

# 不規則分布荷重を受ける連続ばりの分散・共分散解析

岡林隆敏<sup>1</sup>・河角省治<sup>2</sup>・吉田啓三<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 長崎大学 助教授 工学部社会開発工学科 (〒 852 長崎市文教町1番14号)

<sup>2</sup>正会員 (株)PAL構造 部長 電算技術部 (〒 852 長崎市旭町8番20号)

<sup>3</sup>正会員 工修 松尾橋梁(株) 工務部 (〒 551 大阪市大正区鶴町3丁目4番18号)

本論文は、静的な不規則分布荷重が作用する、連続ばりの変形と断面力の分散・共分散を得るための、確率微分方程式による、不規則応答解析法を示したものである。連続ばりを解くためには、中間支点やヒンジ点での未知量の取扱いが問題となる。そこで、本研究では、これらを状態変数として組み込むことにより、伝達マトリックス法を共分散行列に拡張した手法で、不規則応答解析を実現している。本解法の有効性を確認するために、2径間と3径間の連続ばりの解析を行い、求められた変形と断面力の分散・共分散の応答性状について考察を加えた。解法の基本的演算を明確にするために、不規則分布荷重は、白色雑音場に限定した。

**Key Words :** probabilistic analysis, variance response, probabilistic loads, continuous beams, random fields

## 1. はじめに

土木構造物の安全性を信頼性理論により照査するためには、不規則な外力による構造物の応答の確率特性を評価することが基礎になる。変動が大きく破局的な事象を発生させる動的な外力、すなわち地震、風荷重、波浪については、不規則振動論による解析<sup>1),2)</sup>が行われる。他方、空間的に不規則に分布した静的な荷重を受ける構造物の信頼性評価<sup>3),4)</sup>も重要な問題である。これらには、渋滞時の活荷重が作用する道路橋<sup>5),6),7)</sup>、積載荷重を受ける事務所・倉庫の床板、積雪荷重が作用する建築構造物<sup>8)</sup>などがある。

このような構造物の応答の確率特性は、作用する荷重を確率場<sup>9)</sup>でモデル化することにより、理論的には可能である。しかし、不規則振動論が初期値問題であるのに対して、不規則分布荷重を受ける構造物の静的解析は、2点境界値問題になるために、解析は一般的に難しい<sup>9)</sup>。

Ржаницын<sup>10)</sup>は、空間的に相関のある不規則分布荷重によるはりの解析を行っている。高岡らは<sup>5)</sup>、この解法を用いて活荷重による道路橋の信頼性解析を行った。白木らは<sup>6),7)</sup>、これを拡張し2径間連続桁橋の信頼性解析を行っている。Wedig<sup>11)</sup>は、不規則分布荷重を白色雑音場でモデル化した場合の弦のたわみの分散を得ている。著者の一人は、すでに白色雑音場および空間的に相関のある不規則分布荷重が作用したはりの変形と断面力の分散を得る解析法を提案している<sup>12)</sup>。

近年、材料特性が空間的に変動する構造系の、分散応答の解析が試みられている<sup>13),14),15)</sup>。

従来の研究では、グリーン関数法を基礎とする解析的演算により、不規則分布荷重を受けるはりや連続ばりの不規則応答を得ている。この場合、解析は極めて煩雑となり、適用できる構造系が制限されていると考えられる。しかし、解析理論の拡張という視点から多径間連続ばりなどの複合化した構造の解析が必要と考える。

そこで、本論文では、著者の一人が提案した<sup>9),12),16)</sup>、不規則分布荷重を受けるはり部材の解析法を、多径間連続ばりの解法に拡張し、変形および断面力の分散・共分散を求める理論を提案した。連続ばりの解析では、支点およびヒンジ点での未知量の取扱いが焦点となる。支点およびヒンジ点の未知量は改めて状態変数として組み込むこととした。このような拡大した状態変数を用いると、不規則分布荷重を受ける連続ばりは、伊藤型の確率微分方程式<sup>17)</sup>で表現することが出来る。この方程式より、応答の共分散の空間的変化を表現する共分散方程式を誘導した。この方程式はマトリクス形式の境界値問題となっている。本論文では、伝達マトリックス法<sup>18),19),20)</sup>で用いられる節点マトリクスおよび境界マトリクスを共分散行列へ拡張することにより、この方程式の解法を提案した。

本解法の特徴は、第1に、解析的な演算を実行することなく、計算機が有効に利用できる定式化をしていること。第2に、支点条件および境界条件を限定する

行列を変更するだけで、各種の連続系ばりに適用できること。第3に、分布荷重の相関は荷重系の行列を変更するだけで、各種の問題に対応できる汎用性を有していることである。

本論文では、不規則分布荷重を受ける連続ばりの解法の処理を明確にするために、不規則分布荷重を白色雑音過程に限定した。白色雑音過程の場合の解法が確立できれば、任意の空間的相関を有する不規則分布荷重については、空間的な形成フィルタ<sup>(21), (22)</sup>を導入することにより、構造物-荷重系としての方程式の定式化と解法が可能になる<sup>(12)</sup>。

本解法の有効性を検討するために、数値解析例として、2径間連続ばりおよび3径間連続ばりの解析を行った。さらに、求められた変形と断面力の応答形状について考察を加えた。

## 2. 連続ばりの状態空間表示

### (1) 状態方程式

Fig.1のような  $s+1$  径間の連続ばりを考える。0 から  $s+1$  は節点を表し、その中で0 節点と  $s+1$  節点には、境界条件を与えるものとする。また  $i$  の記号は  $i$  径間を表す。連続ばり系では、中間節点に未知量、すなわち支点の場合は反力、ヒンジの場合は折れ角が生じる。このような系の解析では、この処理が必要となる。Fig.1において、これらの未知量を  $V_i$  で表したが、これは支点の場合は反力に、ヒンジの場合は折れ角を表すものとする。この連続ばりの全長を  $l$  とし、左端部より任意の  $i$  節点までの距離を  $l_i$  で表す。節点における未知量は、Fig.2のように表すことができる。

Fig.3のような断面力を考える。はり要素に不規則分布荷重  $q(x)$ 、分布モーメント  $m(x)$  が作用した場合、左端より  $x$  点のたわみ  $y(x)$ 、たわみ角  $\phi(x)$ 、曲げモーメント  $M(x)$  およびせん断力  $Q(x)$ 、さらに各節点の未知量も状態変数と考えて、これらを状態方程式で表す。

$$\left. \begin{aligned} dy(x)/dx &= \phi(x) \\ d\phi(x)/dx &= -M(x)/EI(x) \\ dM(x)/dx &= Q(x) + m(x) \\ dQ(x)/dx &= -q(x) \\ dV_1/dx &= 0 \\ &\vdots \\ dV_s/dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

はりの変形と断面力の変数と節点未知量を

$$\mathbf{Y}(x) = [y(x) \ \phi(x) \ M(x) \ Q(x)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{V} = [V_1 \ \dots \ V_s]^T \quad (3)$$

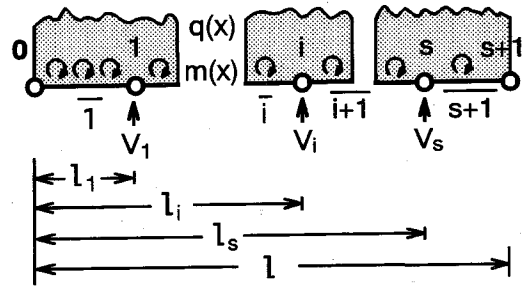


Fig.1 Continuous beam subjected with Stochastic distributed load.

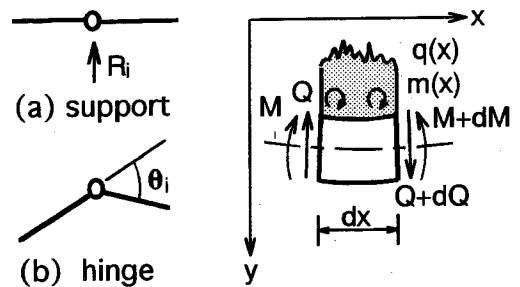


Fig.2 Intermediate conditions.

Fig.3 Beam element.

のようにベクトル表示し、これを合成した状態変数

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(x) \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (4)$$

で表す。式(1)は、次のようにベクトル表示される。

$$\frac{d}{dx} \mathbf{X}(x) = \mathbf{A}_X(x) \mathbf{X}(x) + \mathbf{F}_X(x) \quad (5)$$

$$\text{境界条件} : \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \mathbf{X}(l) = \mathbf{X}_l$$

ここに、

$$\mathbf{A}_X(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_Y(x) & \mathbf{0}_{4,s} \\ \mathbf{0}_{s,4} & \mathbf{0}_{s,s} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

$$\mathbf{A}_Y(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

$$\mathbf{F}_X(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_Y(x) \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

$$\mathbf{F}_Y(x) = [0 \ 0 \ m(x) \ -q(x)]^T \quad (6-4)$$

である。なお、 $0_{k,j}$  は  $(k \times j)$  の 0 行列であり、 $0_k$  は  $k$  次元の 0 ベクトルである。さらに、境界条件は、次のようなベクトルより構成されている。

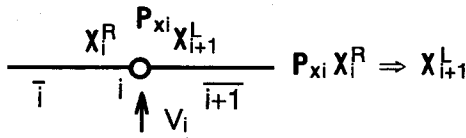


Fig.4 Point matrix.

$$X_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} Y_i \\ V_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 $Y_0$  と  $Y_i$  は、はり部材の左端と右端の境界条件

$$Y_0 = [y_0 \phi_0 M_0 Q_0]^T \quad (8)$$

$$Y_i = [y_i \phi_i M_i Q_i]^T \quad (9)$$

である。

## (2) 節点マトリックス

状態変数  $X(x)$  を節点の左から右へ伝達する際に、支点では変位が 0 で支点反力が生じる。また、ヒンジ節点では曲げモーメントが 0 になり、折れ角が生じる。このような条件を満足させるのが、節点マトリックスである<sup>18),19),20)</sup>。Fig.4 に示したように、 $\bar{i}$  部材の右端と  $\bar{i}+1$  部材の左端の状態変数  $X_i^R$ 、 $X_{i+1}^L$  は、節点マトリックス  $P_{Xi}$  を介して

$$X_{i+1}^L = P_{Xi} X_i^R \quad (10)$$

のように表すことができる。この節点マトリックスは、次のようなブロックにより構成されている。

$$P_{Xi} = \begin{bmatrix} I_4 & P_{Xi}^{12} \\ P_{Xi}^{21} & P_{Xi}^{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $I_k$  は  $k$  次元の単位行列である。

### a) $i$ 節点が支点の場合

$$\left. \begin{aligned} P_{Xi}^{21} &= \begin{bmatrix} 0_{i-1,4} \\ P_a \\ 0_{s-i,4} \end{bmatrix} \\ P_{Xi}^{12} &= [0_{4,i-1} \ P_b \ 0_{4,s-i}] \\ P_{Xi}^{22} &= I_s - \Delta_{s,i} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} P_a &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \\ P_b &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta_{s,i}$  は  $i, i$  要素が 1 でそれ以外の要素が 0 の  $(s \times s)$  次元の行列である。

### b) $i$ 節点がヒンジの場合

$P_{Xi}^{21}$ 、 $P_{Xi}^{12}$ 、 $P_{Xi}^{22}$  の定義は、式(12)と同じである。

$$\left. \begin{aligned} P_a &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ P_b &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

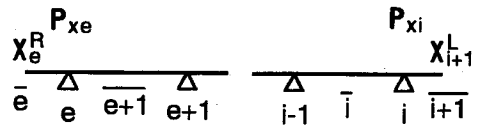


Fig.5 State transfer matrix.

## c) 左端と右端の節点マトリックス

$$P_{X0} = P_{Xs+1} = I_{s+4} \quad (14)$$

## (3) 静的応答の表現

$(l_i \leq x \leq l_{i+1})$  の区間、すなわち  $\bar{i}+1$  部材の荷重  $F_X(x)$  による  $X(x)$  の応答は、 $\bar{i}+1$  部材の左端の状態変数  $X_{i+1}^L$  を境界条件として、式(5)の解過程で与えられる。

$$X(x) = \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) X_{i+1}^L + \int_{l_i}^x \Phi_{X_{i+1}}(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (15)$$

ここに  $\Phi_{X_{i+1}}(x, l_i)$  は、 $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$  区間における  $\bar{i}+1$  部材の  $X(x)$  の状態遷移行列である。この行列は、次のように分割される。

$$\Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) = \begin{bmatrix} \Phi_{Y_{i+1}}(x, l_i) & 0_{4,s} \\ 0_{s,4} & I_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\Phi_{Y_{i+1}}(x, l_i)$  は、 $\bar{i}+1$  部材の格間伝達マトリックスであり

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi_{Y_{i+1}}(x, l_i) &= A_Y(x) \Phi_{Y_{i+1}}(x, l_i) \\ \Phi_{Y_{i+1}}(l_i, l_i) &= I_4 \end{aligned} \quad (17)$$

により定義される。

Fig.5 のような  $e$  節点から  $i$  節点までの部材を考える。 $\bar{e}$  部材右端の状態変数  $X_e^R$  から、 $\bar{i}+1$  部材左端  $X_{i+1}^L$  までの状態変数の伝達は、各点の節点マトリックス  $P_{Xk}$  と  $\bar{k}+1$  部材の格間伝達マトリックス  $\Phi_{X_{k+1}}(l_{k+1}, l_k)$  を用いて

$$\begin{aligned} X_{i+1}^L &= P_{Xi} \Phi_{Xi}(l_i, l_{i-1}) \\ &\cdots \Phi_{X_{e+1}}(l_{e+1}, l_e) P_{Xe} X_e^R \end{aligned} \quad (18)$$

と表すことができる。ここで、 $e$  節点から  $i$  節点までの伝達マトリックスを、

$$\begin{aligned} \Lambda(i, e) &= P_{Xi} \Phi_{Xi}(l_i, l_{i-1}) \\ &\cdots \Phi_{X_{e+1}}(l_{e+1}, l_e) P_{Xe} \end{aligned} \quad (19)$$

で表す。不規則分布荷重  $F_X(x)$  が作用する連続ばりにおいて、 $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$  区間における応答  $X(x)$  を記述すると、次のようになる。

$$X(x) = \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) \Lambda(i, 0) X_0$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^i \{ \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) \Lambda(i, k) \\
& \quad \times \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Phi_{Xk}(l_k, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \} \\
& + \int_{l_i}^x \Phi_{X_{i+1}}(x, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (20)
\end{aligned}$$

### 3. 境界条件の処理

連続ばりの左端が回転支持、固定支持および自由端である場合、境界条件の次の量は未知量になる。

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

これを  $\tilde{Y}_0$  で表す。さらに各節点における未知量を組み合わせ、これを左端境界ベクトル

$$\tilde{X}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

で定義する。左端境界ベクトルは、左端境界マトリックス  $B_X$  により、左端境界条件と関係づけられる。

$$X_0 = B_X \tilde{X}_0 \quad (23)$$

ここで、 $B_X$  は、次のようなブロックで構成される。

$$B_X = \begin{bmatrix} B_Y & 0_{4,s} \\ 0_{s,2} & I_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで、 $B_Y$  ははり要素の左端境界マトリックスであり、左端の各境界条件によって決められる。連続ばり左端が、回転支持、固定支持および自由端の場合、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

のようになる。

次に、連続ばりの右端の境界条件について考える。回転支持、固定支持および自由端である場合、次の量は 0 となる。

$$\begin{bmatrix} y_l \\ M_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_l \\ \phi_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_l \\ Q_l \end{bmatrix} \quad (26)$$

これを  $\tilde{Y}_l$  で表す。さらに、各節点の未知量  $V$  も右端では 0 とする。右端境界ベクトルを、

$$\tilde{X}_l = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_l \\ V_l \end{bmatrix} = 0_{s+2} \quad (27)$$

で定義する。右端境界マトリックス  $B'_X$  を用いると、右端境界条件は、

$$B'_X X_l = \tilde{X}_l \quad (28)$$

となる。この  $B'_X$  は、次のようなブロックで構成される。

$$B'_X = \begin{bmatrix} B'_Y & 0_{2,s} \\ 0_{s,4} & I_s \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで、 $B'_Y$  ははり要素の右端境界マトリックスであり、右端の各境界条件によって決められる。連続ばり右端が、移動端、固定端および自由端の場合、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

のようになる。

### 4. 不規則応答

#### (1) 不規則荷重のモデル化と応答の確率特性

構造系に作用する不規則分布外力として荷重  $q(x)$  とモーメント  $m(x)$  が考えられるが、説明を不規則分布荷重  $q(x)$  に限定する。分布モーメント  $m(x)$  が作用する場合についても、同じ定式化が可能である。

不規則分布荷重  $q(x)$  は、平均値とその回りの変動  $\hat{q}(x)$  に分離することができる。

$$q(x) = E[q(x)] + \hat{q}(x) \quad (31)$$

荷重の平均値  $E[q(x)]$  に対する構造系の応答は、これまでの構造力学により解析することができる。そこで、本論文では、荷重として平均値回りの変動のみを考える。以後、式の記述を簡単にするために、平均値回りの変動  $\hat{q}(x)$  を  $q(x)$  で表すことにする。

本論文では、不規則分布荷重が作用する構造系の応答解析を定式化するために、不規則分布荷重は正規性白色雑音過程と仮定する。正規性不規則分布荷重の場合の解法が確立できれば、任意の相関を有する一般的な場合については、空間的な形成フィルタ<sup>21),22)</sup>を導入することにより、構造系の方程式の定式化と解法が可能になる。

不規則分布荷重  $q(x)$  は、平均値は 0 で、自己相関が

$$E[n(x_1) n(x_2)] = \sigma^2 \delta(x_1 - x_2) \quad (32)$$

で定義される正規性白色雑音過程と確定関数  $g(x)$  の積

$$q(x) = n(x) g(x) \quad (33)$$

で表される、非定常確率過程を仮定する。なお、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である。

このような荷重を仮定した場合、式(5)の外力ベクトル  $F_X(x)$  は、

$$F_X(x) = \begin{bmatrix} F_Y(x) \\ 0_s \end{bmatrix} \quad (34-1)$$

$$F_Y(x) = [0 \ 0 \ 0 \ -q(x)]^T \quad (34-2)$$

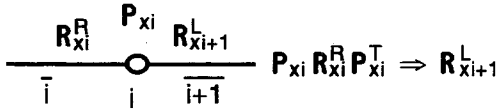


Fig.6 Point matrix for covariance variable.

より構成される。したがって、外力ベクトル  $F_X(x)$  は  
 平均値 0, 自己相関関数

$$E[F_X(x_1) F_X^T(x_2)] = Q_X(x_1) \delta(x_1 - x_2) \quad (35)$$

を有する正規性白色雑音過程ベクトルとなる。ここに、  
 強度マトリックス  $Q_X(x)$  は

$$Q_X(x) = \begin{bmatrix} Q_Y(x) & 0_{4,s} \\ 0_{s,4} & 0_{s,s} \end{bmatrix} \quad (36-1)$$

$$Q_Y(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 g^2(x) \end{bmatrix} \quad (36-2)$$

の要素からなっている。

次に応答過程  $X(x)$  について考える。このような外力のもとでは、  
 応答は平均値 0 の正規性確率過程になる。本論文の目的は、  
 構造系の応答  $Y(x)$  の共分散

$$R_Y(x) = E[Y(x) Y^T(x)] \quad (37)$$

を求めることである。この行列は、状態変数  $X(x)$  の  
 共分散行列の要素として求めることができる。

$$R_X(x) = E[X(x) X^T(x)] \\ = \begin{bmatrix} E[Y(x) Y^T(x)] & E[Y(x) V^T] \\ E[V Y^T(x)] & E[V V^T] \end{bmatrix} \quad (38)$$

次に、共分散応答と節点マトリックスについて説明  
 する。 $\bar{i}+1$  径間左端と  $\bar{i}$  径間右端の共分散行列を次の  
 ように定義する。

$$\left. \begin{aligned} R_{X_{i+1}}^L &= E[X_{i+1}^L X_{i+1}^{L T}] \\ R_{X_i}^R &= E[X_i^R X_i^{R T}] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式(10)の関係より、 $i$  径間右端の共分散は  $i$  点の節点  
 マトリックスにより、次のように  $i+1$  径間の左端に伝  
 達される。

$$R_{X_{i+1}}^L = P_{X_i} R_{X_i}^R P_{X_i}^T \quad (40)$$

すなわち、伝達マトリックス法で定義された節点マ  
 トリックスの関係式(10)は、共分散応答の場合は、式(40)  
 のように拡張できる。この関係を Fig.6 に示した。

## (2) 共分散方程式

外力を正規性白色雑音過程ベクトルと仮定し、式  
 (15)を  $X(x)$  の共分散の定義式(38)に代入し、白色雑

音過程ベクトルの性質式(35)の性質を使って積分を実  
 行する。 $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$  区間の共分散  $R_X(x)$  は、次  
 式で表わされる。

$$R_X(x) = \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) R_{X_{i+1}}^L \Phi_{X_{i+1}}^T(x, l_i) \\ + \int_{l_i}^x \Phi_{X_{i+1}}(x, \lambda) E[F_X(\lambda) X_{i+1}^{L T}] d\lambda \\ \times \Phi_{X_{i+1}}^T(x, l_i) \\ + \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) \int_{l_i}^x E[X_{i+1}^L F_X^T(\lambda)] \\ \times \Phi_{X_{i+1}}^T(x, \lambda) d\lambda \\ + \int_{l_i}^x \Phi_{X_{i+1}}(x, \lambda) Q_X(\lambda) \Phi_{X_{i+1}}^T(x, \lambda) d\lambda \quad (41)$$

この両辺を  $x$  で微分して、若干の演算を実行すると、  
 $\bar{i}+1$  径間で定義された共分散方程式

$$\frac{d}{dx} R_X(x) = A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X^T(x) \\ + E[F_X(x) X_{i+1}^{L T}] \Phi_{X_{i+1}}^T(x, l_i) \\ + \Phi_{X_{i+1}}(x, l_i) E[X_{i+1}^L F_X^T(x)] \\ + Q_X(x) \quad (l_i \leq x \leq l_{i+1}) \quad (42)$$

$\bar{i}+1$  径間左端の境界条件： $R_{X_{i+1}}^L = P_{X_i} R_{X_i}^R P_{X_i}^T$   
 を得る。左端の径間の共分散を初期条件として、各径  
 間についても同じ方程式が成立する。さらに、この連  
 続ばりの左端と右端の共分散方程式の境界条件は、式  
 (5)に示した  $X_0$  と  $X_l$  より

$$R_{X_0} = E[X_0 X_0^T], \quad R_{X_l} = E[X_l X_l^T] \quad (43)$$

となる。

この共分散方程式において、 $E[F_X(x) X_{i+1}^{L T}]$  と  
 $E[X_{i+1}^L F_X^T(x)]$  は、左端境界条件  $X_0$  を用いて表す  
 ことができる。 $\bar{i}+1$  径間左端の状態変数は式(20)より

$$X_{i+1}^L = \Lambda(i, 0) X_0 \\ + \sum_{k=1}^i \Lambda(i, k) \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Phi_{X_k}(l_k, \lambda) F_X(\lambda) d\lambda \quad (44)$$

で表される。この式に右側より  $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$  区間の  
 外力  $F_X^T(x)$  をかけて平均をとると、 $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$   
 区間の  $F_X(x)$  と  $(l_k \leq x \leq l_{k+1})$  区間の  $F_X(x)$  は、式  
 (35)より独立であるので、

$$E[X_{i+1}^L F_X^T(x)] = \Lambda(i, 0) E[X_0 F_X^T(x)] \quad (45)$$

を得る。両辺の転置行列により

$$E[F_X(x) X_{i+1}^{L T}] = E[F_X(x) X_0^T] \Lambda^T(i, 0) \quad (46)$$

が得られる。また、この定式は荷重に相関が有る場合  
 でも可能である。すなわち、相関の有る不規則分布荷  
 重を白色雑音を入力とする一種のフィルターである荷  
 重系の定常応答過程で表現する。この荷重系と構造系  
 を組み合わせ、拡大した状態変数を用いることで白色  
 雑音を入力とする状態方程式を得る<sup>12)</sup>。このようにす  
 ることで、式(45),(46)のような定式が可能となる。

式(42)の共分散方程式は左端境界条件と外力の相関関数  $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}_X^T(x)]$ ,  $E[\mathbf{F}_X(x) \mathbf{X}_0^T]$  と左端境界条件の共分散  $\mathbf{R}_{X0}$  を求めることにより, 初期値問題として解くことができる。

### (3) 始端状態変数と外力の相関関数

ここで, 連続ばりの左端節点の左側を始端, 右端節点の右側を終端と考えると, 始端状態変数と終端状態変数には式(20)より

$$\mathbf{X}_l = \Lambda(s+1, 0) \mathbf{X}_0 + \sum_{k=1}^{s+1} \Lambda(s+1, k) \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Phi_{Xk}(l_k, \lambda) \mathbf{F}_X(\lambda) d\lambda \quad (47)$$

の関係がある。この式の右側より ( $l_k \leq x \leq l_{k+1}$ ) 区間で定義された  $\mathbf{F}_X^T(x)$  をかけて平均の操作をすると,  $\mathbf{F}_X(x)$  は白色雑音の性質より ( $l_k \leq x \leq l_{k+1}$ ) 区間以外の  $\mathbf{F}_X(x)$  と独立であるために, 次式を得る。

$$E[\mathbf{X}_l \mathbf{F}_X^T(x)] = \Lambda(s+1, 0) E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}_X^T(x)] + \Lambda(s+1, k+1) \Phi_{Xk+1}(l_{k+1}, x) \mathbf{Q}_X(x) \quad (48)$$

$(l_k \leq x \leq l_{k+1})$

この式に左側より右端境界行列  $\mathbf{B}'_X$  をかけると, 式(27)の関係より ( $l_k \leq x \leq l_{k+1}$ ) 区間において,

$$\mathbf{B}'_X E[\mathbf{X}_l \mathbf{F}_X^T(x)] = \mathbf{0}_{s+2, s+4} \quad (49)$$

となる。式(23)の関係を用いて式(48)を書き改めると,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_X \Lambda(s+1, 0) \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{F}_X^T(x)] \\ + \mathbf{B}'_X \Lambda(s+1, k+1) \Phi_{Xk+1}(l_{k+1}, x) \mathbf{Q}_X(x) \\ = \mathbf{0}_{s+2, s+4} \quad (l_k \leq x \leq l_{k+1}) \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。この式より  $E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{F}_X^T(x)]$  が求まる。さらに,

$$E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}_X^T(x)] = \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{F}_X^T(x)] \quad (51)$$

が得られる。  $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}_X^T(x)]$  の転置行列より

$$E[\mathbf{F}_X(x) \mathbf{X}_0^T] = E[\mathbf{X}_0 \mathbf{F}_X^T(x)]^T \quad (52)$$

が得られる。このようにして, 始端状態変数と各径間における外力の相関関数を得ることができる。

### (4) 始端状態変数の共分散行列

終端状態変数の共分散行列は, 式(47)に関する共分散行列により,

$$\mathbf{R}_{Xl} = \Lambda(s+1, 0) \mathbf{R}_{X0} \Lambda^T(s+1, 0) + \mathbf{P}_X(l) \quad (53)$$

で表される。ここで,  $\mathbf{P}_X(l)$  は, 式(42)の共分散方程式において,  $\mathbf{R}_{X0} = \mathbf{0}_{s+4, s+4}$  としたときの終端における応答を表している。

始端状態変数の処理式(23)を共分散行列に拡張する。式(23)より

$$E[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T] = \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \tilde{\mathbf{X}}_0^T] \mathbf{B}_X^T \quad (54)$$

の関係が成立し,  $\tilde{\mathbf{R}}_{X0} = E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \tilde{\mathbf{X}}_0^T]$  で定義すると, 式(54)は,

$$\mathbf{R}_{X0} = \mathbf{B}_X \tilde{\mathbf{R}}_{X0} \mathbf{B}_X^T \quad (55)$$

となる。他方, 終端状態変数の処理式(27)(28)を, 共分散行列に拡張する。式(28)より

$$\mathbf{B}'_X E[\mathbf{X}_l \mathbf{X}_l^T] \mathbf{B}'_X^T = E[\tilde{\mathbf{X}}_l \tilde{\mathbf{X}}_l^T] = \mathbf{0}_{s+2, s+2} \quad (56)$$

となる。  $\tilde{\mathbf{R}}_{Xl} = E[\tilde{\mathbf{X}}_l \tilde{\mathbf{X}}_l^T]$  を定義すると,

$$\mathbf{B}'_X \mathbf{R}_{Xl} \mathbf{B}'_X^T = \tilde{\mathbf{R}}_{Xl} = \mathbf{0}_{s+2, s+2} \quad (57)$$

となる。

式(53)の左と右側から  $\mathbf{B}'_X$  と  $\mathbf{B}'_X^T$  をかけ, 式(55)の関係をを用いると, 式(56)の関係から, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_X \Lambda(s+1, 0) \mathbf{B}_X \tilde{\mathbf{R}}_{X0} (\mathbf{B}'_X \Lambda(s+1, 0) \mathbf{B}_X)^T \\ + \mathbf{B}'_X \mathbf{P}_X(l) \mathbf{B}'_X^T = \mathbf{0}_{s+2, s+2} \end{aligned} \quad (58)$$

この式より  $\tilde{\mathbf{R}}_{X0}$  を求めることができる。この結果, 始端状態変数の共分散行列

$$\mathbf{R}_{X0} = \mathbf{B}_X \tilde{\mathbf{R}}_{X0} \mathbf{B}_X^T \quad (59)$$

を求めることができる。

## 5. 数値計算と考察

### (1) 数値解析例について

数値計算のために, 基準となる諸量で状態変数を無次元化する。はりに荷重強度  $p$  の一様分布荷重が作用するものとして, 距離を無次元長さ  $x' = x/l$  で表すと, 各状態変数は,

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y'(x') pl^4 / EI \\ \phi(x) &= \phi'(x') pl^3 / EI \\ M(x) &= M'(x') pl^2 \\ Q(x) &= Q'(x') pl \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

のように無次元表示できる。また, 節点の未知量についても, 支点反力と折れ角の場合,

$$R_i = R'_i pl, \theta_i = \theta'_i pl^3 / EI \quad (61)$$

となる。不規則分布荷重  $q(x)$  の分散  $\sigma_q^2$  は,

$$\sigma_q^2 = \sigma_q'^2 p^2 / l \quad (62)$$

のように無次元表示できる。数値計算では  $\sigma_q'^2 = 1$  としている。

本解法の有効性を検証するために, Fig.7 に示した4例の解析を行った。それぞれ, CASE 1 と CASE 2 は2径間連続ばりであり, 単純支持と左端固定・右端ヒンジばりである。さらに, CASE 3 と CASE 4 は3径間連続ばりとゲルバーばりである。それぞれのはりの不規則分布荷重を  $\sigma_q^2 = p^2/l$  の強度を有する白色雑音過程でモデル化した。このときのたわみ, たわみ角, 曲げモーメントおよびせん断力の標準偏差を図示した。

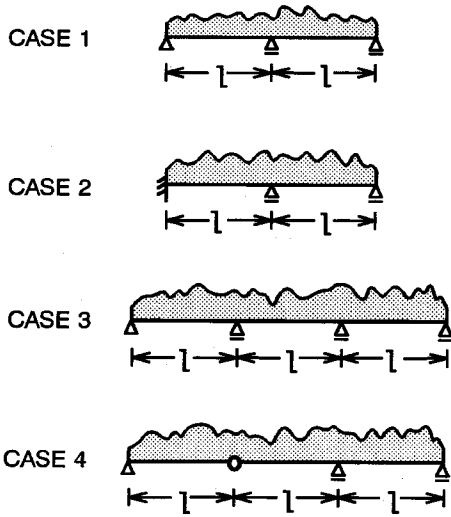


Fig. 7 Illustrative examples.

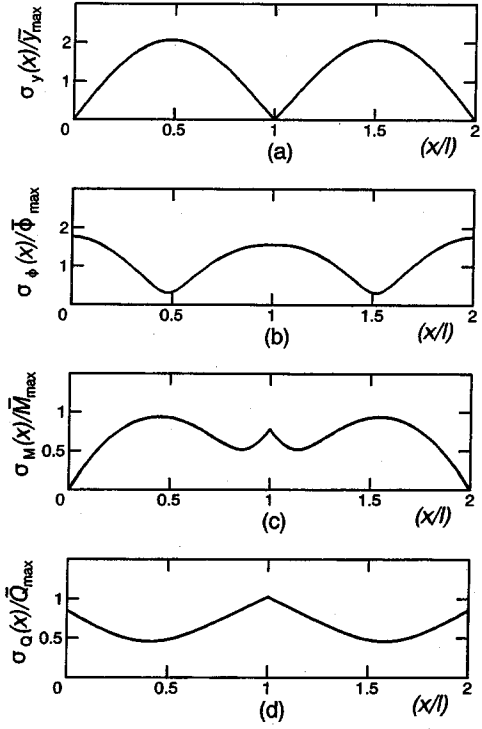


Fig. 8 Standard deviation of responses for continuous beam with two spans.

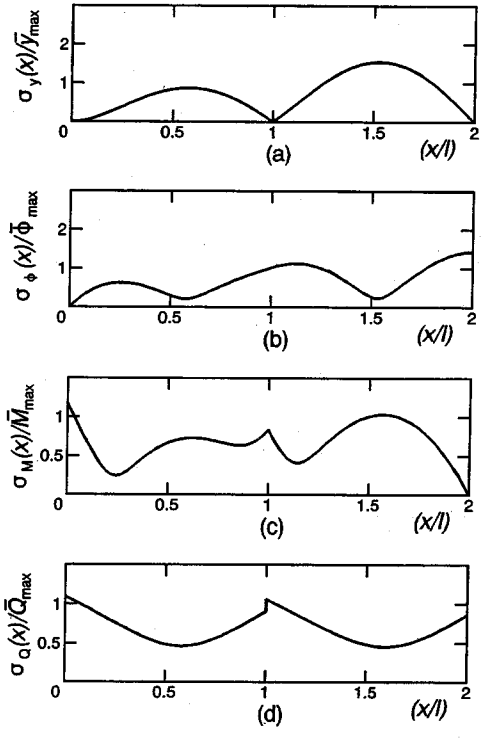


Fig. 9 Standard deviation of responses for beam with intermediate support.

これらの図において、それぞれの応答は、一様分布荷重  $p$  が作用するそれぞれのはりの応答の最大値  $\bar{y}_{max}$ ,  $\bar{\phi}_{max}$ ,  $\bar{M}_{max}$ , および  $\bar{Q}_{max}$  で規準化している。

(2) 2径間連続ばり (CASE 1)

Fig. 8 は、2径間連続ばりの応答の標準偏差を示したものである。横軸は単径間で規準化した長さである。図 a) と図 c) は、たわみと曲げモーメントの応答である。たわみは各支点で、また曲げモーメントは境界において確率 1 で 0 となる。それぞれ、 $x = 0.48$  および  $x = 0.45$  近傍で最大となっている。また曲げモーメントの応答は中央支点で極値を持つ。図 b) と図 d) は、たわみ角とせん断力の応答である。荷重が変動するためたわみ角とせん断力は確率 1 で 0 となる点はない。せん断力の応答は、中央支点上で最大となっている。

(3) 左端固定・右端ヒンジの2径間ばり (CASE 2)

Fig. 9 は左端固定・右端ヒンジの2径間ばりの応答の標準偏差を示したものである。図 a), 図 c) はそれぞれたわみ応答と曲げモーメント応答を示している。

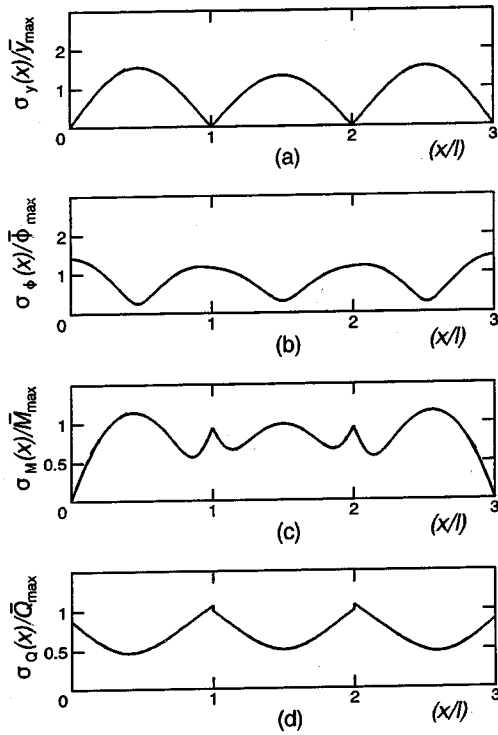


Fig.10 Standard deviation of responses for continuous beam with three spans.

たわみ応答は  $x = 1.53$  近傍の点で、また曲げモーメント応答は左端の固定点において最大となっている。荷重が変動するために、確率1で0となる点が右端だけになる。等分布荷重では0となる点の変動の解析では極小値を示し、その結果、応答の形状は複雑な曲線になる。図d)はせん断力の応答であるが、左端の固定点で最大の値となっている。また、中央支点上では、支点反力のために不連続な変化を示している。

#### (4) 3径間連続ばり (CASE 3)

Fig.10は、3径間連続ばりの応答の標準偏差を示したものである。図a)のたわみ応答では、両端の径間の中央付近 ( $x = 0.48, x = 2.52$ ) において最大応答を示す。図b)はたわみ角の応答であるが、荷重が変動するために、確率1で0となる点は存在しない。図c)は曲げモーメントの応答である。両端の径間の中央付近 ( $x = 0.44, x = 2.56$ ) で最大応答となる。また、中間支点上と中央径間の中央において極大値を示す。さらに、等分布荷重が作用した場合0となる点では、応答の変動は極小値を示している。図d)は、せん断力

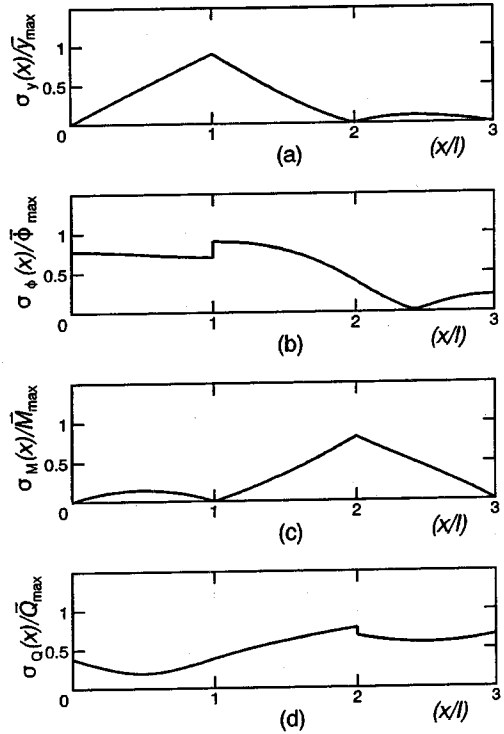


Fig.11 Standard deviation of responses for Gerber beam.

の応答である。中間支点上において、せん断力は最大応答を示す。さらに、支点反力のために、応答曲線は不連続になる。また、等分布荷重が作用した場合せん断力が0となる点では、応答の標準偏差は極小値となっている。

#### (5) ゲルバーばり (CASE 4)

Fig.11は、ゲルバーばりの応答の標準偏差を示したものである。図a)のたわみ応答では、中間ヒンジ点において最大応答を示す。図b)はたわみ角の応答であるが、中間ヒンジ点の折れ角により、応答曲線は不連続になる。また、等分布荷重が作用した場合、たわみ角が0となる点では、応答の標準偏差は極小値となっており0に近い値を示す。図c)は曲げモーメントの応答である。両端の支点と中間ヒンジ点において確率1で0となる。また、中間支点上において、最大応答を示す。図d)は、せん断力の応答である。中間支点上において、せん断力は最大応答を示す。さらに、支点反力のために、応答曲線は不連続になる。また、等分布荷重が作用した場合せん断力が0となる第1径間



中央点では、応答の標準偏差は極小値となっている。

## 6. おわりに

本論文は、著者らがすでに報告した不規則分布荷重を受けるはりの確率論的解析を、連続ばりの解析に拡張したものである。基礎的な方程式の定式化を行うために、不規則分布荷重を白色雑音過程に限定した。本解法には、次のような特徴がある。

- (a) 連続ばり系の一般的な解法となっている。
- (b) 境界行列および節点行列を変更するだけで、どのような連続系ばりに対しても適用が可能である。
- (c) 数値解析に適した算法になっているために、計算機が有効に活用できる。

本論文では、中間支点の状態変数としての取扱いと、状態変数の共分散を未知数とした場合の処理について説明した。本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

(1) 連続ばりの解法において、中間支点に現れる未知反力あるいは未知の折れ角の取扱いが問題になる。本論文では、これらを状態変数として取り込み、拡大した状態変数を定義して、この拡大した状態変数の共分散行列を未知数とした。さらに、中間支点左右の共分散行列は、節点行列により伝達される。

(2) 拡大した状態変数を導入することにより、不規則分布荷重を受ける連続ばりの挙動を伊藤型の確率微分方程式で定式化した。

(3) 伊藤型の確率微分方程式に対応する共分散方程式を誘導した。この共分散方程式の解法を示し、不規則分布荷重を受ける一般的な連続ばりの解析手法を提案した。

(4) 本解法を、白色雑音過程外力でモデル化した分布荷重を受ける2径間および3径間の連続ばりに適用し、その有効性を確認した。さらに、得られた応答の特性について考察を加えた。

## 参考文献

- 1) 土木学会編：構造物の安全性・信頼性，土木学会，1976-10.
- 2) Y.K.Lin: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill, 1967.
- 3) E.Vanmarcke: *Random Field-Analysis and Synthesis*, The MIT Press, 1983.
- 4) H.O.Madson, S.Krenk and N.C.Lind: *Method of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., 1986.
- 5) 高岡宣善，白木渡，松保重之：不規則関数論に基づく道路橋空間領域での信頼性解析，土木学会論文報告集，第334号，pp.79-88, 1983-6.
- 6) 白木渡，高岡宣善，松保重之，山本克之：都市高速道路高架橋における渋滞時活荷重のモデル化，土木学会論文集，No. 362/I-4, pp.239-248, 1985-10.
- 7) 白木渡，松保重之，山本克之，高岡宣善：道路橋における2径間連続主桁の信頼性解析，土木学会論文集，No. 368/I-5, pp.225-234, 1986-4.
- 8) R.B.Corotis and V.A.Jaria: *Stochastic Nature of Building Live Load*, ASCE. Vol.105, No.ST3, pp.493-510, 1979-3.
- 9) 岡林隆敏：不規則な分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第316号，pp.11-21, 1981-12.
- 10) А. Р. Р ж а н и ц ы н (高岡宣善訳)：構造物の信頼性解析，丸善株式会社，1980-12.
- 11) W.Wedig: *Stochastic boundary and eigenvalue problems, Stochastic Problems in Dynamics*, (Edited by B.L.Clarkson), Pitman Publishing Limited, pp.54-66, 1977.
- 12) 岡林隆敏，浦川剛，吉田啓三：相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析，土木学会論文報告集，第341号，pp.155-162, 1984-1.
- 13) M.Shinozuka: *Structural Response Variability*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE. Vol.113, No.6, pp.825-842, 1987-6.
- 14) C.G.Bucher and M.Shinozuka: *Structural Response Variability II*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE. Vol.114, No.12, pp.2035-2054, 1988-12.
- 15) 高田毅士：不確定性力学特性を有する梁の応答と信頼性解析に関する考察，日本建築学会構造系論文報告集，第409号，pp.67-73, 1990-3.
- 16) 岡林隆敏，花井正美，吉田啓三：不規則分布荷重を受けるアーチ部材の分散・共分散解析，日本建築学会構造系論文報告集，第423号，pp.97-104, 1991-5.
- 17) L.Arnold: *Stochastic Differential Equation*, Jhon Wiley & Sons, 1974.
- 18) 成岡昌夫，遠田良喜：伝達マトリックス法（コンピュータによる構造工学講座），倍風館，1975-3.
- 19) 大地洋三：マトリックス構造解析，コロナ社，1979-8.
- 20) E.C.Pestel and F.A.Leckie: *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, 1963.
- 21) 有本卓：カルマンフィルタ，産業図書，1981-4.
- 22) 木村英紀：動的システム理論，産業図書，1974-7.

(1994. 8. 29 受付)

# PROBABILISTIC ANALYSIS OF MULTI-SPANNED CONTINUOUS BEAMS SUBJECTED TO STOCHASTICALLY DISTRIBUTED LOAD

Takatosi OKABAYASI, Shouji KAWAKADO and Keizou YOSIDA

This paper is concerned with a method for calculating the variance of the static deflections and the internal forces of multi-spanned continuous beams subjected to stochastically distributed loads. The purpose of this paper is to explain the basic concept of the present method and to apply the method to the continuous beams subjected to distributed loads idealized into the white noise random field.

As the numerical results, the standard deviations of the response of the displacements and the internal forces are shown for two-spans continuous beams and three-spans continuous beams with a few support conditions under the white noise distributed loads.