覚雄¹・新延泰生²

¹正会員 工修 (株)大東設計コンサルタント (〒101 千代田区神田佐久間町3-38第5東ビル)

²正会員 工博 東洋大学教授 工学部環境建設学科 (〒350 川崎市鯨井2100)

本研究は静的な荷重を受ける任意の骨組構造物における新しい感度解析法を提案している。この新しい感度解析法は適合法的な考え方に基づいており、静定基本系に対する一度の感度解析を基に、任意の部材断面に対して不静定次数に等しい次元を有する連立方程式を解くだけで不静定構造物の感度解析および構造解析が行えるという特徴を有している。本手法の計算効率については、差分法や直接微分法といった従来法との比較に対しても十分な有用性を持つことを確認している。

Key Words : sensitivity analysis, characteristics of sensitivity coefficients, statically indeterminate structure, compatibility method

1. はじめに

筆者らの一人は、文献1)において骨組構造物の静的応答感度係数の各次数で、基準化した感度係数の骨組全体に対する総和が定数となり、その値は選択した感度変数により異なるという感度係数特性を示した。そしてその特性を利用して従来の方法とは異なる不静定トラスの感度解析法を紹介した。しかし文献1)では、3部材不静定トラスに対する数値計算例により基本的な考え方を示したのみで、一般的なアルゴリズムの表現や従来法との比較などは行っていない。

そこで、本研究はこの新しい感度解析法を任意の不静定骨組構造に対し拡張し、一般的なアルゴリズムを記すとともに従来法との計算効率の比較を行い、提案した手法の有用性を検証することを第一の目的とする。ここで従来法としては、一般的な差分法に基づく感度解析法と、変位法による状態方程式を感度変数で偏微分する直接微分法を考えている。

この不静定構造に対する感度解析法は適合法的な考え方に基づいているが、以下に述べるような顕著な特徴を有している。逐次的に感度解析を行う場合、まず静定基本系に対して節点変位の感度係数を求めておけば、重ね合わせにより原不静定構造の節点変位の感度係数が得られ、次回以降の感度係数は感度変数の値を代入し不静定次数だけの次元の適合方程式を解くだけで求められること

にある。また、本手法によれば節点変位の感度係数の他に節点変位、部材断面力、そして部材断面力の感度係数も従来の変位法を用いずに計算することができることも示している。

静的な荷重を受け線形弾性挙動を示す骨組構造物の感度解析を行う際の変数としては部材断面積 A 、断面2次モーメント I 、ねじり定数 J およびそれらの逆数が用いられている。本論文においても文献1)と同様に感度解析に用いる変数を設計に関する変数と区別する意味で感度変数と呼んでいる。これらの感度変数は実際の構造物においてはそれぞれが独立な変数である。しかし、文献1)では解析を簡便なものとするために、 $I = \alpha A^2$ といった関係を仮定することにより感度係数特性を誘導しているため、特にラーメン構造のように独立な感度変数が複数ある場合、基準化した感度係数の骨組全体に対する総和(特性値)が厳密には定数とはならないという問題点があった。このため、提案した新しい感度解析法から得られる感度係数や応答が厳密値と一致しない場合もあるため、本研究では特性値が厳密に定数となるための条件として、断面レベルにおけるすべての感度変数を相互に独立であるとして感度係数特性を再度誘導している。これらの独立な感度変数に対する感度係数の利用に際して、感度変数の間の相互関係が設定されているならば、それぞれの感度係数の線形結合の形で相互関係を考慮した感度係数は簡単に求められる。

本研究では、適合法的手法によって、静定基本系に対する一度の感度解析を基に、任意の部材断面に対して不静定次数に等しい次元を有する連立方程式を解くだけで不静定骨組構造物の感度解析および構造解析が行えることを示し、従来法との比較を行い有用性を検証した。

2. 変位法による骨組構造物の静的構造解析

変位法による静的な状態方程式は一般に

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{z} = \mathbf{F} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ は感度変数ベクトル、 $\mathbf{z}=(z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ は応答節点変位を表すベクトルで、挙動変数ベクトルと呼ぶ。また、 $\mathbf{F}=(F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ は節点外力ベクトル、 \mathbf{K} は剛性マトリクス($n \times n$)で感度変数 $X_i, i=1, 2, \dots, m$ の関数である。骨組構造物の場合、断面レベルでの感度変数 X_i は部材断面の断面積 A_i 、断面二次モーメント I_i 、ねじり定数 J_i 等が考えられるが、これらの感度変数は互いに独立である場合を考える²⁾。ここで X_i を X_{M_i} ($M=1, 2, \dots, s$)と表せば、下記に示す各構造における X_{M_i} は

- ・トラス構造の場合：
 $s=1, X_{1i}=A_i, (i=1, 2, \dots, m)$
- ・平面梁構造の場合：
 $s=1, X_{1i}=I_i, (i=1, 2, \dots, m)$
- ・平面ラーメン構造の場合：
 $s=2, X_{1i}=A_i, X_{2i}=I_i, (i=1, 2, \dots, m)$
- ・面外ラーメン構造の場合：
 $s=2, X_{1i}=I_i, X_{2i}=J_i, (i=1, 2, \dots, m)$
- ・立体ラーメン構造の場合：
 $s=3, X_{1i}=A_i, X_{2i}=I_i, X_{3i}=J_i, (i=1, 2, \dots, m)$

となる。ここで、 s は独立変数の数である。また、右辺の外力ベクトル \mathbf{F} は自重や温度変化の影響を考慮する場合、感度変数の関数となる。

e 部材の断面力 \mathbf{r}_e は

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_{0e}(\mathbf{X}) + \mathbf{k}_e \mathbf{z}_e \quad (2)$$

で表される。右辺の1項目は自重や温度変化による断面力を示し、2項目は外力による節点変位に伴う断面力を示す。 \mathbf{k}_e は e 部材の要素剛性マトリクス、また、 \mathbf{z}_e は e 部材の節点変位ベクトルを表す。

3. 骨組構造物の静的感度解析

(1) 差分法による感度解析 (FDM)

差分法 (Finite Difference Method) による近似的な感度解析は以下のように示される。

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_{M_i}} \approx \frac{\mathbf{g}(X_{M_i} + \Delta X_{M_i}) - \mathbf{g}(X_{M_i})}{\Delta X_{M_i}} \quad (3)$$

ここに、 \mathbf{g} は変位や断面力などの応答を表す。

(2) 直接微分法による1次感度解析 (DDM)

直接微分法 (Direct Differentiation Method) により解析的に感度係数が計算される。感度変数 X_{M_i} の変動 $\delta X_{M_i}, i=1, 2, \dots, m$ に対して式(1)は

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{z} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{M_i}} \mathbf{z} \delta X_{M_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_{M_i}} \delta X_{M_i} \quad (4)$$

となる。ここで、挙動変数ベクトル \mathbf{z} を従属変数と考え、独立な感度変数 \mathbf{X} で表すと $\delta \mathbf{z}$ は $(\partial \mathbf{z} / \partial X_{M_i}) \delta X_{M_i}$ と表されるので式(4)は次のようになる。

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_{M_i}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_{M_i}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{M_i}} \mathbf{z}, (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

式(5)において左辺の $\partial \mathbf{z} / \partial X_{M_i}$ は i 部材の感度変数 X_{M_i} の微小変動に対する各節点変位の変動量、すなわち節点変位の感度係数ベクトルを示す。式(5)は式(1)と同じように剛性マトリクスを係数マトリクスとしている。従って、式(1)より \mathbf{z} が求められ式(5)の右辺が全て与えられれば、式(1)を解くサブルーチンを利用することにより、差分法に比べて非常に効率的に $\partial \mathbf{z} / \partial X_{M_i}$ が計算される。

また、 i 部材の感度変数 X_{M_i} の微小変動に対する e 部材の断面力 \mathbf{r}_e の感度係数ベクトル $\partial \mathbf{r}_e / \partial X_{M_i}$ は式(2)より

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial X_{M_i}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{0e}}{\partial X_{M_i}} + \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial X_{M_i}} \mathbf{z}_e + \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{z}_e}{\partial X_{M_i}} \quad (6)$$

で示される。

感度変数の微小変動に対する応答 \mathbf{g} の変動分は感度係数を用いて次式で表される。

$$\Delta \mathbf{g} = \sum_M \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_M} \Delta X_M \quad (7)$$

今、各感度変数の間に $X_{M_i} = f(X_N)$ なる関係があれば、それを考慮した X_N に関する感度係数 $\tilde{\partial \mathbf{g}} / \partial X_N$ は線形結合の形で次式で求められる。

$$\tilde{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_N}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_N} + \sum_{(M \neq N)} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_M} \frac{dX_M}{dX_N} \quad (8)$$

(3) 直接微分法による高次感度解析

式(5)は式(1)の両辺を感度変数 X_{M_i} で直接微分することにより求められた。さらに式(5)の両辺を任意の感度変数で偏微分すれば2次の感度係数に関する方

程式が得られる。そして得られた式を任意の感度係数で次々に偏微分していくことにより、次のような高次感度係数に関する方程式が得られる。

(a) 2次感度係数

$$\mathbf{Kz}_{Mi1Mi2} = \mathbf{F}_{Mi1Mi2} - \mathbf{K}_{Mi1Mi2} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{Mi1} \mathbf{z}_{Mi2} - \mathbf{K}_{Mi2} \mathbf{z}_{Mi1} \quad (9)$$

ここで式中の、 $Mi1$ および、 $Mi1, Mi2$ 等は $\partial(\)/\partial X_{Mi1}$ および $\partial^2(\)/\partial X_{Mi1} \partial X_{Mi2}$ を表す。

(b) 3次感度係数

$$\begin{aligned} \mathbf{Kz}_{Mi1Mi2Mi3} = & \mathbf{F}_{Mi1Mi2Mi3} - \mathbf{K}_{Mi1Mi2Mi3} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{Mi1Mi2} \mathbf{z}_{Mi3} \\ & - \mathbf{K}_{Mi1Mi3} \mathbf{z}_{Mi2} - \mathbf{K}_{Mi2Mi3} \mathbf{z}_{Mi1} - \mathbf{K}_{Mi1} \mathbf{z}_{Mi2Mi3} \\ & - \mathbf{K}_{Mi2} \mathbf{z}_{Mi1Mi3} - \mathbf{K}_{Mi3} \mathbf{z}_{Mi1Mi2} \end{aligned} \quad (10)$$

(c) p 次感度係数

$$\begin{aligned} \mathbf{Kz}_{Mi1 \dots Mip} = & \mathbf{F}_{Mi1 \dots Mip} - \mathbf{K}_{Mi1 \dots Mip} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{Mi1 \dots Mi(p-1)} \mathbf{z}_{Mip} \\ & - \mathbf{K}_{Mi1 \dots Mi(p-2)Mip} \mathbf{z}_{Mi(p-1)} - \dots - \mathbf{K}_{Mi2 \dots Mip} \mathbf{z}_{Mi1} \\ & - \mathbf{K}_{Mi1 \dots Mi(p-2)} \mathbf{z}_{Mi(p-1)Mip} - \mathbf{K}_{Mi1 \dots Mi(p-3)Mi(p-1)} \\ & \mathbf{z}_{Mi(p-2)Mip} - \dots - \mathbf{K}_{Mi3 \dots Mip} \mathbf{z}_{Mi1Mi2} \\ & \vdots \\ & - \mathbf{K}_{Mi1Mi2} \mathbf{z}_{Mi3 \dots Mip} - \mathbf{K}_{Mi1Mi3} \mathbf{z}_{Mi2Mi4 \dots Mip} \\ & - \dots - \mathbf{K}_{Mi(p-1)Mip} \mathbf{z}_{Mi1 \dots Mi(p-2)} - \mathbf{K}_{Mi1} \mathbf{z}_{Mi2 \dots Mip} \\ & - \mathbf{K}_{Mi2} \mathbf{z}_{Mi1Mi3 \dots Mip} - \dots - \mathbf{K}_{Mip} \mathbf{z}_{Mi1 \dots Mi(p-1)} \end{aligned} \quad (11)$$

4. 感度係数特性

節点外力ベクトル \mathbf{F} は感度変数 $X_i, i=1,2,\dots,m$ の関数でないとする、 $\partial\mathbf{F}/\partial X_{Mi}=0$ となり、式(5)より i 部材の感度変数の X_{Mi} の変動に対する節点変位 z_h の1次感度係数は、

$$\frac{\partial z_h}{\partial X_{Mi}} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} \mathbf{z} \right)_h \quad (12)$$

で表される。右辺の $(\)_h$ は第 h 番目の自由度に対応するものを示す。式(12)の両辺に X_{Mi}/z_h を乗じ、 i について1から m まで総和をとり、 M についても総和をとれば

$$\begin{aligned} \sum_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_{Mi}} \frac{X_{Mi}}{z_h} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_{i1}} \frac{X_{i1}}{z_h} + \dots + \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_{Mi}} \frac{X_{Mi}}{z_h} \\ &= - \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{i1}} X_{i1} \right) + \dots + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} X_{Mi} \right) \right) \mathbf{z} \right\}_h \frac{1}{z_h} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。なお、上式の左辺の $(\partial z_h / \partial X_{Mi}) X_{Mi} / z_h$ は無次元化された感度係数となっている。式(13)の右辺の

$$\begin{aligned} \sum_M \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} X_{Mi} \right) & \text{は} \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{i1}} X_{i1} \right) + \dots + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} X_{Mi} \right) &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (14)$$

となることは剛性マトリクスの要素の構成から明らかである。したがって、式(13)は式(15)となる。

$$\sum_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_h}{\partial X_{Mi}} \frac{X_{Mi}}{z_h} = -(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{Kz})_h \frac{1}{z_h} = -z_h \frac{1}{z_h} = -1 \quad (15)$$

式(15)は任意の骨組構造物に対して成立する関係で、無次元化感度係数を骨組要素全体について総和したものは定数となることを示している。これを感度係数特性と呼ぶ。

上述の感度係数特性は任意の高次感度係数に対しても成立するが、定数の値は感度次数により異なる。2次感度係数の場合を以下に示す。まず、式(9)より

$$\frac{\partial^2 z_h}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} = \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_{Mj}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mj}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_{Mi}} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} \right) \right\}_h \quad (16)$$

を得る。両辺に $X_{Mi} X_{Mj} / z_h$ を乗じ、 i, j について1から m まで総和をとり、 M についても総和をとれば

$$\begin{aligned} \sum_M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} \frac{X_{Mi} X_{Mj}}{z_h} &= \left[\mathbf{K}^{-1} \left\{ - \sum_M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mi}} X_{Mi} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_{Mj}} X_{Mj} \right) \right. \right. \\ & \quad - \sum_M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_{Mj}} X_{Mj} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_{Mi}} X_{Mi} \right) \\ & \quad \left. \left. - \sum_M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} X_{Mi} X_{Mj} \right) \mathbf{z} \right\} \right]_h \frac{1}{z_h} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。式(17)の右辺の $\{ \}$ 内を計算するに当たり

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_{i1} \partial X_{j1}} X_{i1} X_{j1} + \\ \dots + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} X_{Mi} X_{Mj} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

が成立することおよび式(14)、(15)を考慮すれば式(17)は

$$\begin{aligned} \sum_M \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_{Mi} \partial X_{Mj}} \frac{X_{Mi} X_{Mj}}{z_h} &= [\mathbf{K}^{-1} \{ -\mathbf{K}(-\mathbf{z}) - \mathbf{K}(-\mathbf{z}) \}]_h \frac{1}{z_h} = 2 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

骨組構造物の感度解析では感度変数の応答に対する線形性を良くするために感度変数 X の逆数すなわち $R_X=1/X$ を感度変数とすることがよく行われる。この場合、無次元化感度係数の骨組構造物に対する総和を求めるときに、以下の感度変数 X とその逆数 R_X との間の関係式を用いれば簡単に求められる。

$$\frac{\partial z_h}{\partial R_{X_i}} = -\frac{\partial z_h}{\partial X_i} X_i^2 \quad (20)$$

Table 1 Sum of Dimensionless Sensitivity Coefficients

ORDER	SENSITIVITY VARIABLE X	
	X	$R_{X_i=1}/X_i$
1	-1	1
2	2	0
3	-6	0
4	24	0
p	$(-1)^p p!$	0

$$\frac{\partial^2 z_h}{\partial R_{X_i} \partial R_{X_j}} = \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_i \partial X_j} X_i^2 X_j^2 + 2 \frac{\partial z_h}{\partial X_i} \delta_{ij} X_i X_j^2 \quad (21)$$

(δ_{ij} : Kronecker's delta)

任意の p 次感度係数 ($1 \leq p \leq m$) に対する総和の値は次式で表される。

$$\sum_M \sum_{M_i=1}^m \sum_{M_j=1}^m \dots \sum_{M_p=1}^m \frac{\partial^p z_h}{\partial X_{M_1} \partial X_{M_2} \dots \partial X_{M_p}} \frac{X_{M_1} X_{M_2} \dots X_{M_p}}{z_h} \quad (22)$$

$$= (-1)^p p!$$

上式の証明は文献1)のAppendixを参照されたい。

以上の結果をまとめるとTable 1のようになる。

5. 感度係数特性に基づく感度解析法 (SACM)

応答感度係数が荷重に対して線形である性質と適合法の考え方を基に、不静定構造物の応答感度係数が求められる (SACM : Sensitivity Analysis based on Compatibility Method)。静定基本系に対して外力 F および単位の大さの仮想荷重 $Q_k=1$ による応答感度係数が得られれば、応答感度係数の荷重に対する線形性から重ね合わせの理論を用いて外力 F と不静定力 Q_k に対する応答節点変位 z_j の感度変数 X_{M_i} (この場合 X_M としては $R_{X_i}=1/X_i$ を考える) に対する感度係数は次のように表される。

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} Q_k \quad (23)$$

ここで、 ℓ は不静定次数である。式(23)の右辺の第1項は外力 F による静定基本系の応答感度係数を示し、第2項は単位の大さの仮想荷重 $Q_k=1$ による静定基本系の応答感度係数を示す。従って式(23)は静定基本系の外力 F と不静定力 Q_k による任意の節点変位の感度係数を表している。式(23)中の $(\cdot)_F, (\cdot)_{Q_k}$ の添字は荷重の状態を表している。静定構造に対し感度変数を逆数とすることにより、ここで考えている感度係数は感度変数に依存しない定数となる。Table 1 より感度変数を逆数とすれば次式が得られる。

$$\sum_{M_i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \frac{X_{M_i}}{z_j} = 1 \rightarrow z_j = \sum_{M_i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} X_{M_i} \quad (24)$$

感度係数特性である式(24)の右辺の $\partial z_j / \partial X_{M_i}$ に式(23)を代入すれば、静定基本系の感度係数と感度変数に

よって応答を表わすことができる。

$$z_j = \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} Q_k \right\} X_{M_i} \quad (25)$$

式(25)を利用して不静定力 Q_k が作用する節点における変位 z_h ($h=1,2,\dots,\ell$) の適合条件式を導く。なお、 z'_h は適合させる対象となる節点変位で z_h とは対をなすものである。

$$\begin{aligned} z_h &= \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} Q_k \right\} X_{M_i} \\ &= \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} Q_k \right\} X_{M_i} = z'_h \quad (26) \end{aligned}$$

この適合条件式を解けば不静定力 Q_k が以下のようにして求められ、式(26)は次式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} &\sum_M \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} X_{M_i} \right] - \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} X_{M_i} \right] \{ Q_k \} \\ &= \sum_M \left\{ \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F X_{M_i} \right] - \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F X_{M_i} \right] \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

さらに整理すれば、次式のような

$$[G] \{ Q_k \} = \{ H_1 \} \quad (28)$$

不静定次数の次元を有する連立方程式となる。ここで係数マトリクス[G]は対称マトリクスである。式(24)を用いることにより、係数マトリクス[G]が感度変数 X_{M_i} に関して数学的に陽な形で表現されている。さらに適合条件式(28)を感度変数で偏微分することにより不静定力 Q_k の感度係数が求められる。

$$\frac{\partial G}{\partial X_{M_i}} \{ Q_k \} + [G] \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M_i}} \right\} = \sum_M \left\{ \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F - \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F \right\} \quad (29)$$

$$[G] \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M_i}} \right\} = \{ H_2 \} \quad (30)$$

ここで、

$$\{ H_2 \} = \sum_M \left\{ \left[\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} - \frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F - \left[\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} - \frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k} \right] \right] \{ Q_k \} \right\} \quad (31)$$

式(30)の左辺の係数マトリクス[G]は式(28)のものと同じである。また、式(25)の両辺を Q_k で偏微分すれば

$$\frac{\partial z_j}{\partial Q_k} = \sum_M \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} X_{M_i} \quad (32)$$

を得る。

以上より、原系の不静定構造物の節点変位の感度係数は

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M_i}} \right)_{Q_k=1} Q_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial z_j}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M_i}} \quad (33)$$

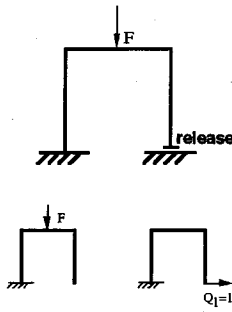


Fig. 1 外的不静定に対する静定基本系

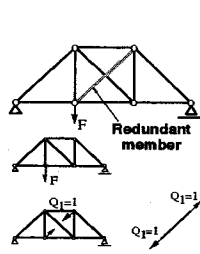


Fig. 2 トラス構造に対する静定基本系

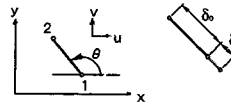


Fig. 3 節点間の距離

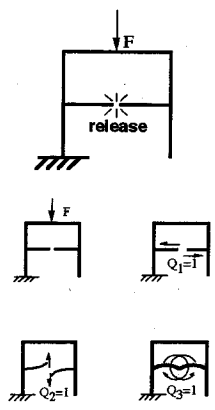


Fig. 4 ラーメン構造に対する静定基本系

で示される。ここで、式(33)の左辺 $\partial z_j / \partial X_{Mi}$ は原系である l 次不静定構造系の節点変位 z_j の 1 次感度係数である。右辺の第 1 項および第 2 項は静定基本系に対する感度係数を示し、第 3 項は不静定力 Q_k の変動による感度係数の変動分を表している。

以上の計算過程に続いて節点変位の感度係数の他に節点変位、部材断面力、そして部材断面力の感度係数も求められることを示す。

節点変位は式(33)より得られた節点変位の感度係数を用いて式(24)より求められる。また、 j 部材の部材断面力 r_j は静定基本系の r_{Qk} と不静定力 Q_k より

$$r_j = (r_{0j})_F + \sum_{k=1}^l (r_{0j})_{Q_{k=1}} Q_k \quad (34)$$

となる。上式の両辺を感度変数 X_{Mi} で偏微分すれば r_j と $\partial Q_k / \partial X_{Mi}$ より部材断面力の感度係数が得られる。

$$\frac{\partial r_j}{\partial X_{Mi}} = \sum_{k=1}^l (r_{0j})_{Q_{k=1}} \frac{\partial Q_k}{\partial X_{Mi}} \quad (35)$$

6. 適合条件

5. で述べた新しい感度解析法は応力法の考え方に基づいた手法である。したがって、通常の応力法と同様に適切な不静定力と静定基本系を設定し適合条件を考える必要がある。適合条件式(27)を計算するのに必要な、静定基本系の感度係数 $\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{Mi}} \right)_F, \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{Mi}} \right)_{Q_{k=1}}$ ($h=1, 2, \dots, l, k=1, 2, \dots, l$) は以下に述べる考え方であらかじめ求めておく。静定基本系に対する感度係数は感度変数に独立であるため、その値が定数値となることは本手法における重要な特徴である。解析に先立ち 1 度だけ実行されるこの計算過程を本手法においては前処理 (Pre-process) と呼ぶこととする。前処

理は静定基本系に対して行われるため直接微分法、差分法とも同じ値が得られるが、本手法では効率的な直接微分法を用いている。このことは、後述の 7. 計算効率の項で説明している。一般的な構造系の適合条件を考えるにあたり、支点の拘束条件による外的不静定と剩余部材による内的不静定に分けて考える。

(1) 外的不静定に対する適合条件

外的不静定に対しては、Fig. 1 に示すように支点の拘束を解放してその変位を 0 とする適合条件を考える。つまり、式(26)において $z_h = z'_h = 0$ となる。したがって、式(27), (31)において

$$\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{Mi}} \right)_F = 0, \quad \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{Mi}} \right)_{Q_{k=1}} = 0 \quad (36)$$

として式(28), (30)の $[G], \{H_1\}, \{H_2\}$ を計算する。これは式(27), (31)が内的不静定に対して表現されたものであり、外的不静定の場合は対となる節点変位が支点であることを表している。

(2) トラス構造の内的不静定に対する適合条件

トラス構造の場合、Fig. 2 のようにに剩余部材を除去した静定基本系を考えて除去した部材の部材長 δ'_h の適合を考える。つまり、式(26)において $z_h = \delta'_h = \delta'_h = z'_h$ となる。部材長 (節点間の距離) の感度係数は節点変位の感度係数から次式により求める (Fig. 3)。

$$\frac{\partial \delta'_h}{\partial X_{Mi}} = \cos \theta \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_{Mi}} - \frac{\partial u_1}{\partial X_{Mi}} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial X_{Mi}} - \frac{\partial v_1}{\partial X_{Mi}} \right) \quad (37)$$

除去された剩余部材自身の部材長 δ'_h の感度係数は

$$\frac{\partial \delta'_h}{\partial X_{Mi}} = \frac{L}{E} \quad (38)$$

The number of times of Assignment Computation

SACM (Sensitivity Analysis based on Compatibility Method)

\square^N : N times loop

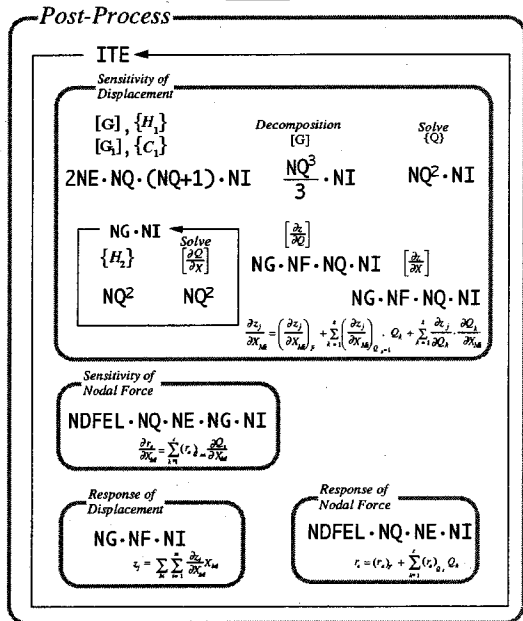
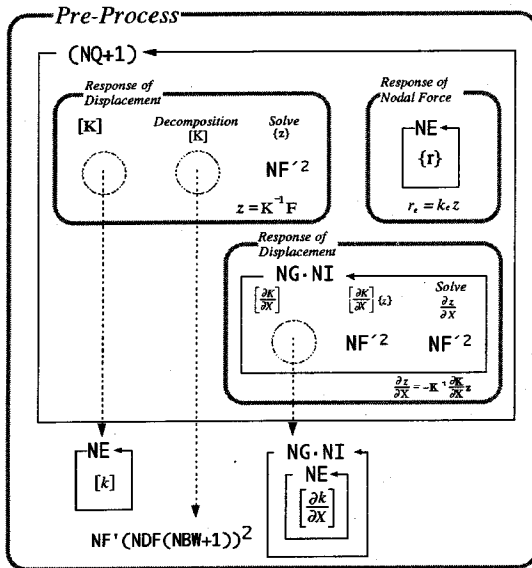


Fig.6 SACMの演算回数

Table 2 Common Parameter

NDF	The number of degree of freedom per node (=2,TRUSS=3,FRAME)
NNE	The number of nodes per element (=2, Framed structure)
NDFEL	The total number of degree of freedom for element (=NDF*NNE)
NBW	Half band width of Stiffness Matrix
NN	The number of nodes
NE	The number of elements
NG	The number of group (design variables)
NQ	The degree of redundancy
NF	The total number of degree of freedom for the global structure (Original Model)
NF'	The total number of degree of freedom for the global structure (Statically Model)
NI	The number of independent variables in structures ($M : X_{Mj}$)
ITE	The number of times of design modification (Iteration for optimizing)

Depended on an algorithm

$[k]$	Calculation of element stiffness matrix
$\{r\}$	Calculation of nodal force
$\left[\frac{\partial k}{\partial X} \right]$	Calculation of derivative stiffness matrix
$\left[\frac{\partial r}{\partial X} \right]$	Calculation of sensitivity of nodal force

となる。ここで、 L は部材長、 E はヤング係数である。したがって、式(27), (31)において

$$\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_m} \right)_F = \left(\frac{\partial \delta_h}{\partial X_m} \right)_F, \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_m} \right)_F = 0, \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_m} \right)_{Q_{h+1}} = \left(\frac{\partial \delta_h}{\partial X_m} \right)_{Q_{h+1}}$$

$$\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_m} \right)_{Q_{h+1}} = \left(\frac{\partial \delta'_h}{\partial X_m} \right)_{Q_{h+1}}, (h=k) \quad \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_m} \right)_{Q_{h+1}} = 0, (h \neq k) \quad (39)$$

として式(28), (30)の $[G], \{H_1\}, \{H_2\}$ を計算する。

(3) ラーメン構造の内的不静定に対する適合条件

ラーメン構造の場合、Fig.4に示すように樹状構造の線図には閉じた経路あるいは輪 (ring) が一つもないよう部材を切断した静定基本系³⁾を考えその切断点での節点変位 z_h の適合を考える。つまり、式(26)において $z_h = z'_h$ となる。

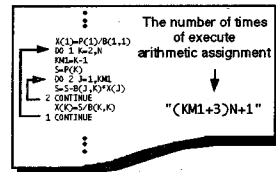


Fig.5 演算回数

7. 計算効率

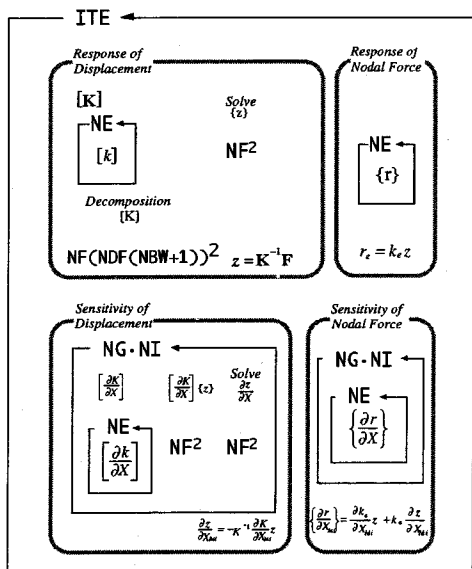
本手法 (SACM) の計算効率を評価するために従来法である差分法 (FDM) と直接微分法 (DDM) との比較を行う。計算効率は設計最適化の過程や通常的设计において逐次的に構造解析や感度解析が行われることを前提として、節点変位と断面力およびそれぞれの感度係数を計算するのに要する計算量を比較することにより評価する。計算量は計算機のプログラムにより記述されるループの中で実行される四則演算による算術代入命令回数の総数を数えることで考える (Fig.5)。各手法の演算回数をFig.6,7に示し、これらの図で用いた変数の意味をTable 2に示す。

Table 2でNF'はラーメン構造において静定基本系とするために切断された節点の自由度が増えることを考慮するものである。Fig.6,7は2.および5.で定式化された式の添字を見ることで表したものであるが、解析の主たる演算となる連立方程式の演算は係数マトリクスの性質により様々である。そこで、

The number of times of Assignment Computation

\boxed{N} : N times loop

DDM (Direct Differentiation Method)



FDM (Finite Difference Method)

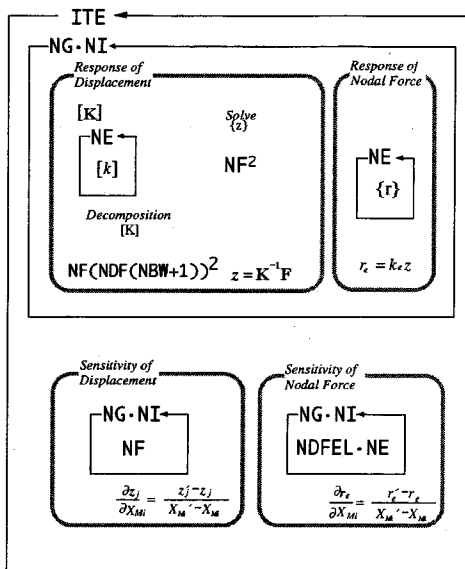


Fig.7 DDMとFDMの演算回数

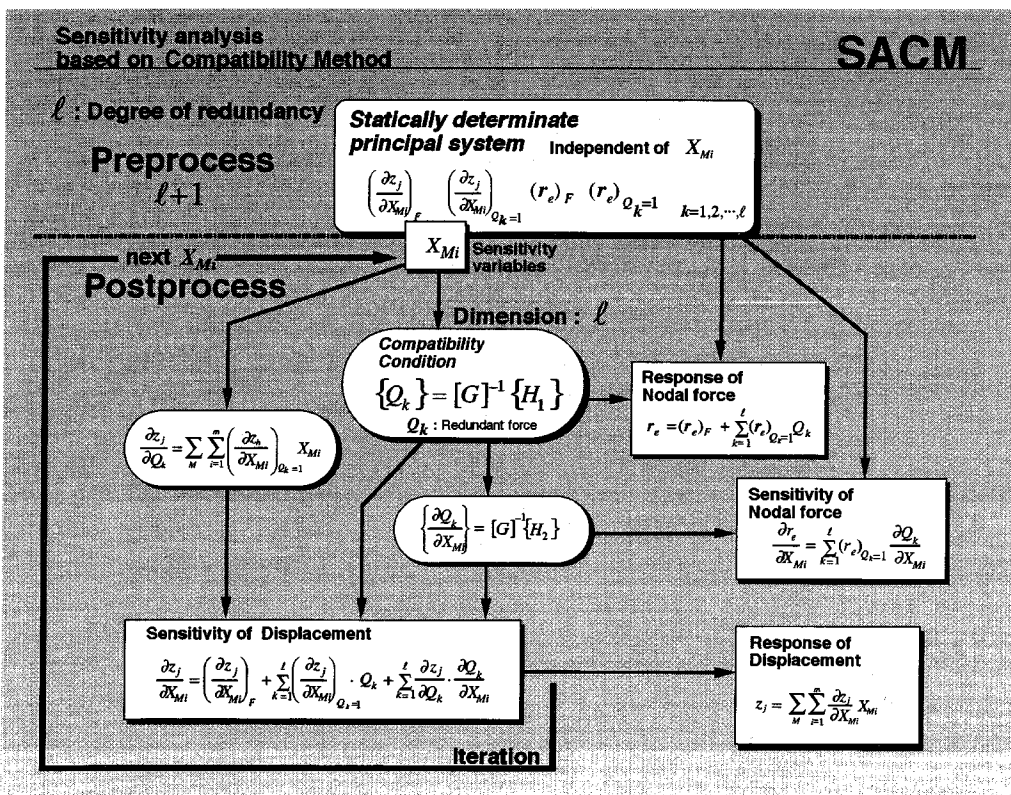


Fig.8 SACM の計算の流れ

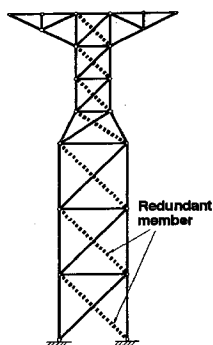


Fig.9 47 bar truss

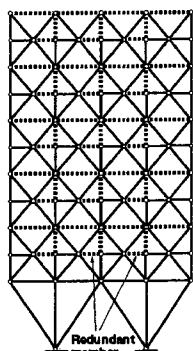


Fig.10 200 bar truss

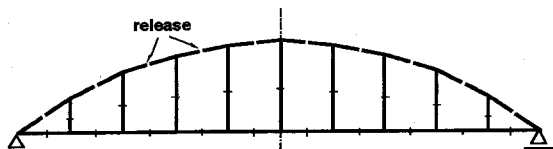


Fig.11 vierendeel

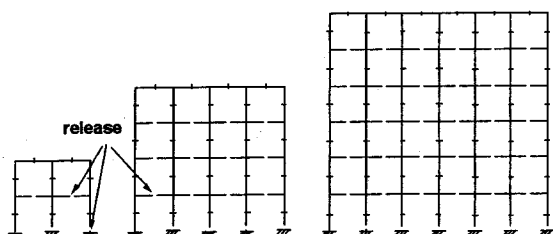


Fig.12 Multi layer-multi span frame

FDM と **DDM** における剛性マトリクス **K** と **SACM** におけるマトリクス **G** の成分の構成を考慮して演算回数を仮定する。なお、マトリクスの分解には *Cholesky decomposition* を用いる。一般の構造物の **K** はマトリクスの帯域幅を考慮すればマトリクスの分解に要する演算回数は $NF \cdot (NDF \cdot (NBW + 1))^2$ となる³⁾。ここで、構造の自由度を **NF**、帯域幅を **NBW**、部分マトリクスのサイズ（節点あたりの自由度数）を **NDF** とする。一方、マトリクス **G** は対称マトリクスであるが、非零の係数のみで構成されていることから分解に要する演算回数は $NQ^3/3$ となる⁴⁾。ここで不静定次数を **NQ** とする。分解後に連立方程式を解くのに要する代入回数はどちらの手法もマトリクスのサイズを **N** とすれば N^2 となる⁴⁾。

ここで、各手法の特徴を考察する。**SACM** の計算の流れ図を Fig.8 に示す。**SACM** と従来手法との最も対照的な点は、連立方程式の次元が **SACM** では不静定次数であるのに対して、**FDM** と **DDM** では構造系の自由度である点と、**SACM** では解析に先立って（不静定次数 + 1）回分の構造解析および感度解析（前処理）が必要である点である。これは、**SACM** が応力法に基づいている一方、**FDM** と **DDM** では変位

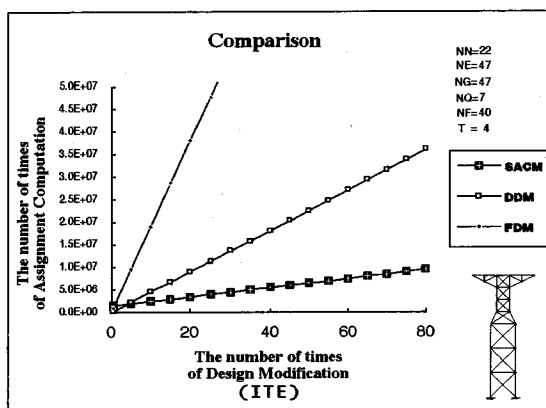


Fig.13

法に基づいているため、基本的には応力法と変位法の長所、短所がそのまま性質として引き継がれている。したがって、応答やその感度係数を1度しか計算しないのであれば、**SACM** は前処理が必要な分、従来法に比べて煩雑で非効率的となる。しかし、逐次的に解析を行う場合、前処理を一度行っておけばその後の設計変更に対しては不静定次数に等しい次元を有する連立方程式を解くだけで応答やその感度係数が得られるという特徴があり、不静定次数が小さく構造系の自由度が大きい場合 **SACM** は従来法に比べて効率的な感度解析法となることが分かる。通常感度解析では **FDM** が広く用いられているが、**DDM** が式(5)を計算するときに構造解析においてすでに分解された剛性マトリクス **K** を利用できるのに対し、**FDM** では式(3)の $g(X_{Mi} + \Delta X_{Mi})$ を計算するのに摂動系の剛性マトリクス **K** を毎回分解する必要があるため計算効率の面で非常に不利となることは明らかである。また、得られる感度係数は **SACM** と **DDM** は解析的に求められるため厳密に一致するが、**FDM** は差分法であるため近似的な値しか得られない。なお、**FDM** における ΔX_{Mi} は 0.1% の変動を考えている。

Fig.6,7 に示した演算回数が解析を繰り返していったときに、どのように推移するかをみるために、解析モデルとして 47 部材トラス、200 部材トラス、vierendeel、多層多スパンラーメンを考える (Fig.9~12)。なお、荷重条件は各手法特有の問題には無関係であるため、図示していない。ここでは、設計変数をグループ化せず全部材を独立な設計変数としている。したがって、Table 2 において $NG=NE$ である。また、帯域幅 **NBW** は節点番号の付け方に影響を受ける変数であるが、 $NBW=10$ としている。

(1) 47部材トラス

Fig.9 の 47 部材トラスは 7 次の不静定構造物である。図中の破線で示した剰余部材を除去して考え

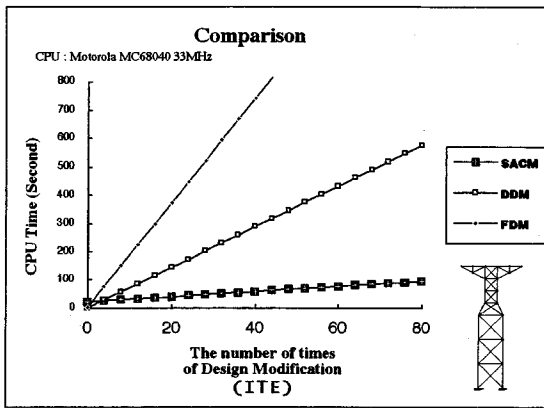


Fig.14 CPU Time

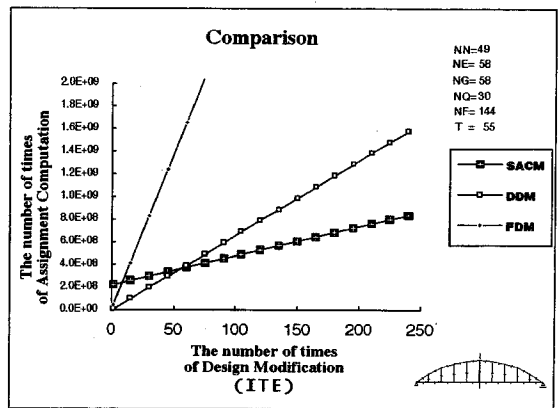


Fig.16

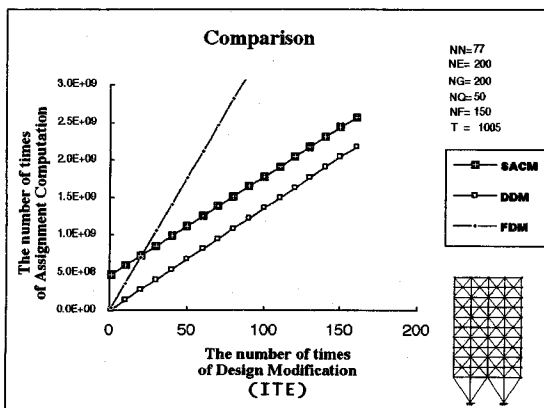


Fig.15

ば静定基本系となる。Table 2における各変数はそれぞれ、 $NN=22$, $NE=47$, $NQ=7$, $NF=NF'=40$ となり、解析の繰り返し回数ITEを増加していったときの各手法の演算回数をプロットしたものがFig.13である。Fig.13は横軸に解析の繰り返し回数、縦軸に演算回数の総数を示している。1回の解析に対してDDMとFDMはそれぞれ450000回と1900000回の演算が必要である。この回数は解析を繰り返すごとに必要となる回数である。一方、SACMは前処理において1400000回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対しては102000回の演算で解析を行うことができる。つまり、5回以上の解析を繰り返した場合、SACMは他の手法に対して効率的な解析法となる。なお、Fig.13に表記したTはSACMとDDMが交差する点に対する解析の繰り返し回数ITEを意味している。このモデルに対して、実際の計算時間を測定したものをFig.14に示す。Fig.14はFig.13の縦軸をCPU Time(Sec)に置き換えたものである。測定に用いた計算機はMotorola社のMC68040 (33MHz)をプロセッサユニットとして搭載している。Fig.13と比べてみると演算回数から見た計算量の推移とほぼ同

じ傾向が現れていることが解る。1回の解析に対してDDMは7.2秒、FDMは18.5秒を要する。一方SACMは前処理において22秒かかるが、その後の1回の解析に対してわずか0.9秒で計算を行うことが可能である。SACMがDDMに対して効率的となる繰り返し回数は実際の計算では4回程度となった。

(2) 200部材トラス

Fig.10の200部材トラスは50次の不静定構造物である。図中の破線で示した残余部材を除去して考えれば静定基本系となる。Table 2における各変数はそれぞれ、 $NN=77$, $NE=200$, $NQ=50$, $NF=NF'=150$ となり、各手法の演算回数を示したものがFig.15である。1回の解析に対してDDMとFDMはそれぞれ $1.4E+7$ 回と $3.5E+7$ 回の演算が必要である。一方、SACMは前処理において $4.6E+8$ 回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対しては $1.3E+7$ 回の演算となり、DDMの1回分の演算回数である $1.4E+7$ 回をわずかに下回るだけであるため、1005回以上の解析を繰り返さなければ、SACMはDDMに対して効率的な解析法とならない。しかし、FDMに対しては25回以上解析を繰り返せば効率的な解法となる。

(3) vierendeel

Fig.11のvierendeelは30次の不静定構造物である。図に示したように上弦の部材を10箇所切断することにより静定基本系となる。Table 2における各変数はそれぞれ、 $NN=49$, $NE=58$, $NQ=30$, $NF=144$, $NF'=174$ となり、各手法の演算回数を示したものがFig.16である。1回の解析に対してDDMとFDMはそれぞれ $6.6E+6$ 回と $2.8E+7$ 回の演算が必要である。一方、SACMは前処理において $2.2E+8$ 回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対しては $2.6E+6$ 回の演算で解析を行うことができる。つまり、55回以上の解析を繰り返せばSACMは他の手法に対して効率的な解析法となることが推定できる。このモデルに対して、実際の計算時間を測定したものをFig.17

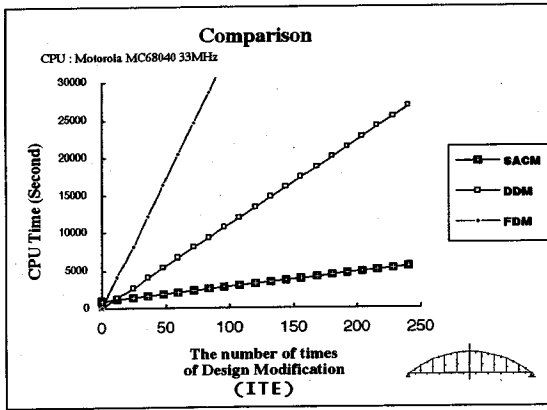


Fig.17 CPU Time

に示す。Fig.16と比べてみると演算回数から見た計算量の推移とほぼ同じ傾向が現れていることが解る。1回の解析に対してDDMは111.5秒、FDMは170.6秒を要する。一方SACMは前処理において862秒かかるが、その後の1回の解析に対してわずか19.6秒で計算を行うことが可能である。SACMがDDMに対して効率的となる繰り返し回数は実際の計算では10回程度となった。

(4) 多層多スパンラーメン

Fig.12に示す多層多スパンラーメンはそれぞれ、12次、48次、108次の不静定構造物である。図に示すように閉じた輪が1つもないよう梁部材と支点部を切断することにより樹状構造の静定基本系となる。各々のラーメンに対して各手法の演算回数を示したものがFig.18である。3つの図から不静定次数が大きくなるに従い、SACMは前処理にかかる演算回数が増加し、1回の解析に要する演算回数もDDMと差が無くなっていくため、SACMの従来法に対する優位性は低くなっていることが分かる。しかし、ラーメン構造に対する不静定次数は節点数と要素数の設定に無関係な固有の値であるため、同一の構造において設計上必要な更に多くの節点数と要素数が設定されていればSACMの優位性は向上する。

(5) 演算回数と計算時間との関係

実際の計算時間 (CPU Time)とFig.6,7に示した代入演算回数を完全に対応づけることは現実的には不可能である。なぜなら、演算回数 (operation) 1回当たりの計算時間は実行される命令の内容により様々だからである。したがって、この問題を論じることは本論文の範囲を超えるため言及しないが、各手法で要した計算時間を演算回数で割ることにより、演算1回当たりに要する計算時間を調べれば、Fig.6,7に示される各手法の演算1回の重みの情報を得ることは

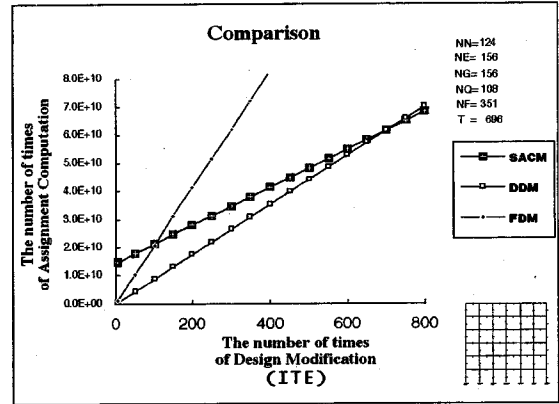
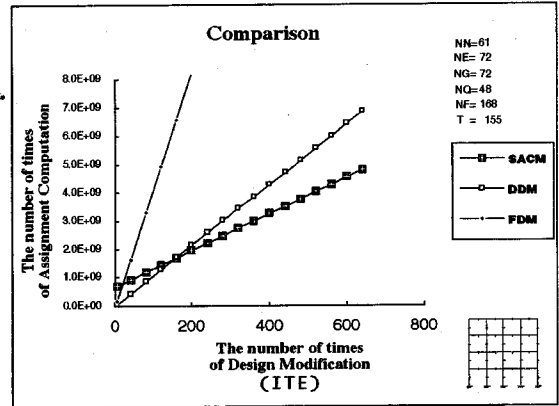
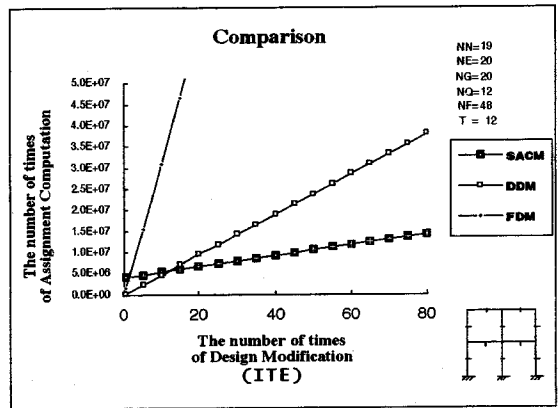


Fig.18

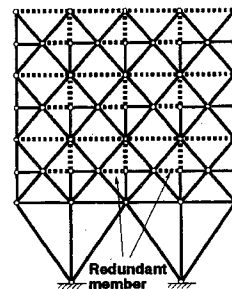


Fig.19 124bar truss

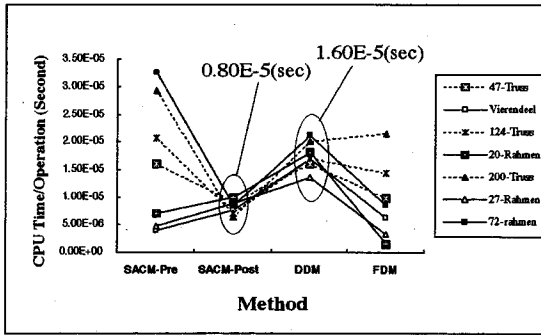


Fig.20 CPU Time / Operation

可能である。なお、重みを調べるに当たり実行した解析モデルは、Fig.9の47部材トラス、Fig.10の200部材トラス、Fig.11のvierendeel、Fig.12の20および72要素ラーメン、そして、Fig.19に示す124部材トラスである。各手法の演算1回の重みの情報をFig.20に示す。Fig.20よりSACMの後処理(Post)の演算1回当たりの所要時間は、平均して0.80E-5(sec)となり、DDMのそれは1.60E-5(sec)となり2倍の比を持っていることが分かる。これは絶対的ではなく計算機の速度に依存する値であるが、概ねこの比は再現されるはずである。この2つの手法では値が各モデルで集中していることからFig.6,7に示した代入演算回数は妥当であると考えられる。また、演算回数からみてSACMがDDMに較べて不利と判断される場合でも実際の計算時間では2倍ほどは効率的な解析法であるということである。一方、SACMの前処理(Pre)とFDMは各モデルの値にかなりのばらつきが生じた。しかし、トラス構造とラーメン構造が二分されるようなばらつきとなっていることが分かる。つまり、SACMの前処理(Pre)とFDMではトラス構造はラーメン構造に比べてFig.6,7に示す演算1回当たりの所要時間が多いということが分かる。

8. おわりに

本研究では、平面骨組構造物の静的線形問題における、無次元化感度係数 i の骨組全体の総和が常に定

数となる性質である感度係数特性に対し、断面レベルにおけるすべての感度変数を相互に独立であると考えることにより、より厳密な感度係数特性を新たに導いた。このことにより任意の骨組構造物に対して感度係数特性を用いた構造解析と感度解析で、変位法およびそれに基づく直接微分法から得られる応答や感度係数と一致した値を得ることが可能となった。また、感度変数をそれぞれ独立変数とすることで、部材断面の形状に依存しない感度解析法となっている。

次に、新たに誘導された感度係数特性を利用した従来法と異なる感度解析法を提案し、任意の骨組構造物に対する一般的なアルゴリズムを示した。提案した感度解析法は、適合法的な考え方に基づいており、逐次的に感度解析を行う場合、先ず静定基本系に対して節点変位の感度係数を求めておけば重ね合わせの原理より原不静定構造の感度係数や応答が求められる。次回以降の解析は新たな感度変数を代入し不静定次数だけの次元を有する適合方程式を解くだけで行うことが可能である。したがって、自由度が多く不静定次数が比較的小さな構造系の場合、初回の前処理が行われていれば次回以降の解析は非常に効率よく行うことができる。

この計算効率については種々の計算モデルを対象にアルゴリズム上で必要となる演算回数と、実際の計算時間を測定し従来法との比較を行い、本手法の有効性を検証した。

参考文献

- 1) 新延, 松井, 菊田: 骨組構造物の応答感度係数の特性, 土木学会論文集, No.450/I20, pp.75-83, 1992.7.
- 2) Richard L.Fox: Optimization Methods for Engineering Design, ADDISON-WESLEY Publishing Company, 1971.
- 3) R.K.リブスレイ, 山田嘉昭, 川井忠彦共訳: マトリクス構造解析入門, 培風館, 1986.
- 4) 森正武: FORTRAN77数値計算プログラミング, 岩波書店, 1987.
- 5) 野崎昭弘: 計算機科学/ソフトウェア技術講座5 アルゴリズムと計算量, 共立出版, 1987.

(1994. 10. 7 受付)

A METHOD OF SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON THE CHARACTERISTICS OF SENSITIVITY COEFFICIENTS OF FRAMED STRUCTURES

Kakuwo ENOMOTO and Yasuo NIINOBE

This study shows a new method to compute sensitivity coefficients of framed structures which are statically indeterminate. This new method is based on the compatibility method, and the sensitivities of fundamental statically determinate structure of original statically indeterminate structure are computed in the first place of sensitivity analysis. And, using this sensitivity coefficients, the corresponding sensitivities of original statically indeterminate structures in each value of sensitivity variables can be obtained only by the computation of compatibility equations which has the size of indeterminacy.