

節点帯板法による薄肉構造物の座屈解析

林 正¹・渡辺 力²

¹正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

²正会員 工修 函館工業高等専門学校講師 土木工学科 (〒042 函館市戸倉町14-1)

節点帯板法を用いて薄肉構造物の弾性座屈解析を行う。本解析法は、帯板要素に有限要素と同じ節点自由度を付与した要素を用いるので有限要素との結合も容易で、従来の帯板法の適用範囲を大幅に拡張できる。また、局部座屈は高次の座屈モードとなるために、従来の帯板法では多くの級数項を必要とするが、本解析法では長手方向に分割することにより少ない級数項で効率良く解析できる。種々の計算例により本解析法の精度を検証し、適用例としてダイヤフラムを有する補剛箱形断面柱の座屈解析を示す。

Key Words : *finite node-strip method, thin-walled structure, elastic buckling, local buckling*

1. まえがき

従来より補剛板や柱の座屈解析に有限帯板法(FSM)¹⁾が用いられている^{2)~9)}。これらの解析の多くは、初期応力に一様圧縮、一様曲げ、または残留応力を用いて、座屈モードを三角関数の第1波形で仮定しているが、初期応力に任意の荷重による二次元応力の全成分を用いた解析^{7)~9)}やフーリエ級数の代わりにスプライン関数などを用いた解析^{9)~10)}も行われている。

しかし、帯板要素は長手方向に分割できないために、中間支点のある場合や有限要素などの他の要素と結合する場合には解析が煩雑となり、その適用範囲は形状の単純な構造に限定されているようである。さらに、局部座屈の解析では、通常、座屈モードが高次のモードとなるために多くの級数項が必要となり、帯板法の長所が生かされない。

一方、複雑な薄肉構造物の局部座屈解析では有限要素法(FEM)が有効な解析手法であるものの、解析対象が大型になるにつれ多くの要素分割数が必要となり、計算時間も飛躍的に増大する。そのため、最近ではハイラーキ要素(p改良法)¹¹⁾やねじり率を考慮した高次要素¹²⁾などの変位関数を改良した要素を用いた座屈解析も行われている。

本研究では、節点帯板法(NSM)¹³⁾を弾性座屈解析に用いて、局部座屈を考慮した薄肉構造物の全体座屈解析法を提案する。節点帯板法では、帯板要素に

FEMと同じ節点自由度を付加した要素を用いるので、長手方向に任意に分割でき、有限要素との結合も容易となる。このため帯板法の適用範囲を大幅に拡張できるとともに、局部座屈の解析では長手方向に分割することで少ない級数項で高次の局部モードが精度良く得られる。また、通常の帯板法と同様に長大要素を用いることができるのでFEMに比べ全体解析に必要な自由度数も少なくなる。平板の解析¹⁴⁾や薄肉構造物の全体解析¹⁵⁾の線形解析において、その実用性が検証されている。

弾性座屈解析に用いる節点帯板要素の変位関数には、文献(14),(15)と同じ関数を用い、薄肉構造物の計算効率を高めるために縦補剛材をオフセット・ビームで、横補剛材およびダイヤフラムを有限要素でモデル化する。

また、大次元の固有値問題を効率良く計算するために、節点帯板要素を組立てたブロック要素の段階で節線自由度を動的縮小法¹⁶⁾を用いて縮約する。この縮小されたブロック要素を用いて全体剛性行列を作成する。

これらの要素の精度を確かめるために数値計算を行って、座屈モードが高次となる場合でも良い値が得られることを示すと同時に、全体解析法の効率と精度について検証する。本解析法は、長大薄肉構造物の弾性座屈解析のために開発したものであるが、ダイヤフラムを有する補剛箱形断面柱の座屈解析に適用した結果について報告する。

2. 節点帯板法による座屈解析

(1) 変位関数

平板の座屈解析に用いる節点帯板要素には、図-1に示す10個の節点と5本の節線を有するMindlin要素を用いる^{14),15)}。

並進変位の3成分 u, v, w と x, y 軸まわりの回転角 θ_x, θ_y に対する節点 n の一般化変位 d_n と、節線 i の第 m 項に関する一般化変位 d_{im} を次式で与える。

$$d_n = \{ u_n \ v_n \ w_n \ \theta_{xn} \ \theta_{yn} \}^T \quad (1)$$

$$d_{im} = \{ u_{im} \ v_{im} \ w_{im} \ \theta_{xim} \ \theta_{yim} \}^T \quad (2)$$

($m = 1, 2, 3 \dots$)

ここに、 $()^T$ は転置記号である。

式(1),(2)を要素の全節点と全節線について集めたものを、それぞれ d_0, d_m として次式で表す。

$$d_0 = \{ d_1^T \ d_2^T \ \dots \ d_{10}^T \}^T \quad (3)$$

$$d_m = \{ d_{1m}^T \ d_{2m}^T \ \dots \ d_{5m}^T \}^T \quad (4)$$

節点帯板法の定式化により、要素の中央面上の任意点 (ξ, η) における変位成分を、節点変位と節線変位の和によって次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \{f_{01}\}^T d_0 + \{f_{11}\}^T \sum X_m d_m \\ v(\xi, \eta) &= \{f_{02}\}^T d_0 + \{f_{12}\}^T \sum X_m d_m \\ w(\xi, \eta) &= \{f_{03}\}^T d_0 + \{f_{13}\}^T \sum X_m d_m \\ \theta_x(\xi, \eta) &= \{f_{04}\}^T d_0 + \{f_{14}\}^T \sum X_m d_m \\ \theta_y(\xi, \eta) &= \{f_{05}\}^T d_0 + \{f_{15}\}^T \sum X_m d_m \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、形状関数ベクトル f_{0i}, f_{1i} と展開関数 X_m は文献14)や15)と同じ多項式である。

(2) 平衡方程式

Mindlinの仮定により、要素内の任意点の並進変位 u, v, w は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u(\xi, \eta) + z\theta_y(\xi, \eta) \\ v(x, y, z) &= v(\xi, \eta) - z\theta_x(\xi, \eta) \\ w(x, y, z) &= w(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

節点帯板要素内の任意点のひずみは、式(6)の変位を用いて次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)のひずみ成分を次のように表す。

$$\epsilon = \epsilon_L + \epsilon_N \quad (8)$$

ここに、 ϵ_L は線形のひずみ成分であり、 ϵ_N は非線形ひずみ成分である。

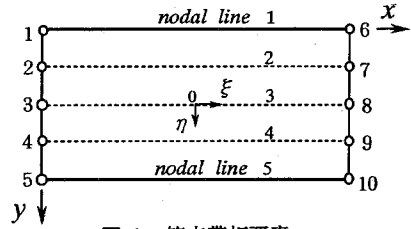


図-1 節点帯板要素

要素の応力 σ を、

$$\sigma = \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \}^T \quad (9)$$

とすると応力-ひずみ関係式は次のようになる。

$$\sigma = D \epsilon_L \quad (10)$$

ここに、 D は弾性マトリックスである。また、初期応力 σ_0 には次の3成分を考慮する。

$$\sigma_0 = \{ \sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \tau_{xy0} \ 0 \ 0 \}^T \quad (11)$$

節点の一般化変位に対応する一般化力を q_0 、節線の一般化変位に対応する一般化力を q_m とし、全ポテンシャルエネルギー π を停留の原理に用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \int_V \{ \epsilon_L^T D \delta \epsilon_L + \sigma_0^T \delta \epsilon_N \} dV - \delta d_0^T q_0 - \sum_m \delta d_m^T q_m \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)より次の節点帯板要素の平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [k_{00} + k_{G00}] d_0 + \sum_n [k_{0n} + k_{G0n}] d_n &= q_0 \\ [k_{m0} + k_{Gm0}] d_0 + \sum_n [k_{mn} + k_{Gmn}] d_n &= q_m \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

($m = 1, 2, 3 \dots$)

ここに、 k_{00}, k_{0n} などは節点帯板要素の線形の剛性行列¹⁵⁾であり、 k_{G00}, k_{G0n} などは付録Aに示す幾何剛性行列である。

3. 薄肉構造物の座屈解析

薄肉構造物を解析するための補剛材要素の定式化と動的縮小法を用いた全体解析法について説明する。

(1) 補剛材要素の平衡方程式

図-2に示す様な節点帯板要素の節線に平行に取付けられた縦(水平)補剛材をオフセット・ビームとして定式化する¹⁵⁾。また、節線に直交するように取付けられた横(垂直)補剛材は有限要素によりモデル化を行い、このときの定式化は通常のFEM解析と同様であるからここでは省略する。

補剛材は節点帯板要素の中央面上に取付けられているものとし、断面内のせん断中心 S を原点とする部材座標系 (x^*, y^*, z^*) を図-3のように定める。

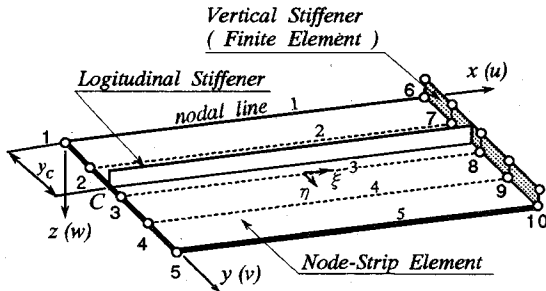


図-2 補剛材要素

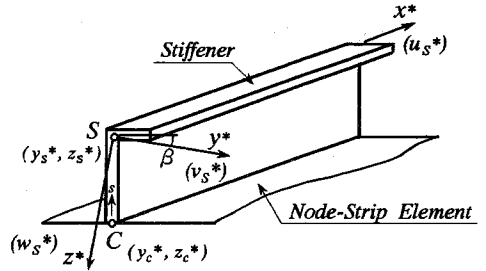


図-3 補剛材要素の座標系

軸ひずみは、せん断断中心線上の変位 u_s^* , v_s^* , w_s^* を用いて次式で与えられる。

$$\epsilon_x^* = (u_s^*)' + \frac{1}{2}\{(v_s^*)'^2 + (w_s^*)'^2\} = \epsilon_{xl}^* + \epsilon_{xn}^* \quad (14)$$

プライムは x^* に関する微分を表す。ここで、断面のそりは無視している。

せん断ひずみには薄肉開断面の線形の式¹⁵⁾を用いて要素内の応力を次式で与える。

$$\sigma_x^* = E \epsilon_{xl}^* \quad , \quad \tau_{xs}^* = G \gamma_{xs}^* \quad (15)$$

E はヤング係数, G はせん断弾性係数である。

初期応力 σ_{x0}^* と式(15)を用いて補剛材要素のひずみエネルギーは次のようになる。

$$\pi s^* = \int_{V^*} \{(\sigma_x^* \epsilon_{xl}^* + \tau_{xs}^* \gamma_{xs}^*) + \sigma_{x0}^* \epsilon_{xn}^*\} dV^* \quad (16)$$

式(16)をポテンシャルエネルギー停留の原理に用いると次の補剛材要素の平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [k_{00}^s + k_{G00}^s] d_0 + \sum_n [k_{0n}^s + k_{G0n}^s] d_n &= 0 \\ [k_{m0}^s + k_{Gm0}^s] d_0 + \sum_n [k_{mn}^s + k_{Gmn}^s] d_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

($m = 1, 2, 3, \dots$)

ここに、式(17)の k_{00}^s, k_{0n}^s などは補剛材要素の剛性行列であり¹⁵⁾, k_{G00}^s, k_{G0n}^s などは付録Bに示す補剛材要素の幾何剛性行列である。

(2) 数値計算法

薄肉構造物を構成する基本要素には、節点帯板要素、補剛材要素の他に、有限要素を用いる。これらの要素を用いて任意の荷重に対して線形解析を行い初期応力の計算を行ったあとの、座屈解析の手順を示す。

まず、式(13)と式(17)の節点帯板要素と補剛材要素の平衡方程式を用いて、ブロック要素¹⁹⁾の平衡方程式を組立てる。このとき補剛材要素は節点帯板要素に直接取り付けられ、節点帯板要素は節点と節線で相互に結合される。この段階で節線自由度をGuyanの静的縮小法を用いて消去するか、動的縮小法を用いて n_c 自由度に縮小する。この節線自由度を消去あ

るいは縮小したブロック要素をいくつか用いて全体剛性行列を作成する。ブロック要素での節線自由度の縮小では次のような手法^{6), 17)}を用いる。

式(13),(17)を座標変換したものをブロック要素内のすべての節点帯板要素について集めると、つぎの固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{0n} \\ K_{0n}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_n \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} K_{G00} & K_{G0n} \\ K_{G0n}^T & K_{Gnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (18)$$

ここに、 D_0, D_n は節点と節線自由度の変位ベクトルであり、 λ は荷重倍率である。

ここで、 K_{mn} は対称行列であることを考慮して、変形コレスキー法で下三角行列 L と対角行列 W に分解する。

$$K_{mn} = L W L^T \quad (19)$$

式(19)を用いて、線形の平衡条件式より次式が得られる。

$$D_n = K_B D_0 \quad (20)$$

ここに、

$$K_B = -L^{-1T} W^{-1} H \quad , \quad H = L^{-1} K_{0n}^T \quad (21)$$

式(18)の節点自由度(境界自由度)を $D_0 = 0$ としたときの固有値問題

$$[K_{nn} + \lambda K_{Gnn}] D_n = 0 \quad (22)$$

の固有ベクトルを低次のものから n_c 本集めた行列を Φ とすると、式(20)を用いて節線自由度を次のように表す。

$$D_n = K_B D_0 + \Phi D_C \quad (23)$$

D_C は縮小された節線自由度であり、式(18)の固有方程式は次のように縮小される。

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_C \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G3} \\ K_{G3}^T & K_{G2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_C \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= K_{00} - H^T W^{-1} H \\ K_2 &= \Phi^T K_{nn} \Phi \\ K_{G1} &= K_{G00} + K_B^T K_{G0n}^T + K_{G0n} K_B + K_B^T K_{Gnn} K_B \\ K_{G2} &= \Phi^T K_{Gnn} \Phi \\ K_{G3} &= K_{G0n} \Phi + K_B^T K_{Gnn} \Phi \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

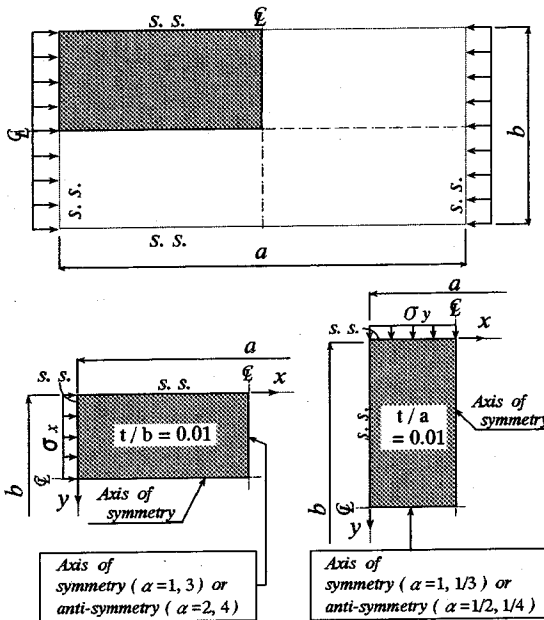


図-4 純圧縮を受ける単純支持板

表-1 純圧縮(σ_x)を受ける単純支持板の座屈係数

α		1	2	3	4
Terms	1	4.007	4.200	5.550	6.249
	2	3.998	4.002	4.065	4.456
	3	3.997	3.998	4.003	4.018
	4	3.997	3.997	3.998	4.003
	5	—	3.997	3.997	3.998
Analytical		4.000			

表-2 純圧縮(σ_y)を受ける単純支持板の座屈係数

α		1	1/2	1/3	1/4
Terms	1	4.038	4.038	4.044	4.057
	2	3.998	3.998	4.004	4.018
	3	3.997	3.997	4.003	4.018
	4	3.997	3.997	4.003	—
Analytical		4.000			

式(21)の計算は三角方程式の解法により一度に計算できる。また、式(24)で $D_c=0$ とするとGuyanの静的縮小となる。式(24)を構造全体に組み上げ、最後にダイヤグラムの有限要素を組み込んで次に示す構造全体の固有方程式が得られる。

$$|K + \lambda K_G| = 0 \quad (26)$$

式(22),(26)の固有値問題の数値計算にはサブスペース法を用いる。縮小された節線自由度に対応するモード(内部モード)は式(24)の固有ベクトル D_0 、

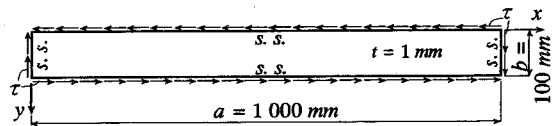


図-5 純せん断を受ける単純支持板

表-3 純せん断を受ける単純支持板の座屈係数

Method		(4 div.)	(6 div.)	(8 div.)
NSM (2 strips ×)	1 term	7.210	5.956	5.630
	2 terms	5.783	5.484	5.409
	3 terms	5.462	5.396	5.387
	4 terms	5.400	5.386	5.386
	5 terms	5.388	5.386	5.386
SFSM ¹⁰⁾ (10 strips)	10 div.	5.65		
	20 div.	5.39		
	30 div.	5.38		
FEM ¹²⁾ (5 div. ×)	10 div.	5.434		
	20 div.	5.387		
	30 div.	5.381		
Analytical		5.38		

D_c を式(23)に代入して求められる。

また、 Φ の計算精度が解析結果に影響するために、サブスペース法により式(22)の計算を行うに際しては、求める固有値の数に十分な配慮が必要である。なお、幾何剛性行列の計算には、Gaussの数値積分を用いる。

4. 数値計算例による精度の検証

数値計算例により本解析法の精度と適用性を調べる。本計算例では剛性行列の計算において、修正せん断係数を5/6として、次数低減積分の手法(B00-S11)を用いる¹⁴⁾。また、平板と補剛板の解析では節線自由度の縮小は行っていない。

(1) 純圧縮を受ける単純支持板

図-4に示す x 軸方向および y 軸方向純圧縮応力が作用する4辺単純支持板を解析する。座屈モードの対称性・逆対称性を考慮して板の1/4領域を1要素用いて計算を行う。また、板の形状比($\alpha=a/b$)は σ_x を受ける平板では1, 2, 3, 4, σ_y を受ける平板では1, 1/2, 1/3, 1/4とした。次の式(27)で与えられる座屈係数 k を解析解¹⁸⁾と比較する。

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (27)$$

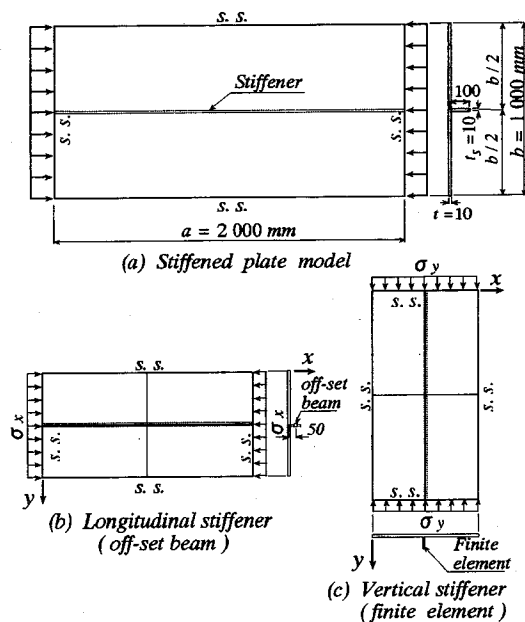


図-6 補剛板

表-4 補剛板の座屈係数

stiffener	Strip	Beam	FEM	
Terms	1	20.89	20.31	19.13
	2	18.61	18.75	17.74
	3	17.31	17.52	17.48
	4	17.29	17.48	17.48
	5	17.29	17.47	—
FEM	17.32			

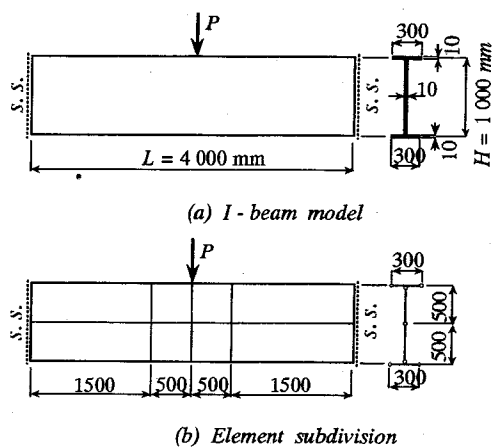


図-7 I形断面桁

表-5 I形断面桁の座屈荷重

n_c	Relative error (%)			D.O.F.	
	1st	2nd	3rd		
0	2.32	6.18	21.88	510	
1	1.11	5.73	13.28	514	
3	0.99	3.49	2.39	522	
5	0.85	2.65	2.06	530	
10	0.65	1.83	1.11	550	
20	0.24	0.94	0.60	590	
30	0.08	0.28	0.07	630	
P_{cr} (tf)	NSM*	53.60	109.9	153.3	2142
	FEM	53.79	110.0	153.7	—

* Non-condensation ($n_c = 306$ or 510)

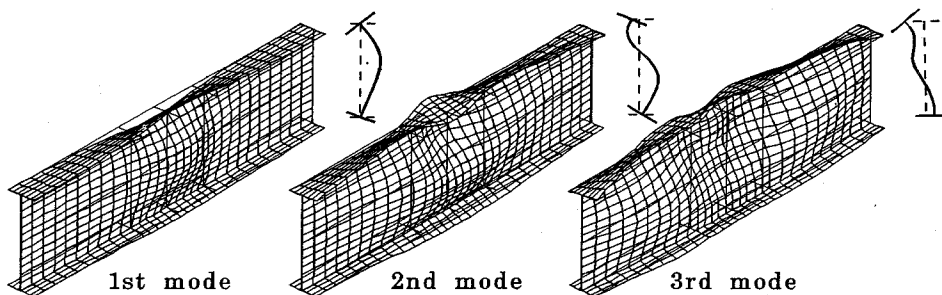


図-8 I形断面桁の座屈モード

σ_x が作用する場合の座屈係数を表-1に示す。形状比が1~4の板に対して級数に3~5項用いれば収束しており、その収束値は解析解に比べて約0.08%程度の誤差となっている。表-2は σ_y が作用する場合の座屈係数を示したものであるが、形状比が1~1/4の板に対して級数に2項用いるとほぼ収束している。

以上より形状比が1/4~4の板に対して、級数には

3~5項用いれば十分であるといえる。

(2) 純せん断を受ける単純支持板

図-5に示す形状比(a/b)が10の4辺単純支持板に純せん断応力が作用する場合を解析する。また、表-3には比較のためにSpline FSM¹⁰⁾とねじり率を考慮した有限要素¹¹⁾による結果も示してある。

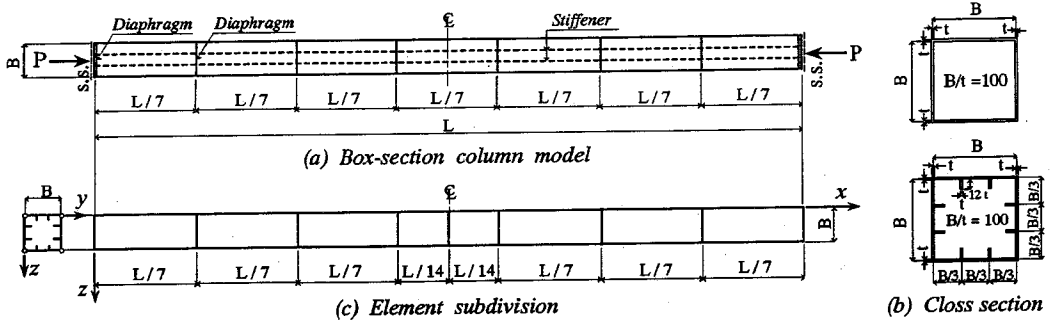


図-9 補剛箱形断面柱

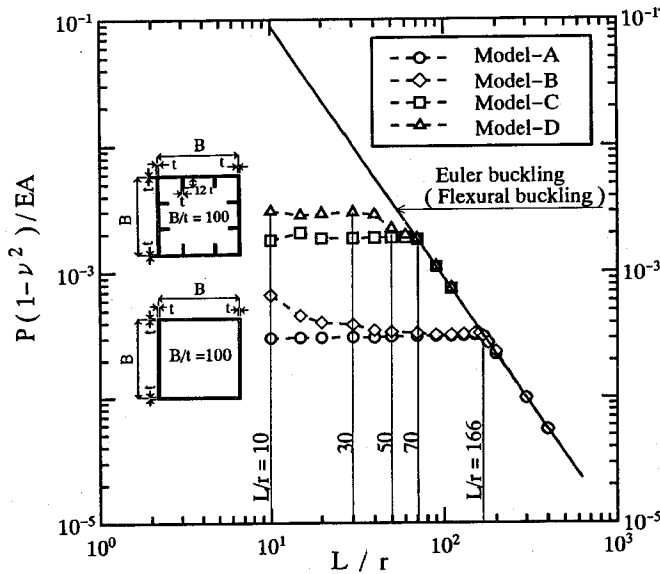


図-10 補剛箱形断面柱の座屈強度曲線

NSMではSpline FSMと同様に変位関数に純せん断モードを含まないためかなりの要素分割が必要となる。幅方向に2分割、長手方向に4~8分割としたときの座屈係数を表-3に示す。長手方向に4分割したときは6項で、6分割では4項、8分割ではほぼ3項で収束しており、長手方向に分割を増やすことで少ない級数項で収束している。なお、収束に要する総自由度数はSpline FSMやねじり率を考慮したFEMとはほぼ同程度となっている。

(3) 補剛板

図-6に示す4辺単純支持された補剛板に圧縮応力が作用する場合について、全体を2×2に分割して解析する。ヤング係数およびポアソン比は平板、補剛材ともに $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、0.3とした。縦補剛材を節点帯板要素(Strip)、図-6(b)の縦補剛材を棒要素(Beam)、図-6(c)の横補剛材を有限要素(FEM)として

取り扱った3つのモデルについて解析した結果を細分割したFEM解¹⁹⁾(40×80分割、補剛材は8×80分割)と比較する。なお、補剛材を節点帯板要素でモデル化するStripでは補剛材を6節点要素^{14),15)}を用いて1×2に分割し、補剛材を有限要素でモデル化するFEMでは8節点アイソパラメトリック要素を1×4に分割する。

座屈係数 k の計算結果を表-4に示す。補剛材をNSMでモデル化した場合は級数に4項用いると収束しており、その値は細分割したFEM解と0.2%の誤差である。棒要素でモデル化したときは約4項で、FEMでモデル化したときは約3項で収束しており、そのときの誤差は1%程度である。

(4) I形断面桁

図-7に示す支間4mの単純支持されたI形断面桁の支間中央に集中荷重Pが作用する場合を節線自由度

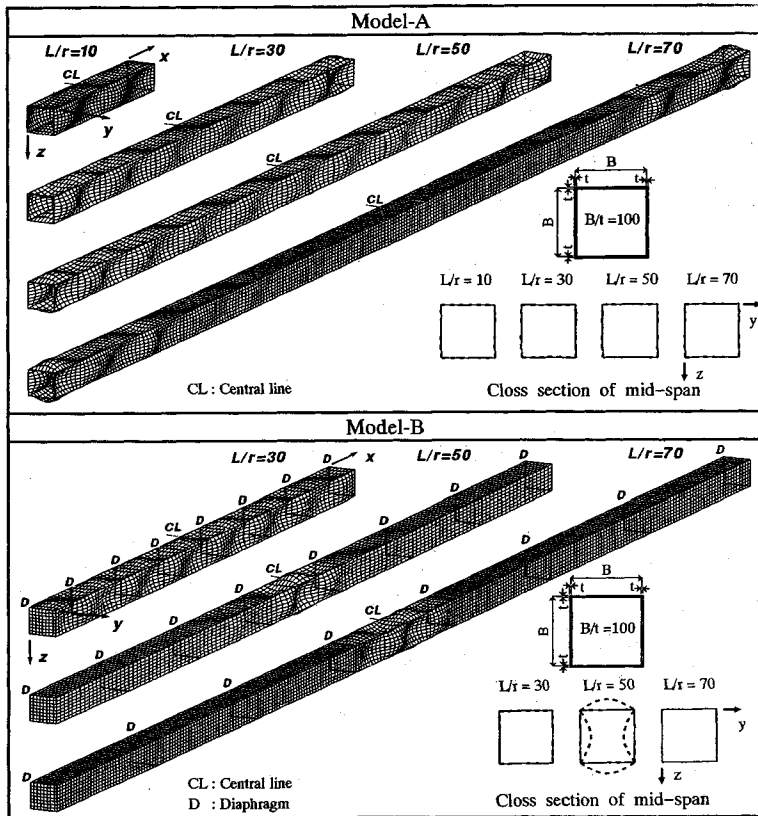


図-11 補剛箱形断面柱の座屈モード (Model-A , Model-B)

の縮小を行った全体解析法を用いて計算する。板厚はすべて10mmとし、材料定数は補剛板の解析例と同じとする。比較解には細分割したFEM解¹⁹⁾(上・下フランジ各10分割, ウェブ25分割, 長手方向に80分割)を用いる。

NSMの要素分割は図-7(b)に示す通りで、断面内に上・下フランジは分割せずに1要素で、ウェブは2分割してフランジの中間節線に直接結合させる。長手方向には不等間隔に4分割し、級数には中央部の2ブロックに5項、端のブロックには3項用いて全体解析を行った。また、各ブロックの節線自由度(306および510自由度)を0~30自由度($n_c=0\sim30$)に縮小する。

表-5は節線自由度を縮小せずに計算した座屈荷重(P_{cr})に対する縮小を行って計算した座屈荷重の相対誤差、及び固有値解析に用いた総自由度(DOF)を示したものである。 P_{cr} の値は細分割したFEM解と良く一致している。また、Guyanの静的縮小法($n_c=0$)を用いたときは、第1固有値で約2%、第3固有値では約22%の誤差を生じているが、各ブロックで $n_c=1$ とすると第1,3固有値の誤差は約半分に、 $n_c=10$ で

は第1~3固有値の誤差は約1%程度となっており、そのときの解析に用いた自由度数は約1/4に縮小されている。計算効率を考えると n_c には5~20程度用いれば十分であると考えられる。なお、図-8には $n_c=20$ としたときの構造全体と支間中央の断面の座屈モードを示した。

5. 補剛箱形断面柱の座屈解析

(1) 解析モデル

解析モデルは、図-9(a),(b)に示す幅厚比(B/t)が100の2軸対称正方形箱形断面の柱で、そのウェブとフランジには等間隔に2本の水平補剛材を、全体を長手方向に7等分した位置に板厚 t のダイヤフラムを有する。また、初期不整や残留応力の影響を考慮しない理想的な中心圧縮柱とし、その材料定数はヤング係数を $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比は0.3とした。

要素分割は図-9(c)に示す通りで、断面内にはフランジ、ウェブともに分割せずに4要素で、長手方向

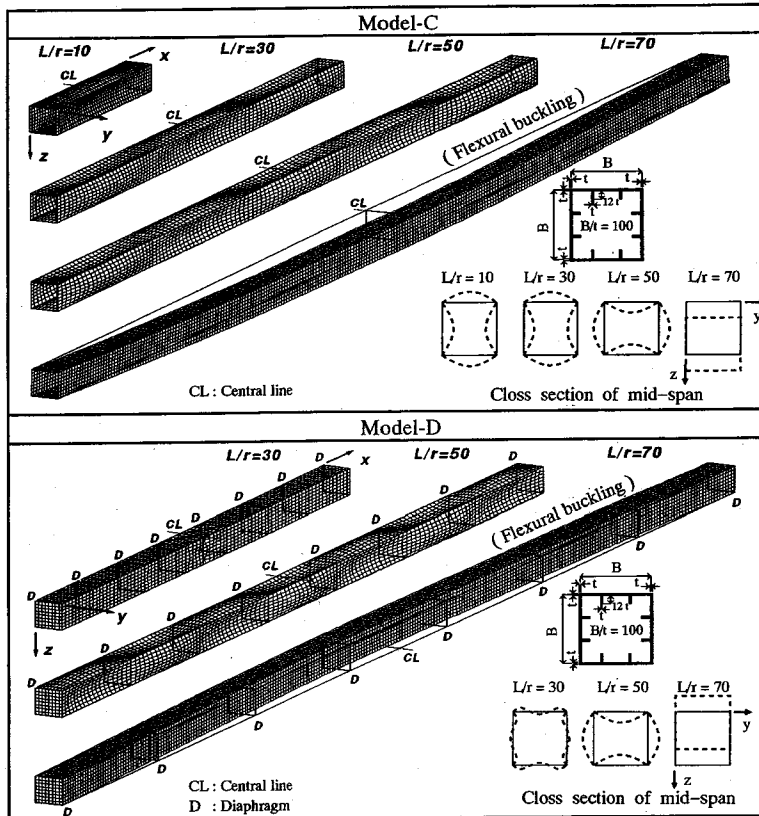


図-12 補剛箱形断面柱の座屈モード (Model-C, Model-D)

にはダイヤフラムの取り付け位置と支間中央で分割を行い、級数は各ブロックに3項を用いる。補剛材には補剛材要素を、ダイヤフラムは 2×2 に分割した有限要素(8節点アイソパラメトリック要素)を用いる。固有値計算ではダイヤフラムの内部自由度をすべて静的縮小法により消去し、帯板要素の節線自由度は動的縮小法により各ブロックで10自由度($n_c = 10$)に縮小する。

解析モデルとして、補剛材およびダイヤフラムを省いたモデルをModel-Aとし、Model-Aにダイヤフラムのみ取り付け付けたモデルをModel-B、補剛材のみ取り付け付けたモデルをModel-C、ダイヤフラムと補剛材を取り付けたモデルをModel-Dとする。

なお、荷重は分布荷重としてウェブプレートとフランジプレートに作用させ、Model-AとModel-Bでは級数を各ブロックに5項用いて解析を行う。

(2) 無補剛柱の座屈強度

図-10の○印は無補剛柱(Model-A)に対して、無次元化した座屈強度と細長比(L/r)の関係を両対数グラフに示したものである。Model-Aと同じ断面をも

つ無補剛柱について、解析的な手法²⁰⁾やねじり率を考慮した有限要素¹²⁾によっても解析が行われている。NSMによる計算結果はこれらと良く一致しており、特に解析的な手法による結果では L/r が約164($L/B = 67$)より大きくなると曲げ座屈(全体座屈)が生じているが、本解析では L/r が約166で全体座屈が生じておりほぼ同様の結果が得られている。なお、ねじり率を考慮した有限要素による解析¹²⁾では対称条件を用いて1/2領域で解析を行っているが、逆対称モードの最小固有値も存在するために全体解析を行うか、逆対称の境界条件を用いたモデルに対して解析を行う必要がある。

(3) 補剛柱の座屈特性

図-10に各モデルの座屈強度-細長比曲線、図-11にModel-A、Model-Bの座屈モード、図-12にModel-C、Model-Dの座屈モードを示す。

無補剛柱(Model-A)では、 L/r が小さなきには、構造全体で座屈変形が生じているが、 L/r が大きくなるに従って端部に集中してくる。それらにダイヤフラムを取り付けると(Model-B)、その座屈変形は

中央ブロックに集中する。座屈強度はダイヤフラム間が短いときには無補剛柱よりも大きくなるが、ダイヤフラム間が長くなるに従い無補剛柱にほぼ一致してくる。

また、水平補剛材を取り付けることで座屈強度は大幅に増大する(図-10のModel-C, Model-D)。ダイヤフラムのないModel-Cでは、補剛材の剛性が小さいために柱の全体で座屈変形が生じている。それにダイヤフラムを取り付けることで(Model-D)、ダイヤフラム間が短いときは中央ブロックのみが座屈(補剛材の局部座屈)しているが、ダイヤフラム間が長くなるにつれダイヤフラムを節とした座屈モードに移行し、全体座屈が生じる。その座屈強度もModel-Cにはほぼ一致していく。

6. 結 論

節点帯板法による弾性座屈解析法を種々の数値計算例により検証した結果からつぎのようなことがいえる。

- (1) 節点帯板法による薄肉構造物の全体座屈解析において精度の良い座屈荷重と局部座屈モードを求めることができる。
- (2) 本解析法は、有限要素との結合も容易で、従来の帯板法の適用性を大幅に拡張できる。また、局部座屈の解析では長手方向に分割できるので従来の帯板法よりも計算効率が良い。
- (3) 箱形断面柱の解析では、任意の細長比に対して精度の良い座屈強度と局部座屈モードを求めることができ、補剛材やダイヤフラムの取り扱いも容易である。

付録A 節点帯板要素の幾何剛性行列

式(11)の非零の初期応力成分を次のように表す。

$$\sigma_0 = \{\sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \tau_{xy0}\}^T = \{\sigma_{01} \ \sigma_{02} \ \sigma_{03}\}^T \quad (\text{A.1})$$

式(A.1)を用いて節点帯板要素の幾何剛性行列は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_{G00} &= \sum_{i=1}^3 \iint \left\{ t\sigma_{0i} A_{00i} + \frac{t^3}{12} \sigma_{0i} B_{00i} \right\} dx dy \\ k_{G0n} &= \sum_{i=1}^3 \iint \left\{ t\sigma_{0i} A_{0ni} + \frac{t^3}{12} \sigma_{0i} B_{0ni} \right\} dx dy \\ k_{Gm0} &= k_{G0m}^T \\ k_{Gmn} &= \sum_{i=1}^3 \iint \left\{ t\sigma_{0i} A_{mni} + \frac{t^3}{12} \sigma_{0i} B_{mni} \right\} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

ここに、 t は板厚である。

$$\left. \begin{aligned} A_{001} &= f'_{02} f'_{02}{}^T + f'_{03} f'_{03}{}^T, & B_{001} &= f'_{04} f'_{04}{}^T \\ A_{002} &= g_{01} g_{01}{}^T + g_{03} g_{03}{}^T, & B_{002} &= g_{05} g_{05}{}^T \\ A_{003} &= f'_{03} g_{03}{}^T + g_{03} f'_{03}{}^T, & B_{003} &= \mathbf{0} \\ A_{0n1} &= X'_n (f'_{02} f'_{12}{}^T + f'_{03} f'_{13}{}^T), & B_{0n1} &= X'_n f'_{04} f'_{14}{}^T \\ A_{0n2} &= X_n (g_{01} g_{11}{}^T + g_{03} g_{13}{}^T), & B_{0n2} &= X_n g_{05} g_{15}{}^T \\ A_{0n3} &= X_n f'_{03} g_{13}{}^T + X'_n g_{03} f'_{13}{}^T, & B_{0n3} &= \mathbf{0} \\ A_{mn1} &= X'_m X'_n (f'_{12} f'_{12}{}^T + f'_{13} f'_{13}{}^T), & B_{mn1} &= X'_m X'_n f'_{14} f'_{14}{}^T \\ A_{mn2} &= X_m X_n (g_{11} g_{11}{}^T + g_{13} g_{13}{}^T), & B_{mn2} &= X_m X_n g_{15} g_{15}{}^T \\ A_{mn3} &= X'_m X_n f'_{13} g_{13}{}^T + X_m X'_n g_{13} f'_{13}{}^T, & B_{mn3} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

プライムは x に関する微分を表す。 g_{0i}, g_{1i} など は次式で与えられるベクトルである。

$$g_{0i} = \frac{df_{0i}}{dy}, \quad g_{1i} = \frac{df_{1i}}{dy} \quad (\text{A.4})$$

付録B 補剛材要素の幾何剛性行列

縦補剛材は $y=y_c$ 線に取り付けられているとすると、補剛材要素の幾何剛性行列は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_{G00}^S &= \int_V \sigma_{x0} * C_{00} dV, & k_{G0n}^S &= \int_V \sigma_{x0} * C_{0n} dV \\ k_{Gm0}^S &= k_{G0m}^S{}^T, & k_{Gmn}^S &= \int_V \sigma_{x0} * C_{mn} dV \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_{00} &= f'_{02,c} f'_{02,c}{}^T + f'_{05,c} f'_{05,c}{}^T \\ &\quad + z_c (f'_{02,c} f'_{04,c}{}^T + f'_{04,c} f'_{02,c}{}^T) \\ &\quad + y_c (f'_{05,c} f'_{04,c}{}^T + f'_{04,c} f'_{05,c}{}^T) + r^2 f'_{04,c} f'_{04,c}{}^T \\ C_{0n} &= X'_{m,c} f'_{02,c} f'_{12}{}^T + X_{m,c} f'_{05,c} f'_{15}{}^T \\ &\quad + z_c X'_{m,c} (f'_{02,c} f'_{14}{}^T + f'_{04,c} f'_{12}{}^T) \\ &\quad + y_c (X'_{m,c} f'_{05,c} f'_{14}{}^T + X_{m,c} f'_{04,c} f'_{15}{}^T) \\ &\quad + r^2 X'_{m,c} f'_{04,c} f'_{14}{}^T \\ C_{mn} &= (X'_{m,c})^2 f'_{12} f'_{12}{}^T + (X_{m,c})^2 f'_{15} f'_{15}{}^T \\ &\quad + z_c (X'_{m,c})^2 (f'_{12} f'_{14}{}^T + f'_{14} f'_{12}{}^T) \\ &\quad + y_c X_{m,c} X'_{m,c} (f'_{15} f'_{14}{}^T + f'_{14} f'_{15}{}^T) \\ &\quad + r^2 (X'_{m,c})^2 f'_{14} f'_{14}{}^T \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

上式中の $f_{0i,c}, X_{m,c}$ などは、 f_{0i}, X_m に $y=y_c$ を代入したものであり、プライムは x に関する微分を表す。なお、式(B.2)には次の記号を用いた。

$$r^2 = (y_c^*)^2 + (z_c^*)^2 \quad (\text{B.3})$$

参考文献

- 1) Cheung, Y.K. : *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976.
- 2) 吉田宏一郎 : 帯板要素による平板構造の座屈解析, 日本造船学会論文集, No.130, pp.161-171, 1972.
- 3) 宇佐美勉 : 補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度, 土木学会論文集, No.228, pp.13-28, 1974.
- 4) 長谷川彰夫, 太田孝二, 西野文雄 : 補剛された板要素の座屈強度に関する二, 三の考察, 土木学会論文集, No.232, pp.1-15, 1974.
- 5) 吉田博 : H形鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度, 土木学会論文集, No.243, pp.19-32, 1975.
- 6) Graves Smith, T.R. and Sridharan, S. : A finite strip method for the buckling of plate structures under arbitrary loading, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.20, pp.685-693, 1978.
- 7) 能町純雄, 角田与史雄, 高橋義裕 : 等分布上縁載荷による単純支持I形断面部材の弾性安定, 土木学会論文集, No.323, pp.1-14, 1982.
- 8) Mahendran, M. and Murray, N.W. : Elastic buckling analysis of ideal thin-walled structures under combined loading using a finite strip method, *Thin-walled structures*, Vol.4, pp.329-362, 1986.
- 9) Dawe, D.J. and Peshkam, V. : Buckling and vibration of long plate structures by complex finite strip methods, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.32, pp.743-766, 1990.
- 10) van ERP, G.M. and Menken, C.M. : The spline finite strip method in the buckling analysis of thin-walled structures, *Communications in applied numerical methods*, Vol.6, pp.477-484, 1990.
- 11) Basu, P.K. and Akhtar, C.M. : Interactive and local buckling of thin-walled members, *Thin-walled structures*, Vol.12, pp.335-352, 1991.
- 12) Chin, C.-K., Al-Bermani, F.G.A. and Kitipornchai, S. : Finite element method for buckling analysis of plate structures, *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol.119, pp.1049-1068, 1993.
- 13) 笹戸松二, 林 正, 中嶋学夫, 中島一朗 : 節点帯板法による薄肉構造物の解析, JSCE第9回構造工学における数値計算法シンポジウム論文集, 1985.
- 14) 林 正, 坂口隆紀 : Mindlin節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析, 土木学会論文集, No.459/I-22, 1993.
- 15) 林 正, 渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の立体解析, 構造工学論文集, Vol.41A, 1995.
- 16) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, pp.96-100, 1981.
- 17) Huang, J. and Wang, T.-L. : Buckling analysis of large and complex structures by using substructuring techniques, *Computers & Structures*, Vol.46, pp.845-850, 1993.
- 18) Column Research Committee of Japan : *Handbook of structural stability*, Corona publishing company, Part III PLATES, 1971.
- 19) 汎用非線形構造解析システム FINAS version 12.0 使用説明書 : 動力炉・核燃料開発事業団, 1993.
- 20) Avent, R.R. and Robinson, J.H. : Elastic stability of polygon folded plate columns, *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol.102, pp.1015-1029, 1976.

(1995. 4. 3 受付)

BUCKLING ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES BY FINITE NODE-STRIP METHOD

Masa HAYASHI and Chikara WATANABE

Finite node-strip method is presented for the elastic buckling of thin-walled structures. A node-strip element has nodal points as well as nodal lines of an ordinary finite strip element, so that it is easily to connect the element with finite elements. Furthermore, it is possible to analyze using a few terms of series for local buckling analysis by dividing a plate into the node-strip elements in the longitudinal direction. The accuracy and efficiency of the present method are demonstrated by several examples and the interactive buckling analysis of a stiffened box column with diaphragms is shown.