

曲げ・ねじりを受ける薄板の変位拘束端に生ずる クラックと剥離の分岐問題

三輪昌弘¹・長谷部宣男²・中島将貴³・中村卓次⁴

¹正会員 工修 東海旅客鉄道株式会社 技術本部 (〒103 東京都中央区八重洲1-6-6)

²正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

³学生員 名古屋工業大学大学院 工学部社会開発工学科

⁴正会員 工修 ヒメノコンサルタント株式会社 (〒461 名古屋市東区東大曾根町12-19)

境界の一部が変位拘束される薄板が面外荷重を受ける場合について、変位拘束部分と自由境界の接点での応力集中が原因で発生するクラックと、変位拘束部分に沿って生ずる剥離の分岐問題について解析する。有理写像関数と複素応力関数による解法で、一様曲げ、一様ねじり、あるいは集中ねじりモーメントが作用する場合、固定辺と単純支持辺のそれぞれに対して、これらの一端から生じた微小クラックの応力拡大係数と、剥離の応力の強さを求め、さらにクラックや剥離発生のエネルギ―解放率を求めて、クラックと剥離の発生条件およびこれらの破壊の進み方について、Poisson比や荷重比を変えて考察する。

Key Words : crack, stress intensity factor, debonding, stress intensity of debonding, energy release rate, stiffened, simple support, thin plate bending, mapping function, complex stress function

1. まえがき

材料に破壊を生じさせる要因のひとつに、変形の拘束端での応力集中があげられる。例えば橋梁等の鋼構造物で、補剛材やリブ、フランジなどで面外変形を拘束された板材料には、振動、横揺れにより、これらを起点とする疲労亀裂の発生がみられる¹⁾。補剛材やリブは板の中間部で、フランジは板の縁端部で面外変形を拘束する構造であるが、本論文では後者に相当する、板の縁の一部に変位拘束を受け、そこから破壊を生ずる構造モデルを解析する。

図-1に示す境界の一部に変位拘束を受ける半無限板が、面外変形を受ける場合を考える。変位拘束の条件には、剛な固定と単純支持の2種類を考える。以下本稿では、これらを固定辺および単純支持辺と呼ぶことにする。この問題は、図-1の斜線で示す変位境界と、それ以外の外力境界とが存在する混合境界値問題として解かれる。混合境界値問題は、変位境界の与え方によって次の2つに分けられる。すなわち、固定辺の条件である、2つの変位成分が境界の一部分で与えられ、他の境界は外力境界である第1種混合境界値問題²⁾と、単純支持辺の条件である、外力の1成分と変位の1成分が境界の一部で与えられ、

他の境界は外力境界である第2種混合境界値問題^{3, 4)}とがあり、後者は前者に比べて数学的に難しい。

これらの拘束条件は、代表的な板の支持条件であるほかに、例えば拘束部分は、板の一部に補強材を溶接あるいは接着剤で取り付けた構造や、板と他の部材の交差部のモデルでもある。図-1の斜線で示す変位拘束境界を、板に取り付けた補強材と考える。補強材の幅 d が小さい場合には、板と補強材の接合線を軸として、補強材は比較的回転しやすい状態である一方、長さ a の方向には、板のたわみに対する抵抗が強く、単純支持の変位拘束条件として扱うことができる。 d が大きくなって、接合線を軸とした回転に対する抵抗が大きくなり、回転できない場合固定辺として扱うことができる。一般の変位拘束状態は、固定辺と単純支持辺の間にあると思われる。

変位拘束端の破壊現象には、端点を起点として材料内部に向かってクラックが発生する場合と、板と変位拘束部分の接合線に沿って剥がれる場合の2つが考えられる。後者を本論文では剥離と呼ぶことにする。クラックと剥離のどちらの破壊が生ずるか、さらに剥離が生じて進行したとき、その途中からクラックが発生するか否かの考察等を行う。クラックの発生方向については、用いるクラック長が極めて

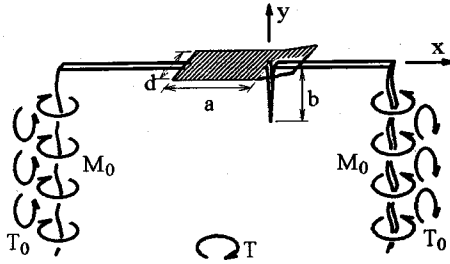


図-1 変位境界から剥離を生じ剥離先端から分岐したクラックを有する半無限板

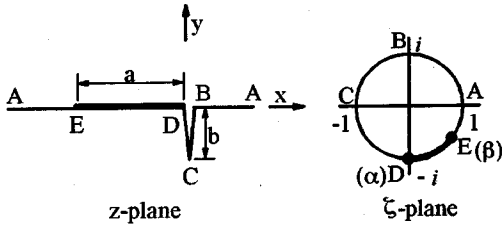


図-2a クラック発生後の形状と単位円

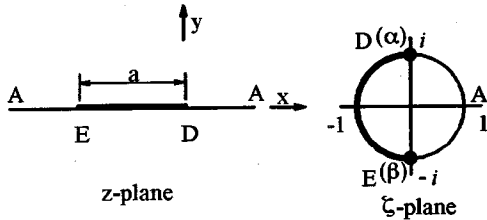


図-2b クラック発生前の形状と単位円

短く、クラック発生条件としてエネルギー量を扱うこと、解析上のパラメータを減らすこともあり、簡単のためクラック方向を境界線に直角方向と固定して解析する(結語参照)。

解析には、領域を単位円内部に写像する有理型写像関数と複素応力関数による方法を用いる。この一般解を利用して、クラック先端の応力拡大係数や、剥離先端の応力の強さを求め、これよりクラックや剥離が発生するときのエネルギー解放率を求めて、クラックと剥離の分岐問題を考察する。

同種の解析は、平面問題⁵⁾ではなされているが、面外曲げの問題での例はないように思われる。

2. 解析形状と写像関数

図-1の解析例について、クラック発生後と前の解析形状を図-2a, 2bのように考える。図-2aに示す、長さ b のクラックを有する半平面(z -plane)を単位円

内部(ζ -plane)に写像する有理写像関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式から得られる無理関数より、次式の形に作られる^{3), 6), 7)}。

$$z = \omega(\zeta) = -ib\sqrt{2} \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\zeta} \\ = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (1)$$

ここに E_0, E_k, E_c, ζ_k は複素定数、 n は写像関数の項数で本稿では $n=24$ を用いている。式(1)で写像される形状は、分数式の和の形で表される有理写像関数を用いているため、クラック先端 C や、隅角部 B および D は、厳密には鋭い角を持った形状とはならず、微小な丸みを有している。しかし写像関数の表す形状の曲率半径を計算¹²⁾すると、クラック先端の曲率半径 ρ とクラック長さ b の比 ρ/b は、 $\rho/b = 0.787 \times 10^{-13}$ と非常に小さく、また B, D 点の曲率半径も $\rho/b = 0.00625$ と小さい。本稿で扱う問題は、クラック長さ b に対し、変位境界 DE の長さ a を十分に長く取り、 $b/a \ll 1$ を解析の対象としているので、この写像関数を使って得られる解の精度は、相対的にさらに向上する。なお DE の長さ a は、写像関数の式(1)には陽には現れず、後述の応力関数でパラメータとして取り込まれる。

また、図-2b に示すクラック発生前の半平面を単位円の内部に写像する写像関数は、式(1)で $E_k=0$ ($k=1, \dots, n$) の特別な場合として次式で表せる。

$$z = \omega(\zeta) = -a \left(\frac{i}{1-\zeta} + \frac{1-i}{2} \right) \quad (2)$$

式(2)の写像関数は、クラック発生前の境界 DE の端点 D から剥離が生ずるときの、剥離の応力の強さおよび剥離のエネルギー解放率を解析するために用いられる。

3. クラックおよび剥離のエネルギー解放率

前述の有理写像関数と複素応力関数による解法で得られる一般解を利用して、クラックや剥離のエネルギー解放率を導く。

図-2において、直交するたわみ角の2成分 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ なる固定境界を DE で与えるとき、 DE を本論文では固定辺、固定境界と自由境界の接点 D, E を固定端と呼ぶことにする。また、 DE での x 軸方向のたわみ角 $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ 、 y 軸方向の曲げモーメント

$m_y=0$ なる単純支持条件を与えるとき、DE を単純支持辺、単純支持辺と自由境界の接点を単純支持端と呼ぶ。さらに、板の固定辺や単純支持辺の剥離を扱う場合、固定端あるいは単純支持端の力学的な状態は、それぞれの剥離の先端での状態と等価であることから、これらを剥離先端と称する。

(1) 固定辺の解

図-2に示す、境界の一部 DE が固定辺で変位拘束された半無限板(z-plane)が、x 軸方向無限遠で一様曲げモーメント M_0 と、一様ねじりモーメント T_0 を受ける場合を考える(図-1参照)。

クラック発生後の形状に、 M_0 あるいは T_0 が作用する場合の複素応力関数 $\phi(\zeta)$ の一般解は、式(1)を用いて、それぞれ式(3),(4)で与えられる²⁾。

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k} B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \frac{M_0 E_0}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)} - \frac{M_0}{4D\kappa(1+\nu)} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] + \text{const}; \quad (3)$$

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k} B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \frac{iT_0 E_0}{4D\chi(1)(1-\zeta)} + \frac{iT_0}{4D\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] + \text{const} \quad (4)$$

ここに、 ν および D はそれぞれ Poisson 比および薄板の曲げ剛さ、Plemelj 関数 $\chi(\zeta)$ およびその他の定数は次式で与えられる。

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{-\lambda} (\zeta - \beta)^{\lambda}; \quad \lambda = 0.5 - i\delta; \quad \delta = \frac{\ln \kappa}{2\pi};$$

$$\kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad A_k = \phi'(\zeta_k); \quad B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k)}; \quad \zeta_k = \frac{1}{\zeta_k} \quad (5)$$

また、 α, β は固定端 D, E に対応する単位円上の点である。 A_k は複素定数で、式 $\phi'(\zeta_k) = A_k$ ($k=1, \dots, n$) の実部、虚部に関する $2n$ 元、すなわち今の場合、 48 元連立1次方程式を解いて決められる。

クラック発生前の応力関数 $\phi(\zeta)$ は、式(3), (4)を用いる写像関数の式(1)を(2)に替え、 $E_0 = -ia$, $E_k = 0$ (したがって $B_k = 0$)として次式で得られる。

$$\phi(\zeta) = \frac{iaM_0\chi(\zeta)}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)} + \text{const};$$

$$\phi(\zeta) = \frac{-aT_0\chi(\zeta)}{4D\chi(1)(1-\zeta)} + \text{const} \quad (6a, b)$$

式(6)には写像関数の近似を含む E_k がいないため、応

力関数は厳密解として求まる。

クラック発生前の応力成分は、式(6)で与えられる $\phi(\zeta)$ の一階微分のオーダーで表され、 $\chi(\zeta)$ の一階微分 $\chi'(\zeta)$ に起因して $\zeta = \alpha$ および $\zeta = \beta$ 、すなわち固定端 D, E で応力成分は特異性を示し無限大となる。したがって、特異点である固定端を始点として板の内側に向かってクラックが発生したり、あるいは板と固定辺の間に剥離が生ずる可能性がある。今図-2b の点 D 側に着目して、これらの現象について解析し考察する。

まず2つの破壊現象のうち、図-2b の DE 部分が薄板 ADEA から剥離する場合を考える。剥離先端の応力の特性を表す指標を、クラック先端の応力拡大係数 K に対応して、本論文では剥離先端の応力の強さと言い、 $\tilde{\alpha}_0$ で表す。さらに $\tilde{\alpha}_0$ を用いて剥離発生エネルギー解放率 G_{deb} を導く。

固定端 D に対応する、単位円上の $\zeta = \alpha$ での $\tilde{\alpha}_0$ は、クラック発生前の解、式(6)を用いて次式で表すことができる[付録 I]。

$$\tilde{\alpha}_0 = 2\sqrt{2}D(1+\nu)\exp(-\pi\delta) \frac{|\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)|^{\lambda} g(\alpha)}{\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)}$$

$$\cdot \exp\left\{i\lambda\left(\theta_A + \pi + \frac{\gamma}{2}\right)\right\};$$

$$g(\alpha) = \lim_{\zeta \rightarrow \alpha} \left[\phi'(\zeta)(\zeta - \alpha)^{\lambda} (\zeta - \beta)^{1-\lambda} \right] \quad (7a, b)$$

ただし、 θ_A は剥離面と x 軸がなす角でここでは $\theta_A = \pi$ 、 γ は単位円上で α と β の中心角 $\gamma = \angle\alpha\beta$ で、 M_0 が作用するとき $g(\alpha)$ は式(6a)より、

$$g(\alpha) = \frac{iaM_0}{4D(1+\nu)\chi(1)} \cdot \frac{(1-\lambda)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)} \quad (8)$$

また、 T_0 が作用するとき $g(\alpha)$ は次式で表わされる。

$$g(\alpha) = \frac{aT_0}{4D\chi(1)} \cdot \frac{(1-\lambda)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)} \quad (9)$$

M_0 と T_0 が同時に作用するときの剥離先端の応力の強さは、式(8), (9)および(7a)より、重ね合わせによって次式で得られる。

$$\tilde{\alpha}_0 = \left\{ (1+\nu)T_0 - iM_0 \right\} \frac{(1-\lambda)a^{\lambda}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

剥離発生エネルギー解放率 G_{deb} は、付録 II を参照し、 $1-\lambda = \lambda$, $a^{\lambda} = a^{1-\lambda}$ (バーは共役を表す)なる関係と式(10)により次式で得られる。

$$G_{deb} = \frac{\pi\kappa}{2D(1+\nu)^2} \tilde{\alpha}_0 \overline{\tilde{\alpha}_0}$$

表-1 固定端から生じた微小クラックの応力拡大係数 F_B , F_S ($b/a=0.001$)

load	M_0		T_0	
	$F_B^{(M)}$	$F_S^{(M)}$	$F_B^{(T)}$	$F_S^{(T)}$
0	0.3273	0.6184	0.5595	-0.7236
0.25	0.1608	0.7072	0.7525	-0.5141
0.5	-0.0699	0.7454	0.9359	-0.0921

$$= \frac{\kappa a}{16\pi D} \left\{ \pi^2 + (\ln \kappa)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{M_0}{1+\nu} \right)^2 + T_0^2 \right\} \quad (11)$$

次に、クラックが発生する場合を考える。微小クラックが発生するときに解放されるひずみエネルギーを、微小クラックの応力拡大係数から求めるとき、クラック長 b は限りなく0に近いことが望ましい。しかし $b \rightarrow 0$ のとき、応力拡大係数は急激に変化する²⁾ため外挿によって $b=0$ のときの値を求めることができない。したがってここでは、クラック発生エネルギー解放率として、 $b/a=0.001$ の微小クラックを用い、この応力拡大係数、ひずみエネルギー解放率をもってクラック発生エネルギー解放率とする。

曲げおよびせん断モードの応力拡大係数 k_B, k_S は、式(1)と(3), (4)を用いて次式で得られる⁷⁾。

$$k_B - ik_S = -2D(1+\nu) \exp\left(-\frac{i\delta_0}{2}\right) \frac{\phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} \quad (12)$$

ここに δ_0 はクラックと x 軸のなす角で $\delta_0 = -\pi/2$, ζ_0 は単位円上のクラック先端の座標で $\zeta_0 = -1$ である。次式で無次元化した、 $b/a=0.001$ のクラックの応力拡大係数を表-1に示す²⁾。

$$\begin{aligned} F_B^{(M)} + iF_S^{(M)} &= \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B^{(M)} + ik_S^{(M)}}{M_0 \sqrt{a}}; \\ F_B^{(T)} + iF_S^{(T)} &= \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B^{(T)} + ik_S^{(T)}}{T_0 \sqrt{a}} \end{aligned} \quad (13a, b)$$

ここに、添字(M), (T)は、それぞれ曲げモーメント M_0 , ねじりモーメント T_0 が作用した場合を表す。 M_0 と T_0 が同時に作用するときの応力拡大係数は、重ね合わせによって次式で表せる。

$$k_B = k_B^{(M)} + k_B^{(T)}; \quad k_S = k_S^{(M)} + k_S^{(T)} \quad (14a, b)$$

付録IIにより、クラック発生エネルギー解放率 G_{crack} は、応力拡大係数 $K (=k_B + ik_S)$ を用いて次式で表せる。

$$G_{crack} = \frac{\pi \kappa}{D(1+\nu)^2} K \bar{K} \quad (15)$$

したがって、固定端からのクラック発生エネルギー解放率は、式(13), (14)および(15)により最終的に次式で得られる。

$$G_{crack} = \frac{\pi \kappa a}{D(3+\nu)^2} \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + T_0 F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + T_0 F_S^{(T)} \right)^2 \right\} \quad (16)$$

(2) 単純支持辺の解

前述の固定辺の場合と同様、図-2a, b に示す半無限板に、直線境界の一部 DE で単純支持条件を与え、 x 軸方向の無限遠で一樣な曲げモーメント M_0 が、 y 軸方向の無限遠で集中ねじりモーメント T が作用する場合を考える。 T は、単純支持辺に作用したと考えてもよい。固定辺の場合と異なり、荷重として x 軸方向の一樣ねじり T_0 を考えず、集中ねじり T としたのは次の理由による。クラックのない半無限板の一部に単純支持条件を与え、 T_0 を荷重として求まる応力関数 $\phi(\zeta)$ には、単純支持端で特異性を示す項が含まれず応力集中を生じない⁹⁾。すなわち、 T_0 の荷重によっては、ここで考える破壊の可能性はない。

クラック発生後の形状に、一樣曲げ M_0 が作用する問題の複素応力関数 $\phi(\zeta)$ は、式(1)の写像関数を用いて次式で与えられる³⁾。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= H(\zeta) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{A_k B_k}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right\} + \text{const}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= -\frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left\langle \frac{E_0 \chi(\zeta)}{1-\zeta \chi(1)} - \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{E}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right\} \right\rangle \quad (17) \end{aligned}$$

また、集中ねじり T が作用するときの $\phi(\zeta)$ は、次式で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= H(\zeta) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{A_k B_k}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right\} + \text{const}; \end{aligned}$$

$$H(\zeta) = \frac{T}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \cdot \log \frac{-2\chi(1)\chi(\zeta) + (2-\alpha-\beta)\zeta + 2\alpha\beta - \alpha - \beta}{1-\zeta} \quad (18)$$

ただし、単純支持端の場合の Plemeij 関数 $\chi(\zeta)$ は、式(5)において指数部 $\lambda=0.5$ ($\delta=0$)として与えられ、その他の定数は、固定端の場合と同じである。

また、クラック発生前の応力関数 $\phi(\zeta)$ は、式(2)の写像関数を用いて、それぞれの荷重に対して次式で得られる。

$$\phi(\zeta) = \frac{iaM_0\chi(\zeta)}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)};$$

$$\phi(\zeta) = \frac{T}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \cdot \log \frac{-2\chi(1)\chi(\zeta) + (2-\alpha-\beta)\zeta + 2\alpha\beta - \alpha - \beta}{1-\zeta} + \text{const} \quad (19a, b)$$

クラック発生前の応力成分は、式(19)の $\phi(\zeta)$ の一階微分のオーダーで表され、 $\chi(\zeta)$ の一階微分に起因して $\zeta=\alpha$ および $\zeta=\beta$ 、すなわち固定辺のときと同様、単純支持端 D および E で特異性を示し無限大となる。したがって、単純支持端を始点として板の内側に向かってクラックが発生したり、あるいは板と単純支持辺に剥離が生ずる可能性がある。点 D に着目して、これらの現象について解析し考察を行う。

まず剥離が発生する場合を考える。 M_0 が作用するときの $g(\alpha)$ は、式(7b)で $\lambda=0.5$ として次式で得られる。

$$g(\alpha) = \frac{iaM_0}{8D(1+\nu)\chi(1)} \cdot \frac{\alpha-\beta}{1-\alpha} \quad (20)$$

また、T が作用するときの $g(\alpha)$ は、式(7b)によって次式で得られる。

$$g(\alpha) = \frac{-T\chi(1)}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \quad (21)$$

M_0 と T が同時に作用するときの剥離先端の応力の強さ $\tilde{\alpha}_0$ は、式(20)、(21)および(7)より、次式で得られる。

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{-i\sqrt{a}M_0}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}i(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} \cdot \frac{T}{\sqrt{a}} \quad (22)$$

よって剥離の進展によるエネルギー解放率 G_{deb} は、付録 II により、 $1-\lambda = \lambda$ 、 $a^\lambda = a^{1-\lambda}$ および式(22)から

表-2 単純支持端から生じた微小クラックの応力拡大係数 F_B, F_S ($b/a=0$)

load	M_0		T	
	$F_B^{(M)}$	$F_S^{(M)}$	$F_B^{(T)}$	$F_S^{(T)}$
0	0.6256	-0.1236	0.2655	-0.0525
0.25	0.5755	-0.0727	0.2818	-0.0356
0.5	0.5419	-0.0397	0.2957	-0.0217

最終的に次式で与えられる。

$$G_{deb} = \frac{\pi\kappa a}{16D(1+\nu)^2} \left\{ M_0 + \frac{4(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} \cdot \frac{T}{a} \right\}^2 \quad (23)$$

次にクラックの場合を考える。応力拡大係数は、式(17)、(18)を(12)に代入して得られ、次式で無次元化した微小クラックの応力拡大係数 F_B, F_S を表-2に示す^{3, 4)}。前述の固定辺の問題の場合と異なり、外挿によって $b/a=0$ のときの応力拡大係数が得られる。

$$F_B^{(M)} + iF_S^{(M)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{k_B^{(M)} + ik_S^{(M)}}{M_0\sqrt{a}}; \quad (24a, b)$$

$$F_B^{(T)} + iF_S^{(T)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\sqrt{a}}{T} (k_B^{(T)} + ik_S^{(T)})$$

ここに、添字(M)、(T)は、それぞれ曲げモーメント M_0 、ねじりモーメント T が作用した場合を表す。

単純支持端近傍、クラック先端近傍の応力成分は、どちらもそれぞれの特異点からの距離に対して-0.5乗のオーダーの特異性を示す。したがって今の問題では、図-2aに示すクラック長さ b が極めて短くなり、クラック先端近傍での特異性の状態が、単純支持端の特異性の影響を受けても、両者の特異性のオーダーが同じであるので、 $b \rightarrow 0$ で F_B, F_S は一定値に収束する。

M_0 と T が同時に作用し、クラックが発生するときのエネルギー解放率は、固定端の場合と同様式(24)、(14)および(15)により、次式で得られる。

$$G_{crack} = \frac{\pi\kappa a}{D(3+\nu)^2} \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + \frac{T}{a} F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + \frac{T}{a} F_S^{(T)} \right)^2 \right\} \quad (25)$$

4. 変位拘束端からの剥離やクラック発生の条件

これまでに導いた、クラック発生のエネルギー解放率 G_{crack} 、および剥離発生のエネルギー解放率

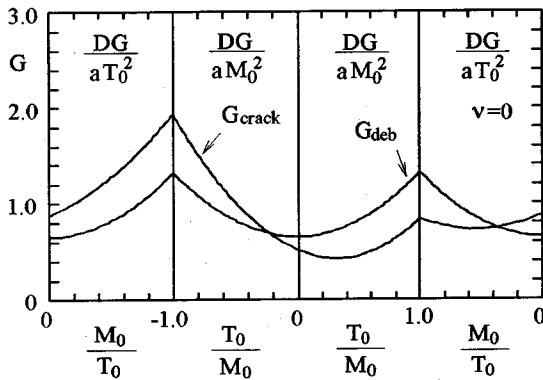


図-3a 固定端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0$)

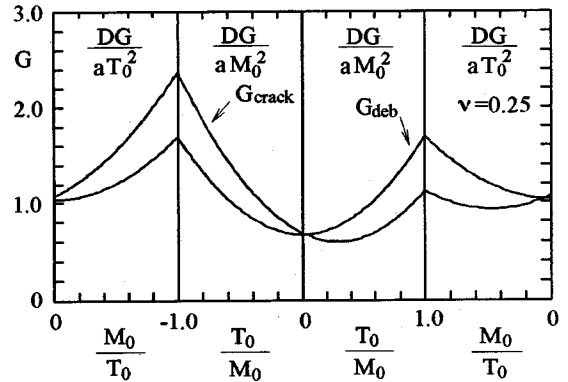


図-3b 固定端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0.25$)

G_{deb} を用いて、固定端または単純支持端を有する半無限板において、その変位拘束端から生ずるクラックと剥離の分岐問題を、Poisson 比および荷重条件によって考察する。発生する破壊現象について、エネルギー解放率とエネルギー解放率で表される破壊靱性値の比較により論ずる。

(1) 固定端の場合

まず、固定端の場合を考える。クラックの発生のエネルギー解放率 G_{crack} 、および固定端からの剥離発生のエネルギー解放率 G_{deb} は、それぞれ式(16)および(11)で表される。任意の大きさの荷重 M_0 と T_0 に対して、 G_{deb} と G_{crack} のグラフを Poisson 比 $\nu=0, 0.25, 0.5$ について図-3a, b, c に示す。縦軸の G は、それぞれの荷重比に対して無次元化した G_{deb} または G_{crack} を示す (D は板の曲げ剛さ)。横軸の荷重の比は、 M_0, T_0 とともに 0 から正負の無限大の大きさに対応する。 ν の影響に関し、全体的に ν が大きくなるほど G_{deb} と G_{crack} の両方が大きくなる傾向にある。

ここで、剥離やクラックの発生条件について考察する。エネルギー解放率で表される剥離発生に対する破壊靱性値、およびクラック発生に対する破壊靱性値を、それぞれ $(G_{deb})_{CR}$ および $(G_{crack})_{CR}$ とする。図-3で、与えられた荷重に対して決まる G_{deb} および G_{crack} の値と、それぞれ $(G_{deb})_{CR}$ および $(G_{crack})_{CR}$ の値との大小関係により、生ずる破壊現象は、以下の4つの場合が考えられる。

- (i) $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} < (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離もクラックも発生しない。
- (ii) $G_{deb} > (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} < (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離は生じるが、クラックは発生しない。
- (iii) $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} > (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離は生じないが、クラックは発生する。

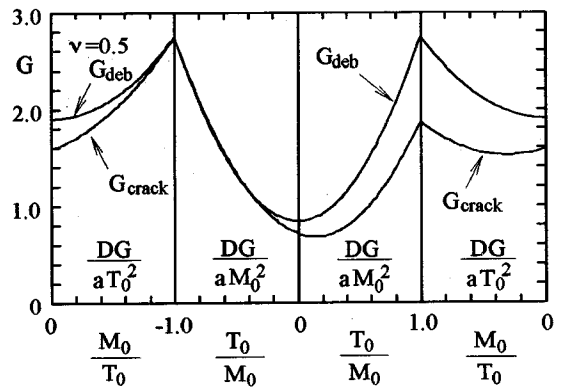


図-3c 固定端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0.5$)

- (iv) $G_{deb} > (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} > (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離もクラックも発生する可能性がある。しかし実際には、どちらか一方の破壊が生ずると思われるので、その判断が必要となる。そのためさらに、剥離によるエネルギー解放率とクラックの発生によるエネルギー解放率の比 $C = G_{deb}/G_{crack}$ と、それぞれのエネルギー解放率で表される破壊靱性値の比 $C_0 = (G_{deb})_{CR}/(G_{crack})_{CR}$ の大小関係を比べることによって、どちらの現象が生ずるかが決定される。すなわち、 $C > C_0$ のとき、つまり $\frac{G_{deb}}{(G_{deb})_{CR}} > \frac{G_{crack}}{(G_{crack})_{CR}}$ と表され剥離が生じ、 $C < C_0$ のときにはクラックが発生する。 $C = C_0$ の場合、ともに発生する。

このように、(i)の場合には剥離もクラックも発生せず、(ii)と(iii)の場合には、剥離かクラックのどちらか一方に定められる。しかし(iv)の場合は、剥離とクラック各々の破壊靱性値だけではどちらが生ず

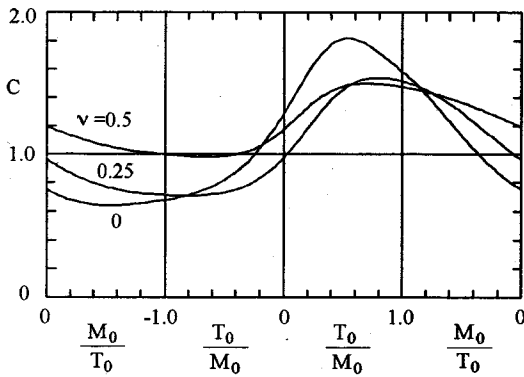


図4 固定端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率の比C

るかは定められず、さらにCとC₀の関係を明らかにして定めなければならない。

この(iv)の場合について、以下に詳しく述べる。

式(11)と(16)より、G_{deb}とG_{crack}の比Cは、次式で得られる。

$$C = \frac{G_{deb}}{G_{crack}} = \frac{(3+\nu)^2 \left\{ \pi^2 + (\ln \kappa)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{M_0}{1+\nu} \right)^2 + T_0^2 \right\}}{16\pi^2 \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + T_0 F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + T_0 F_S^{(T)} \right)^2 \right\}} \quad (26)$$

式(26)のグラフを、Poisson比ν=0, 0.25, 0.5の場合について図-4に示す。図-4において、C₀の値がそれぞれの曲線よりも上にある場合にはクラックが発生し、逆に下にある場合には剥離が生じる。

Cの最大値は、ν=0で、M₀/T₀=0.540のときC_{max}=1.8196をとり、このときが固定端からの剥離がもっとも生じやすい荷重条件となる。逆にT₀/M₀=-0.540のとき最小値C_{min}=0.6447で、固定端からクラックが最も発生しやすい。同様に、ν=0.25で、M₀/T₀=0.7888のときC_{max}=1.5373で、剥離が最も生じやすく、M₀/T₀=-0.812のときC_{min}=0.7118で、クラックが最も発生しやすい。また、ν=0.5では、M₀/T₀=0.694のときC_{max}=1.4989、M₀/T₀=-0.640のときC_{min}=0.9838である。

νが小さいほど極大値と極小値の差が大きく、荷重条件による影響を受けやすい。

全体的には概ね、ここで定義するM₀とT₀の作用方向が同符号のときに剥離が生じやすく、M₀とT₀が異符号のときにクラックが発生しやすい傾向となる。

次に、クラックのない状態から、最初に剥離が生

じた場合について、その後の挙動を考察する。剥離の進展によって固定辺の長さaが小さくなると、式(16)、(11)によりG_{crack}とG_{deb}はいずれもaに比例して減少する。すなわち剥離が生じた場合には、G_{deb}が減少してG_{deb}<(G_{deb})_{CR}となった時点で、剥離が停止する。この時点でクラック発生の有無に関して、(ii)の場合aの減少によってG_{crack}も減少するため、クラックは発生しない。すなわち(ii)から(iii)の状態にはならない。(vi)の場合には、式(26)で示したとおり、Cはaに無関係であるため、C>C₀の関係は保たれ、G_{deb}が(G_{deb})_{CR}より小さくなる前にG_{crack}が(G_{crack})_{CR}より小さくなる。したがって一旦剥離が生じたときは、剥離が停止してクラックに分岐することは考えられない。

クラックが発生した後の挙動については、本論文とは別の問題になり、ここでは扱わない。

(2) 単純支持辺の場合

次に、変位拘束の条件が単純支持辺の場合を考える。クラック発生エネルギー解放率G_{crack}、および剥離エネルギー解放率G_{deb}は、それぞれ式(25)および(23)で表される。任意の荷重M₀とTに対して、無次元化したG_{deb}とG_{crack}のグラフをPoisson比ν=0, 0.25, 0.5について図-5a, b, cに示す。横軸の荷重の比によって荷重M₀とTが、それぞれ0から正負の無限大の場合を表す。全体的にνが大きくなるほどG_{deb}とG_{crack}の両方が大きくなる傾向にある。また、ν=0, 0.25, 0.5に対してそれぞれ、M₀/T=-0.4244, -0.4897, -0.5457でG_{deb}とG_{crack}はいずれも0になる。つまり、これらの状態で荷重が作用するときには、単純支持端での応力の特異性が打ち消されていることになる。

剥離やクラックの発生条件について、エネルギー解放率で表される剥離に対する破壊靱性値(G_{deb})_{CR}とG_{deb}の関係、およびクラックの発生に対する破壊靱性値(G_{crack})_{CR}とG_{crack}の関係により、先の固定辺の場合と全く同じように、(i)~(iv)の場合が考えられる。(iv)の場合のクラックと剥離のいずれもが生ずる可能性があるときには、次式で表されるCとC₀=(G_{deb})_{CR}/(G_{crack})_{CR}の大小関係を比べることによって、どちらの現象が生ずるかを決定する。

$$C = \frac{G_{deb}}{G_{crack}} = \frac{(3+\nu)^2 \left\{ \pi^2 + (\ln \kappa)^2 \right\} \left\{ M_0 + \frac{4(1+\nu)T}{\pi(3+\nu)a} \right\}^2}{16(1+\nu)^2 \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + \frac{T}{a} F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + \frac{T}{a} F_S^{(T)} \right)^2 \right\}} \quad (27)$$

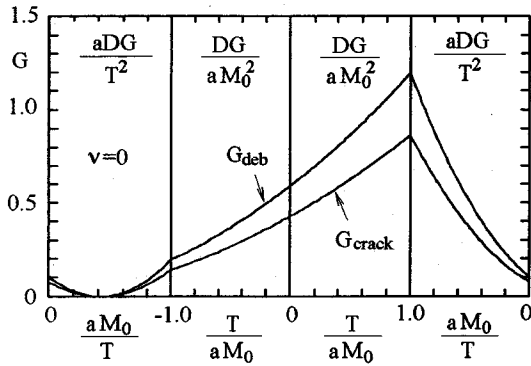


図-5a 単純支持端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0$)

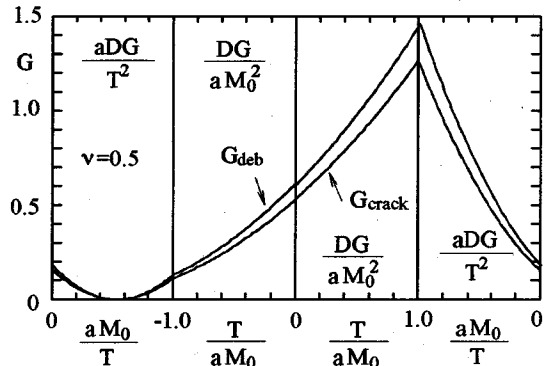


図-5c 単純支持端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0.5$)

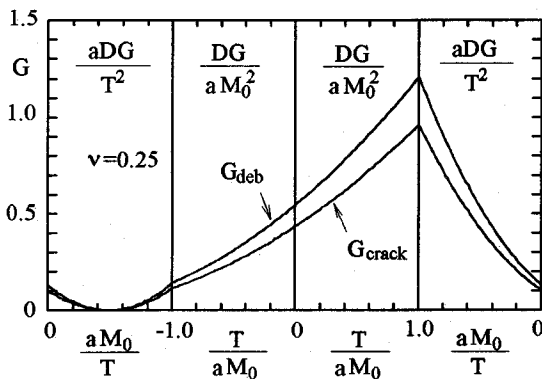


図-5b 単純支持端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率 G_{crack} , G_{deb} ($\nu=0.25$)

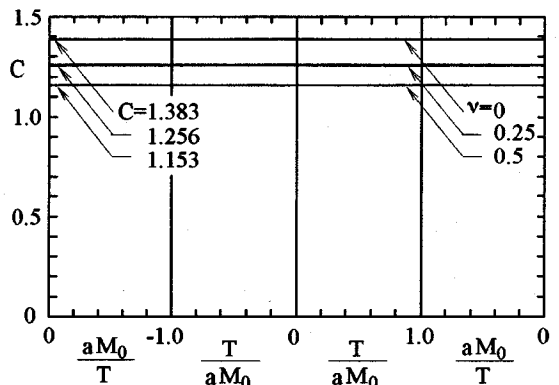


図-6 単純支持端から生じたクラックと剥離のエネルギー解放率の比C

すなわち、 $C > C_0$ のときには剥離が生じ、 $C < C_0$ のときにはクラックが発生する。

式(27)のグラフを、Poisson比 $\nu=0, 0.25, 0.5$ の場合について図-6に示す。それぞれのCの値は荷重条件によらない直線で得られ、 $\nu=0, 0.25, 0.5$ のとき、それぞれ $C=1.383, 1.256, 1.153$ となる。これは、それぞれの ν および表-2に与えられる応力拡大係数に対して、

$$\frac{4(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} = \frac{F_B^{(T)}}{F_B^{(M)}} = \frac{F_S^{(T)}}{F_S^{(M)}} \quad (28)$$

なる関係がみられるため、式(27)を式(28)の関係を考慮してさらに整理すると、荷重条件には無関係な次式が導かれる。

$$C = \frac{(3+\nu)^2}{16(1+\nu)^2} \cdot \frac{1}{F_B^{(M)^2} + F_S^{(M)^2}} \quad (29)$$

(ii), (iv)の場合の、剥離が生じた後の挙動について考察する。剥離が進展して単純支持辺の長さaが変わるときの、 $\nu=0.25$ の G_{deb} のグラフを、いくつ

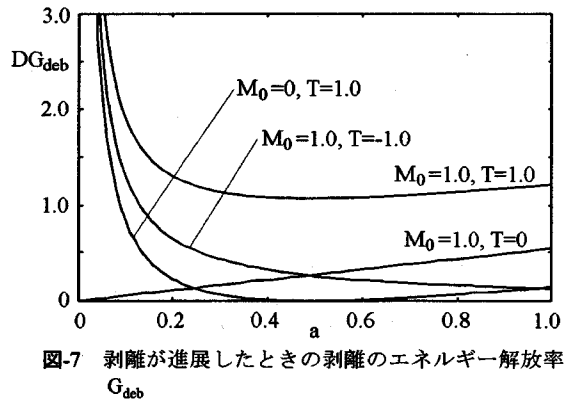


図-7 剥離が進展したときの剥離のエネルギー解放率 G_{deb}

かの代表的な荷重について図-7に示す。 $M_0=1.0, T=0$ のとき、aの減少とともに G_{deb} も直線的に減少しており、 $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ の条件になった時点で剥離が停止する。 $M_0=1.0, T=1.0$ あるいは $M_0=0, T=1.0$ のとき、 $a=0.49$ 付近で G_{deb} が極小値をもっているため、 $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ の条件を満足する場合が存在すれば剥離が停止する。これらに対して $M_0=1.0, T=-1.0$ のときは、aが減少するにしたがって G_{deb} は単調

増加しているため、一旦剥離が発生した場合には、停止することなく剥離が進行し、破断に到る。一方、この間のクラックの発生に関して考察する。単純支持辺の長さ a が変わるときの G_{crack} の変化は、式(27)からわかるように $G_{crack} = CG_{deb}$ で表される。C の値は、図-6、式(29)からわかるように Poisson 比 ν によって定まる一定値である。したがって、図-7の G_{deb} の値を C 倍した値として G_{crack} の図が得られる。しかし $\nu=0.25$ のとき、式(29)で示したとおり $C=G_{deb}/G_{crack}=1.256$ と一定で、一旦剥離が生じたときには、(ii), (iv) いずれの場合も、剥離が停止して、そこからクラックに分岐する可能性は考えられない。

クラックが発生した後の挙動については、固定辺と同様、ここでは扱わない。

5. 結 語

面外曲げを受ける半無限板で、境界の一部を固定あるいは単純支持の条件によって変位拘束される場合、その変位拘束の一端を起点として生ずるクラックと剥離の分岐問題を、作用する荷重条件や Poisson 比を考慮して解析した。

固定辺の問題では、剥離先端の応力の強さが、厳密な解として式(10)で得られ、さらに応力拡大係数や剥離先端の応力の強さを用いて、クラックや剥離が発生するときのエネルギー解放率を式(16), (11)で示した。また、単純支持の場合には、剥離先端の応力の強さ、クラックおよび剥離発生のエネルギー解放率を、それぞれ式(22), (25), (23)で導いた。エネルギー解放率と、エネルギー解放率で表される破壊靱性値とを比較して、クラックと剥離のどちらが発生するかを考察した。さらに両方の現象が同時に生ずる可能性のあるときには、それぞれのエネルギー解放率の比と破壊靱性値との比の大小関係によって生ずる破壊現象を考察した。一旦剥離が生じた場合、拘束条件や荷重条件によって、剥離が停止する場合と停止しない場合の両方の可能性があるが、剥離の進展途中あるいは停止した時点で、クラックが発生する可能性は考えられないことを示した。単純支持条件を与える場合、作用する荷重の組み合わせでクラックや剥離発生によるエネルギー解放率の大きさは変化するが、これらの比は荷重条件によらず一定であることを式(29)で示した。

本報告では、変位拘束端から境界線に直角にクラックが発生する場合を論じた。このクラックが直角に発生することについて少し述べる。図-2b の DA 部分にクラックが発生するときは、縁応力の方

向に直角になるということで、DA に直角方向に発生することは自然のように思われる。したがって D 点で DA に直角方向に発生するのは、発生点が D に近づいたときの極限の場合を解析したことになる。特異点からのクラックの発生方向については、そのクライテリオンによるが、直角方向は、それらのクライテリオンの一つの極限の場合と思われる。任意方向に発生するクラックの解析は、例えば文献7の写像関数を用いて行うことができるので、クラック発生方向のクライテリオンを用いた場合の現象については、別の論文で報告したい。

クラックおよび剥離発生のクライテリオンとして、エネルギー解放率を用いた。このクライテリオンに従わない材料については、エネルギー解放率のクライテリオンの代わりに、その材料のクライテリオンを用いて、本論文と同様に議論が行える。

付録 I 剥離先端の応力の強さ

有理写像関数と複素応力関数を用いて、固定辺や単純支持辺などの変位拘束端から剥離が生ずる場合の、剥離先端の応力の強さの表示式を導く。2次元弾性の問題では、筆者ら^{8), 10), 11)}により解かれているが、これと同様の手法により、薄板の曲げ問題の場合を示す。

図-2b に示す、単位円上の点 α, β に対応する物理面上の座標を、ここでは $z=z_A$ (点 D) および $z=z_B$ (点 E) とし、この2点を変位拘束境界の両端とすると、物理面で複素応力関数 $\Phi(z)$ は、一般に次式で表せる。

$$\Phi(z) = (z - z_A)^{-\lambda} (z - z_B)^{\lambda} f(z) + f_0(z) \quad (A1.1)$$

ただし、 $\lambda = 0.5 - i\delta$ で、固定境界の場合は Poisson 比 ν を用いて $\delta = \frac{In\kappa}{2\pi}$; $\kappa = \frac{3+\nu}{1+\nu}$ 、単純支持境界の場合は $\delta=0$ である。また $f(z)$, $f_0(z)$ は領域内で正則な関数である。ここでは $z=z_A$ 側に着目し、式(A1.1)の導関数を考えて、 $z=z_A$ で特異性を示さない部分を $z=z_A$ のまわりで Taylor 展開すると次式で表せる。

$$\Phi'(z) = (z - z_A)^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m (z - z_A)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (z - z_A)^m \quad (A1.2)$$

ただし、 α_m, ϵ_m は定数である。 $(z - z_A)$ が微小なとき、すなわち z が z_A の近傍の点であるとき、式(A1.2)は高次の項を無視して次式で近似される。

$$\Phi'(z) = \alpha_0 (z - z_A)^{-\lambda}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}_0 \exp(\pi\delta)}{2\sqrt{2D}(1+\nu)} (z-z_A)^{-\lambda} \quad (\text{A1.3})$$

ただし、 $\alpha_0 = \frac{\tilde{\alpha}_0 \exp(\pi\delta)}{2\sqrt{2D}(1+\nu)}$ としている。この関係

は、式(12)で定義されたクラック先端の応力拡大係数 K と、単純支持端からの剥離の応力の強さ $\tilde{\alpha}_0$ の係数が一致するように定めた。すなわち、クラック先端近傍と単純支持端の剥離先端近傍での応力成分は、いずれも先端からの距離に対して -0.5 乗のオーダーの特異性を示し、力学的に等しい状態であることから、 K あるいは $\tilde{\alpha}_0$ を用いて表せる応力成分が互いに等しくなるように係数を選んでいく。

式(A1.1)を写像関数 $z=\omega(\zeta)$ によって、物理面 (z -plane) から単位円内部 (ζ -plane) に写像する。このとき応力関数 $\Phi(z)$ は $\phi(\zeta)$ に、変位拘束点 $z=z_A, z_B$ はそれぞれ $\zeta=\alpha, \beta$ に写像され、 $\phi(\zeta)$ を次式のように表す。

$$\phi'(\zeta) = (\zeta-\alpha)^{-\lambda} (\zeta-\beta)^{\lambda-1} g(\zeta) + g_0(\zeta) \quad (\text{A1.4})$$

$\Phi'(z) = \phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$ であるから、 $\tilde{\alpha}_0$ は式(A1.3)、(A1.4)より、 $z \rightarrow z_A$ の極限を考えて、次式で表せる。

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= 2\sqrt{2D}(1+\nu) \exp(-\pi\delta) \lim_{z \rightarrow z_A} (z-z_A)^\lambda \Phi'(z) \\ &= 2\sqrt{2D}(1+\nu) \exp(-\pi\delta) \\ &\quad \cdot \lim_{\zeta \rightarrow \alpha} \left[\frac{\omega(\zeta) - \omega(\alpha)}{\zeta - \alpha} \right]^\lambda \frac{(\zeta-\beta)^{\lambda-1} g(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ &= 2\sqrt{2D}(1+\nu) \exp(-\pi\delta) \frac{[\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)]^\lambda g(\alpha)}{\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i\lambda \left(\theta_A + \pi + \frac{\gamma}{2} \right) \right\} \quad (\text{A1.5}) \end{aligned}$$

ただし、 θ_A は剥離面と x 軸のなす角、 γ は単位円上で α と β の中心角 $\gamma = \angle\alpha\beta$ で与えられる。

式(A1.5)で表される $\tilde{\alpha}_0$ は、剥離先端点での応力の特異性の強さを表す係数であり、これを剥離先端の応力の強さと呼ぶ。さらに、剥離先端の応力の強さは複素定数で、実部、虚部をそれぞれ A_B および A_S とすると、次のように表される。

$$\tilde{\alpha}_0 = A_B + iA_S \quad (\text{A1.6})$$

変位拘束境界と薄板の接合線(図-8参照)、すなわち剥離進展軸上の応力は、剥離先端の応力の強さ $\tilde{\alpha}_0$ を使って次式で表せる。

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \left\{ (1-\nu) \cosh \pi\delta \right. \\ &\quad \left. - 2(1+\nu) \sinh \pi\delta \right\} |\tilde{\alpha}_0| \cos(\theta_0 + \delta \ln r); \end{aligned}$$

$$M_y = \frac{-(3+\nu)}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \cosh \pi\delta |\tilde{\alpha}_0| \cos(\theta_0 + \delta \ln r);$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \left\{ (1+\nu) \cosh \pi\delta \right. \\ &\quad \left. - 2 \sinh \pi\delta \right\} |\tilde{\alpha}_0| \sin(\theta_0 + \delta \ln r) \quad (\text{A1.7a, b, c}) \end{aligned}$$

ここに、 r は剥離先端からの距離、 θ_0 は $\tilde{\alpha}_0$ の偏角で $\theta_0 = \tan^{-1}[A_S/A_B]$ である。

したがって、上式からわかるように、剥離先端での応力の強さの指標として $|\tilde{\alpha}_0|$ が使えることがわかる。

付録II 剥離やクラックの進展のエネルギー解放率

(1) 剥離進展のエネルギー解放率 G_{deb}

図-2b に示すように、変位拘束境界 DE を x 軸上にとって点 D に着目し、剥離進展前の変位拘束端 D を $z=z_a$ 、剥離進展後の剥離先端 D' を $z=z_a - \Delta a$ 、剥離面開口に関係する曲げモーメント m_y 、せん断力 n_y 、ねじりモーメント m_{xy} 、たわみ角 $\partial w/\partial x$ 、 $\partial w/\partial y$ とすると(図-8)、剥離進展によるエネルギー解放量 ΔU は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_a - \Delta a} \left[m_y \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\int n_y (-dx) + m_{xy} \right) \frac{\partial w}{\partial X} \right] (-dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_a - \Delta a} \text{Im} \left[\left(m_y + i \int p_y dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx \quad (\text{A2.1}) \end{aligned}$$

ただし、 $\text{Im}[\]$ は $[\]$ の虚部、 p_y は置換せん断力で $p_y = n_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ なる関係を用いた。

剥離進展前の複素応力関数 $\Phi(z)$ の一階微分は、一般に式(A1.3)で表せ、剥離進展後の応力関数および剥離の応力の強さをそれぞれ $\Phi^*(z)$ 、 $\tilde{\alpha}_0^*$ とすると、 $\Phi^*(z)$ は次式で近似できる。

$$\Phi^*(z) = \frac{\tilde{\alpha}_0^* \exp(\pi\delta)}{2\sqrt{2D}(1+\nu)(1-\lambda)} (z-z_a + \Delta a)^{1-\lambda} \quad (\text{A2.2})$$

領域内から x 軸に近づくときに+、領域外からは-の添字を付け、Plemelj 関数の性質から式(A2.1)の積分範囲では、 $\Phi^-(x) = \exp(-2\pi i\lambda)\Phi^+(x)$ および $\Phi^{*-}(x) = \Phi^{*+}(x)$ なる関係が成り立つことを利用すると、外力境界では式(A1.3)から次式が得られる²⁾。

$$m_y + i \int p_y dx = -\kappa D(1-\nu) \left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x) \right]$$

$$= -\frac{\kappa(1-\nu)\cosh\pi\delta}{\sqrt{2}(1+\nu)}\bar{\alpha}_0(x-x_a)^{-\lambda} \quad (\text{A2.3})$$

同様に変位境界では式(A2.2)から、 $\bar{\lambda}=1-\lambda$ なる関係を用いて次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} &= \overline{\phi^{*+}}'(x) + \kappa \overline{\phi^{*-}}'(x) \\ &= \frac{(1+\kappa)\bar{\alpha}_0^* \exp(\pi\delta)}{2\sqrt{2}D(1+\nu)\lambda} (x-x_a+\Delta a)^\lambda \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

式(A2.3), (A2.4)を(A2.1)に代入すると ΔU は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{\kappa\{1+\exp(2\pi\delta)\}}{4D(1+\nu)^2} \\ &\quad \cdot \int_{x_a}^{x_a-\Delta a} \text{Im} \left[\frac{\bar{\alpha}_0^* \bar{\alpha}_0^*}{\lambda} (x-x_a)^{-\lambda} (x-x_a+\Delta a)^\lambda \right] dx \\ &= -\frac{\pi\Delta a}{2} \frac{\kappa}{D(1+\nu)^2} \text{Im} \left[i \bar{\alpha}_0^* \bar{\alpha}_0^* \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

$\Delta a \rightarrow 0$ のとき $\bar{\alpha}_0^* \rightarrow \bar{\alpha}_0$ であるから、エネルギー解放率は次式で得られる。

$$G_{\text{deb}} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right) = \frac{\pi\kappa}{2D(1+\nu)^2} \bar{\alpha}_0^* \bar{\alpha}_0 \quad (\text{A2.6})$$

ただし、式(A2.5)の積分を行う際に、以下の関係を用いている (図-8参照)。

$$\begin{aligned} &\int_{x_a}^{x_a-\Delta a} \left[(x-x_a)^{-\lambda} (x-x_a+\Delta a)^\lambda \right]^+ dx \\ &\quad + \int_{x_a}^{x_a-\Delta a} \left[(x-x_a)^{-\lambda} (x-x_a+\Delta a)^\lambda \right]^- dx \\ &= \int_F (z-z_a)^{-\lambda} (z-z_a+\Delta a)^\lambda dz \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

式(A2.7)は、plemelj 関数の性質を用いて、以下のように変形される。

$$\begin{aligned} &\int_{x_a}^{x_a-\Delta a} (x-x_a)^{-\lambda} (x-x_a+\Delta a)^\lambda dx \\ &= \frac{1}{1+\exp(2\pi\delta)} \int_F (z-z_a)^{-\lambda} (z-z_a+\Delta a)^\lambda dz \\ &= \frac{2\pi i \lambda \Delta a}{1+\exp(2\pi\delta)} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

(2) クラック進展のエネルギー解放率 G_{crack}

剥離の場合と同様の方法で、エネルギー解放量 ΔU を求める。たわみ角が剥離の場合に比較して、相対的に2倍になることに留意すると、式(A2.1)は

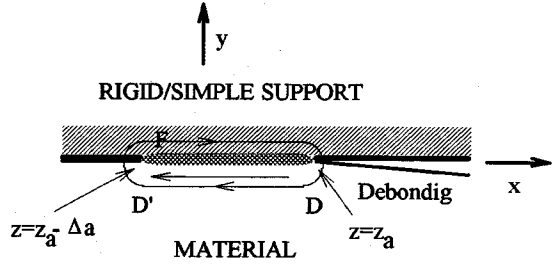


図-8 剥離先端近傍の座標系

クラックの場合次式で表せる。

$$\Delta U = \int_{z_a}^{z_a-\Delta a} \text{Im} \left[(m_y + i \int p_y dx) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx \quad (\text{A2.9})$$

クラック進展前の応力関数 $\Phi(z)$ の一階微分、および進展後の応力関数 $\Phi^*(z)$ は、進展前後の応力拡大係数を $K(=k_B + ik_S)$, $K^*(=k_B^* + ik_S^*)$ とすると、それぞれ次式で近似できる。

$$\Phi'(z) = \frac{\bar{K}}{-2\sqrt{2}D(1+\nu)} (z-z_a)^{-1/2} \quad (\text{A2.10})$$

$$\Phi^*(z) = \frac{\bar{K}^*}{\sqrt{2}D(1+\nu)} (z-z_a+\Delta a)^{1/2} \quad (\text{A2.11})$$

よって、 $\Delta a \rightarrow 0$ のとき $K^* \rightarrow K$ を考慮すると、剥離の場合と同様にして、エネルギー解放率は次式で得られる。

$$G_{\text{crack}} = \frac{\pi\kappa}{D(1+\nu)^2} K \bar{K} \quad (\text{A2.12})$$

参考文献

- 1) Fisher, J. W. : *Fatigue and Fracture in Steel Bridges*, Wiley-Interscience, 1984.
- 2) Hasebe, N. : Mixed Boundary Value Problem of Plate with Crack, *J. Engrg. Mech.*, Vol.110, No.1, pp.37-48, 1984.
- 3) Hasebe, N., Miwa, M. and Nakamura, T. : Second Mixed-Boundary-Value Problem for Thin-Plate Bending, *J. Engrg. Mech.*, Vol.119, No.2, pp.211-224, 1993.
- 4) Hasebe, N., Nakamura, T. and Ito, Y. : Analysis of a Mixed Boundary Value Problem for a Thin Plate, *J. Appl. Mech.*, Vol.61, pp.555-559, 1994.
- 5) Okumura, M., Hasebe, N. and Nakamura, T. : A Crack and a Debonding at an End of a Simple Support in Plane Elasticity, *Acta Mechanica* 74, pp.139-153, 1988.
- 6) Hasebe, N. : Uniform Tension of a Semi-Infinite Plate

- with a Crack at an End of a Stiffened Edge, *Ingenieur Archiv* 48, pp.129-141, 1979.
- 7) Hasebe, N. and Inohara, S. : Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack, *Ingenieur Archiv* 49, pp.51-62, 1980.
 - 8) Hasebe, N., Tsutsui, S. and Nakamura, T. : Debondings at a Semielliptic Rigid Inclusion on the Rim of a Half Plane, *J. Appl. Mech.*, Vol.55, pp.574-579, 1988.
 - 9) 中島将貴, 三輪昌弘, 村瀬義昭, 長谷部宣男, 中村卓次 : ねじりを受ける薄板の第二混合境界値問題の解析, 平成五年度研究発表会講演集, 土木学会中部支部, pp.1-2, 1994.
 - 10) Hasebe, N., Okumura, M. and Nakamura, T. : Stress analysis of a debonding and a crack around a circular rigid inclusion, *Int. J. Frac.* 32, pp.169-183, 1987.
 - 11) Hasebe, N., Okumura, M. and Nakamura, T. : A debonding and a crack on a circular rigid inclusion subjected to rotation, *Int. J. Frac.* 33, pp.195-208, 1987.
 - 12) 長谷部宣男 : 十字形板の応力解析, 土木学会論文報告集, 第185号, pp.9-20, 1971.

(1994. 4. 26受付)

BRANCHING PROBLEM OF CRACK AND DEBONDING AT AN END OF STIFFENED BOUNDARY FOR THIN PLATE BENDING

Masahiro MIWA, Norio HASEBE, Masaki NAKASHIMA and Takuji NAKAMURA

The branching problem of cracking and debonding is analyzed for the thin-plate under out-of-plane loading. As a part of the boundary is constrained (clamped or simply supported), a crack initiates due to the stress concentration at the intersection between displacement constrained boundary and free one. The debonding also initiates along the constrained part. A rational mapping function and complex stress functions are used for the analysis. The stress intensity factor of the micro-crack and the stress intensity of debonding are obtained. The energy release rates in cracking and debonding occurrence are also obtained. The occurring and developing condition of cracking and debonding are investigated for some Poisson's ratio and loading ratio.