

# 都市排水の循環利用による水供給安定化 に関する研究

渡辺晴彦<sup>1</sup>・張 昇平<sup>2</sup>・岡田憲夫<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 正会員 工修 (株) 日水コン 環境事業部 (〒163-11 新宿区西新宿 6-22-1 新宿スクエアタワー)

<sup>2</sup> 正会員 工博 名城大学助教授 都市情報学部 (〒509-02 可児市虹ヶ丘 4-3-3)

<sup>3</sup> 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所 (〒611 宇治市五ヶ庄)

渇水対策の一つとして下水高度処理水などの都市排水の循環利用が期待されている。都市排水の循環利用は都市の水利用システムの中に再利用する水量をストックすることにより、水供給システムの安定性は向上すると推察される。本研究では、都市排水の循環利用による水供給システムの安定性の変化を定量的に評価するためのモデルを提案し、その有効性を検証するとともに、本モデルを用いて水供給システムの安定性に影響を及ぼす要因や水の安定供給にとっての望ましい循環利用レベルについて分析を行った。

**Key Words :** water supply system, stability analysis, wastewater reuse, recycling rate

## 1. はじめに

渇水をもたらす社会経済的な影響の増大化が懸念されるなか、都市用水の安定供給が一層求められている。水供給システムをより安定化させる対策の一つとして、下水処理水などの都市排水の循環利用を位置づけることができる。国土庁水資源白書では、都市排水の循環利用は「都市域における節水対策」および「給水制限による制約のある程度の緩和」の効果があるとしている<sup>1)</sup>。都市排水の循環利用は、都市の水利用システムの中に利用可能な水をストックすることになるため、結果として同システムにおける水供給の安定性を向上させると推察される。しかし、循環利用の原水は都市の水需要量に依存するため、その水量変動の影響を受けるだけでなく、循環利用システム自身もその集水・処理の過程において様々な不確実要因を内包しているため、水供給システムの安定性が循環利用量の増加に対し単純に向上することは考え難い。

本研究では、水供給システムを最も安定にする循環利用レベルの究明を目的とし、河川水と循環水による需給バランスが確保される確率として安定性を評価するモデルを提案する。以下、まず、本研究で対象とする都市水供給システムの定義を行い、河川水源による安定性と循環利用による安定性、および両者による都市全体としての安定性を定量的に評価するための確率モデルを提案する。そして、モデルによる安定性評価の有効性について解析的な検証を行う。さらに、最適な循環利用レベルについて考察し、それが都市の水資源河川の水資源開発レベル・流況特性、循環利用技術、循

環利用規模等との関係について分析を行う。

## 2. 水供給システム安定性評価モデルの定式化

### (1) 水供給システムの構成

本研究では、図-1に示すように、都市の総水需要量  $D_0$  を河川からの取水と都市排水の循環利用により確保する水供給システムを想定する。ここで、 $\gamma$  を総需要量に循環利用水量が占める比率（以下、「循環利用率」と呼ぶ）とし、河川取水に依存する需要量  $D$  と循環利用量  $E$  を、それぞれ、

$$D = (1 - \gamma)D_0 \quad (1)$$

$$E = \gamma D_0 \quad (2)$$

と定義する（なお、本研究で使用する数学モデルの記号を表-1にまとめる）。

この水供給システムは、河川に依存する需要量  $D$  と河川での取水可能量とのバランスを図る河川水源システムと、都市排水に依存する需要量  $E$  と循環利用可能量  $F$  とのバランスを図る循環利用システムの2つのサブシステムで構成される。循環利用システムは、全ての排水を原水とするオフサイト・サイクル型のシステムである。現状においては、循環利用に依存する需要は水洗トイレなどの低水質用途に限られているが、本研究では水質的な制約がないものと仮定し、河川水需要と代替可能であるものとする。このため、両サブシステムは需要量が循環利用率  $\gamma$  により変化し、独立ではなくなる。

表-1 本研究で用いる数学モデルの記号

属性	記号	内容
確率変数	$D_0$	仮想的な都市での総水需要量
	$D'_0$	仮想的な都市での総排水量 $\bar{D}'_0 = \bar{D}_0$
	$E$	循環利用量 ( $E = \gamma D_0$ )
	$D$	河川取水に依存する需要量 ( $D = (1 - \gamma)D_0$ )
	$Q$	取水地点の河川流量
	$q$	取水地点下流の確保流量
	$X$	取水地点における需給バランス ( $X = Q - D - q$ )
	$F$	技術的に可能な循環利用量 ( $F = \epsilon D'_0$ )
設計パラメータ (定数)	$\gamma$	循環利用率 (総需要量に対する循環利用量の割合)
	$\epsilon$	循環利用効率 (需要量 $D_0$ のうち技術的に循環できる割合)
定数	$\alpha$	下流確保流量平均値 $q$ の河川流量平均値 $Q$ に占める割合
	$a$	河川流量の変動係数
	$b$	水需要量 $D_0$ および排水量 $D'_0$ の変動係数
	$\beta(\gamma)$	循環利用率が $\gamma$ の場合の河川水利用率
	$\beta(0)$	循環利用をしない場合の河川水利用率 (非循環時河川水利用率)
確率分布関連	$f_X(x)$	確率変数 $X$ の確率密度関数
	$f_Y(y)$	確率変数 $Y$ の確率密度関数
	$h$	基準化した確率変数 $X'$ の積分下限
	$k$	基準化した確率変数 $Y'$ の積分下限
	$\rho$	確率変数 $X$ と $Y$ の相関係数

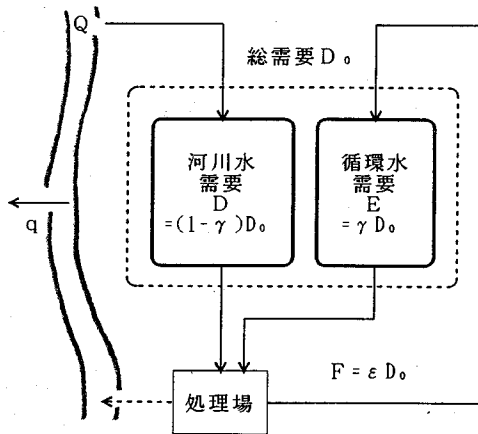


図-1 河川水と排水循環による水供給システム

河川水、需要量は日単位で水量が変動する確率変数とすると、循環可能量もそれらの水量変動の影響を受けた確率変数である。本研究では、2つのサブシステムにおいて供給が需要を満たす確率を安定性の評価指標とし、まず、それぞれのサブシステムの安定性評価モデルを作成し、その結果をもとに都市水供給システム全体の安定性評価モデルを構築することとする。

## (2) 河川水源サブシステムの安定性評価

河川水源サブシステムの安定性を評価するための指標として、ここでは、河川からの取水に依存する需要量分  $D$  が確保される確率を対象とする。取水地点の河川流量  $Q$ 、河川からの取水量  $D$ 、取水地点より下流の確保流量  $q$  (河川維持流量と対象都市以外の需要量を

含む) を確率変数とすると、

$$X = Q - D - q \quad (3)$$

とおけば、確率の定義により河川取水に依存する需要量  $D$  が確保される確率は次式で表される。

$$P(X = Q - D - q \geq 0) = \int_0^{\infty} f_X(x) dx \quad (4)$$

ここに、 $f_X(x)$  は確率変数  $X$  の確率密度関数である。

まず、確率変数  $Q$ 、 $D$  および  $q$  の確率特性および相互関係について考える。河川流量  $Q$  の確率特性は降雨や流域特性により決まる。これに対し、需要量  $D$  の確率特性は水使用者側の諸要因から決まる。当然水使用が降雨に影響されることもあるが、影響の大きさ(降雨による需要の変動量)は総需要量に比べて通常それほど大きくはない<sup>2)</sup>。また、取水地点上流の水源地と水需要発生地とは通常ある程度離れていることから、需要  $D$  に影響を及ぼす水使用地の降雨と流量  $Q$  を決める水源地の降雨とは異なる変動を持つとみなすことができる。これらのことから、流量  $Q$  と需要量  $D$  の関係を独立と仮定する。

取水地点より下流の確保流量  $q$  は河川維持流量と対象都市以外の需要を含んでおり、維持流量は河川(流水)の正常的な機能(環境保全、景観維持、野生動物植物の保護等)を維持するための流量であり、ある意味で人為的に決められているため、自然流量  $Q$  および対象都市需要量  $D$  から独立していると考えられる。対象都市以外の需要分については、降雨に影響されたり(特に農業用水の場合)、対象都市の需要と類似の変

動パターンを有したり(同じ都市用水の場合)することも考えられるが、対象都市の水需要量確保が水管理の主たる目標であれば(渇水時は特にそうである)、互いに独立であるとしても差し支えないと考えられる。

河川流量が減少したときに取水制限や用水の融通などを実施する場合には、 $X \geq 0$ を満たすように需要量  $D$  や維持流量  $q$  を制御することになり、河川流量  $Q$  に従属する形となる。このため、独立と仮定した場合よりも確率  $P(X \geq 0)$  は高まると推測される。ゆえに、独立性の仮定は、確率  $P(X \geq 0)$  を危険側に評価したものとなる。

次に、確率変数  $Q$ 、 $D$  および  $q$  の分布特性について考える。小泉ら<sup>3)</sup>、今田ら<sup>4)</sup>によれば、日単位で需要量  $D$  を見る場合、その確率特性は気温、天気等の不確定要因の複合結果として捉えることができ、正規分布で近似可能である。河川流量については、寶<sup>5)</sup>は琵琶湖流域を対象に系統的に検討した結果、季節によって適合性のよい確率分布が異なるが、正規分布モデルは年間を通してかなりよい適合性を有することを明らかにしている。ここでは、これらの結果を踏まえて確率変数  $Q$ 、 $D$  および  $q$  はすべて正規分布、つまり、

$$Q \sim N(\bar{Q}, \sigma_Q^2), \quad D \sim N(\bar{D}, \sigma_D^2), \quad q \sim N(\bar{q}, \sigma_q^2),$$

に従うものとする。

上記の設定のもとでは、河川流量  $Q$ 、需要量  $D$  および河川確保流量  $q$  の線形関数  $X$  も正規確率変数となり、その確率密度関数  $f_X(x)$  は次のように表される。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_X^2}\right\} \quad (5)$$

ただし、 $\bar{x} = \bar{Q} - \bar{D} - \bar{q}$ 、 $\sigma_X^2 = \sigma_Q^2 + \sigma_D^2 + \sigma_q^2$

上式を式(4)に代入し、さらに変数変換  $X' = \frac{X - \bar{x}}{\sigma_X}$  を行うと、河川からの取水に依存する需要分  $D$  の確保される確率は次式より求められる。

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= P\left(X' \geq -\frac{\bar{x}}{\sigma_X}\right) \\ &= \int_{-\frac{\bar{x}}{\sigma_X}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x'^2}{2}\right\} dx' \quad (6) \end{aligned}$$

本研究では、この確率  $P(X \geq 0)$  を河川水源サブシステムの安定性の尺度と定義する。確率  $p_X = P(X \geq 0)$  は次のように明確な意味付けが可能である。利水安全度を測るために様々な指標が提案されており、河川流量が総需要量  $(D+q)$  を上回る確率(超過確率)である  $p_X$  も河川の利水安全度を表す指標の一つである。しかし、利水計画や水道計画等においては利水安全度の指標として渇水確率年  $T$ (渇水の再現期間)が最もよく使われている。 $Q$  を日流量とした場合には、 $T$  の定義により、 $p_X$  と  $T$  の間には次の関係が成り立つ。

$$T = \frac{1}{n(1-p_X)} \quad (7)$$

ここに、 $(1-p_X)$  は日流量が日総需要量を下回る確率(非超過確率)、 $n$  は  $p_X$  の評価に用いられる対象日流量の年間生起度数である。例えば、年間最小日流量を用いた場合に  $n=1$ 、渇水流量(一年の内355日がこれを下回らない流量)を用いた場合に  $n=10$  である。

### (3) 循環利用サブシステムの安定性評価

循環利用サブシステムの安定性の評価指標としては、都市の総水需要量のうち都市排水の循環利用に依存する需要分  $E = \gamma D_0$  が確保される確率を対象とする。ここで、供給可能量は次のように捉えることとする。まず、循環利用の供給源となる都市総排水量  $D'_0$  を確率変数とする。水利用過程において消費される水量を無視すれば、平均値としては  $\bar{D}'_0 = \bar{D}_0$  が成り立つ。しかし、実際には水量の損失があり、また下水道普及状況により集水面での限界や水質面での供給可能性の限界があるため、全てを循環利用の供給源とすることはできない。このため、循環利用の効率を  $\epsilon$  として、技術的に供給可能な量を  $F \equiv \epsilon D'_0$  と定義する。これをもとに、排水の循環利用に依存する需要分  $E$  が確保される確率を、 $F$  により需要  $E$  が確保される確率として定義する。

$$Y = F - E \quad (8)$$

と置けば、確率の定義により、排水の循環利用に依存する需要分  $E = \gamma D_0$  が確保される確率は次のように表される。

$$P(Y = F - E \geq 0) = \int_0^{\infty} f_Y(y) dy \quad (9)$$

ここで、 $f_Y(y)$  は確率変数  $Y$  の確率密度関数である。

循環利用における供給量  $F$  と需要量  $E$  の変動特性上の関係については、次のように考えることができる。都市排水から再利用可能な水を作り出し、需要を満たすべく供給されるまでは、排水の収集、処理、配水等幾つかの過程を経なければならず、これらの過程においては様々な不確定な要因が介在し、しかも時間的なズレが生じ、その結果、確率変数  $F$  と  $E$  とは完全従属でもなければ、完全独立でもない関係になることが予想される。循環利用過程に介在するすべての不確定要因を無視し、両者が完全従属である場合(確率変数として  $D'_0 = D_0$  が成り立つ)について考えてみると、

$$Y = F - E = (\epsilon - \gamma) D_0 \quad (10)$$

となり、循環需要量が利用可能水量を上回らない限り(利用可能な排水以上の需要がなければ)、 $(\epsilon - \gamma) \geq 0$  および  $D_0 \geq 0$  であるため、

$$P(Y = F - E \geq 0) = 1 \quad (11)$$

となり、つまり需要分が完全に確保される。

しかしながら、実際には  $D'_0$  と  $D_0$  とは平均値は等しいが完全従属ではないので、都市排水の循環利用に依

存する需要が 100% 確保されることは有り得ない。従って、 $F$  と  $E$  との関係を完全従属とする評価は計画論的に危険側の評価になる。本研究では、安全側を評価する意味で、 $D_0$  と  $D_0$  が独立な場合、すなわち、 $F$  と  $E$  とが独立である場合について考える。ちなみに、循環利用の規模をより大きく、循環利用の水質をよりよくするほど都市排水から循環利用水として供給されるまでの集水および処理過程が複雑になり介在している偶発的な不確定要因が増加するため、 $F$  と  $E$  の関係は独立関係に近づくものと予想される。

$F$  の確率分布特性は需要量の分布特性と循環利用過程における不確定要因の分布特性で決まり、需要量は正規分布であるとみなせるため、循環利用過程に独立な不確定要因が多数存在するとすれば、中心極限定理により  $F$  は正規分布で近似できる。 $E$  は需要そのものであり、正規分布に従う。よって、 $Y$  も正規確率変数となり、確率密度関数  $f_Y(y)$  は次のように表される。

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \quad (12)$$

ここに、 $\bar{y} = \bar{F} - \bar{E}$ 、 $\sigma_Y^2 = \sigma_F^2 + \sigma_E^2$

上式を式(9)に代入し、さらに変数変換  $Y' = \frac{Y-\bar{y}}{\sigma_Y}$  を行うと、循環利用に依存する需要分の確保される確率は次式より求められる。

$$P(Y \geq 0) = P(Y' \geq -\frac{\bar{y}}{\sigma_Y}) \\ = \int_{-\frac{\bar{y}}{\sigma_Y}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y'^2}{2}\right\} dy' \quad (13)$$

本研究では、この確率  $P(Y \geq 0)$  を循環利用サブシステムの安定性の尺度と定義する。

#### (4) 水供給全体システムの安定性評価

前述したように、河川水源サブシステムと循環利用サブシステムの間需要量が代替可能であるとしているため、両サブシステムは独立ではない。よって、 $P(X \geq 0)$  と  $P(Y \geq 0)$  だけでシステム全体の安定性を評価することは不十分である。このため、本研究では、河川水源サブシステムおよび循環利用サブシステムを総合した全体システムの水供給安定性を評価するための指標として、水源河川からの取水量に依存する需要分  $D$  と循環利用水量に依存する需要分  $E$  が同時に確保される確率を用いる。確率の定義により、同時確率は次のように計算される。

$$P(X = Q - D - q \geq 0, Y = F - E \geq 0) \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (14)$$

結合(同時)分布の確率密度関数  $f_{XY}(x, y)$  はその定義に基づいて求めた結果、次の通りである。

$$f_{XY}(x, y)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right. \\ \left. \times \left\{\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_Y^2}\right\}\right] \quad (15)$$

ここに、 $\bar{x}$ 、 $\sigma_X^2$ 、 $\bar{y}$ 、 $\sigma_Y^2$  は前述の通りである。 $\rho$  は確率変数  $X$  と  $Y$  との相関係数であり、次式で表される。

$$\rho = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\sigma_D^2}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (16)$$

変数変換  $x' = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_X}$ 、 $y' = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}$  により、循環利用型水供給システムにおいて対象都市の総水需要が確保される確率は次式により求められる。

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) \\ = P(X' \geq -\frac{\bar{x}}{\sigma_X}, Y' \geq -\frac{\bar{y}}{\sigma_Y}) \\ = \int_{-\frac{\bar{x}}{\sigma_X}}^{\infty} \int_{-\frac{\bar{y}}{\sigma_Y}}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x'^2 - 2\rho x' y' + y'^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx' dy' \quad (17)$$

本研究では、この確率  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  を河川水源サブシステムおよび循環利用サブシステムを総合した全体システムの水供給安定性の尺度と定義する(以下、水供給システムの安定性と呼ぶ)。

### 3. モデルによる水供給システムの安定性分析

#### (1) モデル分析のための条件設定

式(17)に水源河川の流量、下流の確保流量、対象都市需要量の平均値・分散、循環利用効率および循環利用率を代入すれば、循環利用型水供給システム全体の安定性は対象都市総需要量が確保される確率として数値解析により求めることができる。ここでは、水供給システムの安定性とこれに影響を及ぼす要因との関連を解析的に考察するために、一般性を失わないように分析条件を次のように設定する。

- 河川流況は、濁水流量を想定する。
- 問題を簡単にするために、水源河川の確保流量  $q$  を確定変数として取り扱う。つまり、

$$\sigma_q^2 = 0$$

とする。これは、確保流量が対象都市取水量に優先して確保されることを意味する。

- 確保流量  $q$  の平均値を

$$\bar{q} = \alpha \bar{Q}$$

とする。ここに、 $\alpha$  は河川流量の平均値  $\bar{Q}$  に占める確保流量の比率である。

- 河川流量の変動係数を  $a$  とする。河川流量の標準偏差  $\sigma_Q$  は、

$$\sigma_Q = a \bar{Q}$$

と表される。

- 循環利用率  $\gamma$  のときの濁水流量ベースの「河川水利用率」を次のように定義する。

$$\beta(\gamma) = \frac{\bar{D} + \bar{q}}{\bar{Q}}$$

ここで、 $\bar{D}$  は河川水源で確保される需要  $D$  の平均値である。上式から、

$$\bar{D} = \beta(\gamma)\bar{Q} - \bar{q} = \beta(\gamma)\bar{Q} - \alpha\bar{Q} = [\beta(\gamma) - \alpha]\bar{Q}$$

と表される。

- また、循環利用を行わない時の河川水利用率（以下、「非循環時河川水利用率」と呼ぶ）を  $\beta(0)$  と記すと、河川水需要  $D$  は全体需要  $D_0$  と等しくなるため、その平均値が

$$\bar{D}_0 = [\beta(0) - \alpha]\bar{Q}$$

と表せる。ここで、 $\beta(\gamma)$  は次のように表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \beta(\gamma) &= \frac{\bar{D} + \bar{q}}{\bar{Q}} = \frac{\bar{D}_0 - \gamma\bar{D}_0 + \bar{q}}{\bar{Q}} = \frac{\bar{D}_0 + \bar{q}}{\bar{Q}} - \gamma\frac{\bar{D}_0}{\bar{Q}} \\ &= \beta(0) - \gamma[\beta(0) - \alpha] \end{aligned}$$

このため、 $\beta(\gamma) - \alpha = (1 - \gamma)[\beta(0) - \alpha]$  となる。

- 水需要の変動係数を  $b$  とし、河川水需要、循環水需要、循環水供給すべてに共通するものとする（実際には、総需要量  $D_0$  と総排水量  $D'_0$  の変動係数は下水道が分流式か合流式かなどにより異なり、また水利用用途によっても異なることが予想される。ここでは、河川流量と需要量の変動係数による影響の比較に焦点をあてることとし、この仮定ではそれらの特性の違いを捨象した。必要に応じて、 $D_0, D'_0$  の内訳を細分することにより以下の議論を拡張することは可能である）。河川水需要の標準偏差  $\sigma_D$  は次のように表される。

$$\sigma_D = b\bar{D} = b[\beta(\gamma) - \alpha]\bar{Q}$$

また、循環水需要量  $E$ 、循環水供給量  $F$  についての平均値および標準偏差は次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \gamma\bar{D}_0 \\ \sigma_E &= b\gamma\bar{D}_0 \\ \bar{F} &= \epsilon\bar{D}_0 \\ \sigma_F &= b\epsilon\bar{D}_0 \end{aligned}$$

さて、前節では  $Q, D, q$  および  $F$  が互いに独立であると述べた。ここでは、その平均値や標準偏差を流量の平均値で表すことにした。このような前提は相互に矛盾しない。それは、変数が互いに独立であるということは確率変数の確率特性が互いに関連しないことであり、計算条件としての設定は確率変数の性質を規定するものではなく、その平均値や標準偏差の大きさを規定しているだけであるからである。上記の設定はその大きさがパラメーター  $(a, b, \alpha, \beta)$  で決まることを意

味している。従って、両方の議論は別問題に関するものであり矛盾しない。

上記の設定のもとでは、

$$\bar{x} = \bar{Q} - \bar{D} - \bar{q} = [1 - \beta(\gamma)]\bar{Q}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_D^2 + \sigma_D^2 + \sigma_q^2} = \sqrt{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha]^2}\bar{Q}$$

$$\bar{y} = \bar{F} - \bar{E} = (\epsilon - \gamma)\bar{D}_0$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_F^2 + \sigma_E^2} = b\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2}\bar{D}_0$$

となり、よって、

$$h \equiv -\frac{\bar{x}}{\sigma_X} = -\frac{1 - \beta(\gamma)}{\sqrt{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha]^2}}$$

$$k \equiv -\frac{\bar{y}}{\sigma_Y} = -\frac{\epsilon - \gamma}{b\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2}}$$

$$\rho = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{\sigma_D^2}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\gamma b[\beta(\gamma) - \alpha]}{\sqrt{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha]^2}\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2}}$$

となる。これらの結果を式(6)、式(13)、式(17)に代入すると、 $P(X \geq 0)$ 、 $P(Y \geq 0)$  および  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= P(X' \geq h) \\ &= \int_h^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x'^2}{2}\right\} dx' \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 0) &= P(Y' \geq k) \\ &= \int_k^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y'^2}{2}\right\} dy' \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0, Y \geq 0) &= P(X' \geq h, Y' \geq k) \\ &= \int_h^{\infty} \int_k^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x'^2 - 2\rho x'y' + y'^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx' dy' \end{aligned} \quad (20)$$

非循環時河川水利用率  $\beta(0)$ 、循環利用効率  $\epsilon$  および循環利用率  $\gamma$  を与えれば、 $h, k$  および  $\rho$  が計算でき、一次元および二次元の標準正規分布の数値表または数値積分を使用すれば、 $P(X \geq 0)$ 、 $P(Y \geq 0)$ 、および  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  が求まる。数値表を利用する場合には任意の  $(h, k, \rho)$  に対応する確率を求めるときに内挿が必要になるが、内挿による誤差を無くそうとすれば数値積分が有効である。

## (2) 水供給システムの安定性の理論分析

ここでは、モデルの有効性の検証を兼ねて、 $P(X \geq 0)$ 、 $P(Y \geq 0)$ 、および  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  の幾つかの重要な性質について証明を行うとともに、水供給システムの安定性とそれに影響を及ぼす諸要因との関係を明らかにする。具体的には、本研究の目的から、次に示す3つの要因を中心にモデル分析を行う。

1. 都市水源河川の水資源開発状況、水源の緊迫性の度合いを表す非循環時河川水利用率  $\beta(0)$
2. 循環利用の技術、方式および規模から決まる循環利用効率  $\epsilon$

### 3. 循環利用水量のレベルを示す循環利用率 $\gamma$

この結果、各確率について次のような性質を確認することができた。

#### 性質 1

非循環時河川水利用率  $\beta(0)$  が大きくなればなるほど、河川からの取水に依存する需要分が確保される確率  $P(X \geq 0)$  および対象都市の総需要が確保される確率  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  がともに小さくなり、水供給システムの安定性が下がる。

[証明]

非循環時河川水利用率  $\beta(0)$  以外のパラメーター値をすべて一定(不変)とする。このとき、

$$\frac{dP(X \geq 0)}{d\beta(0)} = \frac{dP(X \geq 0)}{dh} \frac{dh}{d\beta(\gamma)} \frac{d\beta(\gamma)}{d\beta(0)} \quad (21)$$

となるが、

$$\frac{dP(X \geq 0)}{dh} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{h^2}{2}\right\} \leq 0 \quad (22)$$

$$\frac{dh}{d\beta(\gamma)} = \frac{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha](1 - \alpha)}{(\sqrt{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha]^2})^3} \geq 0 \quad (23)$$

$$\frac{d\beta(\gamma)}{d\beta(0)} = (1 - \gamma) \geq 0 \quad (24)$$

が成立する。従って、 $\frac{dP(X \geq 0)}{d\beta(0)} \leq 0$  であり、 $\beta(0)$  が大きくなるにつれ、 $P(X \geq 0)$  が小さくなる。

また、ベイズの定理によれば、

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = P(X \geq 0) \cdot P(Y \geq 0 | X \geq 0) \quad (25)$$

である。よって、

$$\frac{dP(X \geq 0, Y \geq 0)}{d\beta(0)} = \frac{dP(X \geq 0)}{d\beta(0)} \cdot P(Y \geq 0 | X \geq 0) + P(X \geq 0) \cdot \frac{dP(Y \geq 0 | X \geq 0)}{d\beta(0)} \quad (26)$$

と分解され、右辺第1項の微分項は負となり、第2項の微分項については、 $P(Y \geq 0)$  が  $\beta(0)$  に依存しないこと、 $Y$  と  $X$  が正の相関を有すること、および  $\frac{dP(X \geq 0)}{d\beta(0)} \leq 0$

であることを併せて考えれば、 $\frac{dP(Y \geq 0 | X \geq 0)}{d\beta(0)} \leq 0$

であることが分かる。従って、 $\frac{dP(X \geq 0, Y \geq 0)}{d\beta(0)} \leq 0$  となり、 $\beta(0)$  が大きくなれば、 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  が小さくなる。

#### 性質 2

循環利用効率  $\epsilon$  が高くなればなるほど、循環利用に依存する需要分が確保される確率  $P(Y \geq 0)$  および対象都市の総需要が確保される確率  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  がともに大きくなり、水供給システムの安定性が上がる。

[証明]

$\epsilon$  以外を一定とすると、

$$\frac{dP(Y \geq 0)}{d\epsilon} = \frac{dP(Y \geq 0)}{dk} \frac{dk}{d\epsilon} \quad (27)$$

となる。このとき、次が成り立つ。

$$\frac{dP(Y \geq 0)}{dk} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\right\} \leq 0 \quad (28)$$

$$\frac{dk}{d\epsilon} = -\frac{\gamma(\gamma + \epsilon)}{b(\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2})^3} \leq 0 \quad (29)$$

従って、 $\frac{dP(Y \geq 0)}{d\epsilon} \geq 0$  であり、 $\epsilon$  が大きくなるにつれ、 $P(Y \geq 0)$  が大きくなる。前項の証明と同様にベイズの定理を使えば、 $\frac{dP(X \geq 0, Y \geq 0)}{d\epsilon} \geq 0$  である。

#### 性質 3

非循環時河川水利用率  $\beta(0)$ 、循環利用効率  $\epsilon$  が与えられたときに、循環利用率  $\gamma$  が大きくなるにつれ、 $h$  が小さくなり、 $P(X \geq 0)$  が大きくなる。これとは逆に、 $k$  が大きくなり、 $P(Y \geq 0)$  が小さくなる。従って、 $P(X \geq 0)$  と  $P(Y \geq 0)$  は、循環利用率(河川からの取水量と循環利用水量の水量構成)が変化するとき、トレードオフ関係にある。

[証明]

$\gamma$  以外を一定とすると、

$$\frac{dP(X \geq 0)}{d\gamma} = \frac{dP(X \geq 0)}{dh} \frac{dh}{d\beta(\gamma)} \frac{d\beta(\gamma)}{d\gamma} \quad (30)$$

と分解される。ここで、

$$\frac{d\beta(\gamma)}{d\gamma} = -[\beta(0) - \alpha] \leq 0 \quad (31)$$

となり、(23)式より  $\frac{dh}{d\gamma} \leq 0$  であるとともに、(22)式より、 $\frac{dP(X \geq 0)}{d\gamma} \geq 0$  が成り立つ。このため、循環利用率  $\gamma$  が大きくなるにつれ、 $h$  が小さくなり、 $P(X \geq 0)$  が大きくなる。

また、 $P(Y \geq 0)$  については、

$$\frac{dP(Y \geq 0)}{d\gamma} = \frac{dP(Y \geq 0)}{dk} \frac{dk}{d\gamma} \quad (32)$$

であるが、

$$\frac{dk}{d\gamma} = \frac{\epsilon(\epsilon + \gamma)}{b(\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2})^3} \geq 0 \quad (33)$$

となる。(28)式と併せれば、 $\frac{dP(Y \geq 0)}{d\gamma} \leq 0$  が成り立つ。このため、循環利用率  $\gamma$  が大きくなるにつれ、 $k$  が大きくなり、 $P(Y \geq 0)$  が小さくなる。

従って、 $P(X \geq 0)$  と  $P(Y \geq 0)$  は、循環利用率  $\gamma$  が変化するときその増減傾向が逆となるトレードオフ関係を構成している。河川水源サブシステムと循環利用サブシステムにより供給される需要量は代替可能であると仮定したことから、 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  に対しては、循環利用率の増加による  $P(Y \geq 0)$  の減少を  $P(X \geq 0)$  の増加で補うという、互いに補完する関係にあるとみることができる。

#### 性質 4

前項の結論から連想されることであるが、非循環時河川水利用率  $\beta(0)$ 、循環利用効率  $\epsilon$  が一定の時、 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  が循環利用率  $\gamma$  の関数であり、この関数は最大値を持つ。言い換えれば、供給システム全体の安定性を最大化する循環利用レベルが存在する。

[証明]

$\rho = 1$  のときは、

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = \min\{P(X \geq 0), P(Y \geq 0)\} \quad (34)$$

であるため、明らかに  $h = k$  のときに  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  は最大値を持つ。

$\rho \neq 1$  のときの厳密な証明は付録に譲るが、最大値を実現するための一般的な条件は次式により与えられる。

$$\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \frac{(\beta(0) - \alpha)\{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha](1 - \alpha)\}}{(\sqrt{a^2 + b^2[\beta(\gamma) - \alpha]^2})^3} - \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \frac{\epsilon(\epsilon + \gamma)}{b(\sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2})^3} = 0 \quad (35)$$

以上、前章で提案したモデルをもとに、都市排水の循環利用が関わる水供給システムの安定性とこれに関連する主な要因との関係について検証を行った。次節では、さらに数値実験により水供給システム安定性のより詳しい変動特性について分析を行う。

### (3) 数値事例による水供給システム安定性の分析

ここでは、表-2に示す8ケースについて数値事例分析を行い、図-2から図-5には結果を示した。この結果から次のことが言える。

1. 当然のことであるが、理論分析の結論と数値実験の結果とは完全に一致している。
2. 循環利用効率が一定の時、非循環時河川水利用率が高いほど、水供給システム全体の安定性が低くなるが、最大の安定性を実現する循環利用率は高くなる。(図-2より)
3. 非循環時河川水利用率が一定の時、循環利用効率が高いほど、水供給システム全体の安定性が高く、最大の安定性を実現する循環利用率が高い。(図-3より)
4. 循環利用率が低いときに、システムの安定性レベルが循環利用効率にあまり関係なく非循環時河川水利用率だけで決まる傾向にある。これは、循環利用率が低いときに総需要が河川に依存する割合が高いためである。逆なケースとして、循環利用率が高いときにシステムの安定性レベルが非循環時河川水利用率にあまり関係なく、循環利用効率だけで決まる傾向にある。(図-2および図-3より)
5. 循環利用率を高めて行くにつれ、システム全体の安定性は向上するが、それは最大値を過ぎると急

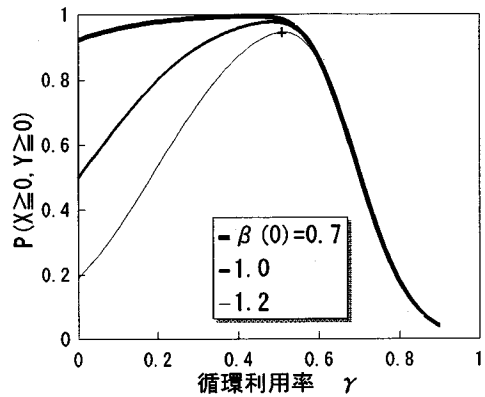


図-2 総需要が確保される確率(その1)

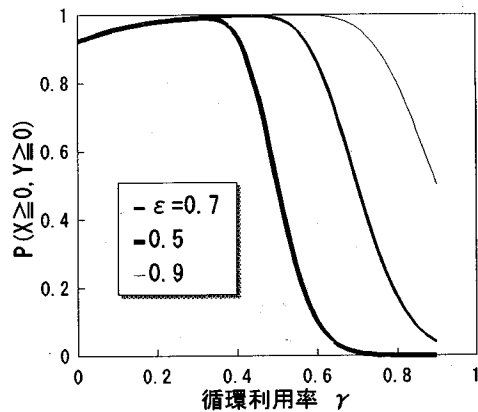


図-3 総需要が確保される確率(その2)

激に低下し、非循環時河川水利用率が高い場合を除き、循環利用をしない場合より低くなる傾向にある。このため、最大値を与える循環利用率  $\gamma^*$  を循環利用の計画規模の目安とみることができる。(図-2および図-3より)

6. 河川水の水量変動が大きくなれば、システムの安定性は低下するが、最大の安定性を得る循環利用率は高くなる。これは非循環時河川水利用率が高くなる場合と同じ傾向を示す。一方、需要量の水量変動が大きくなれば、システムの安定性が低下し、最大の安定性を得る循環利用率が低下する。需要のばらつきが大きくなれば、循環利用を抑えた方が安定であることを意味する。(図-4より)
7. 河川における確保流量が増える場合には、非循環時河川水利用率が高くなる場合と同じく、安定性が低下する。(図-5より)
8. 以上のことから、非循環時河川水利用率、河川流量の変動係数、河川確保流量が都市の水供給安定化に与える影響は同じ傾向を示し、互換性のある指標であると言える。

表-2 数値事例分析におけるケース設定

No.	非循環時 河川水利用率 $\beta(0)$	循環利用 効率 $\epsilon$	河川水 変動係数 $a$	需要 変動係数 $b$	確保流量 比率 $\alpha$	備考
1	0.7	0.7	0.2	0.1	0.1	標準ケース
2	1.0(+0.3)	...	...	...	...	河川開発レベルが高い
3	1.2(+0.5)	...	...	...	...	超開発河川
4	...	0.5(-0.2)	...	...	...	循環利用効率低い
5	...	0.9(+0.2)	...	...	...	循環利用効率高い
6	...	...	0.3(+0.1)	...	...	河川変動が大
7	...	...	...	0.2(+0.1)	...	需要変動が大
8	...	...	...	...	0.3(+0.1)	確保流量増加

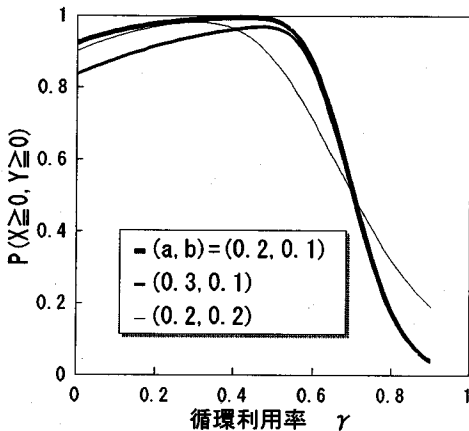


図-4 総需要が確保される確率(その3)

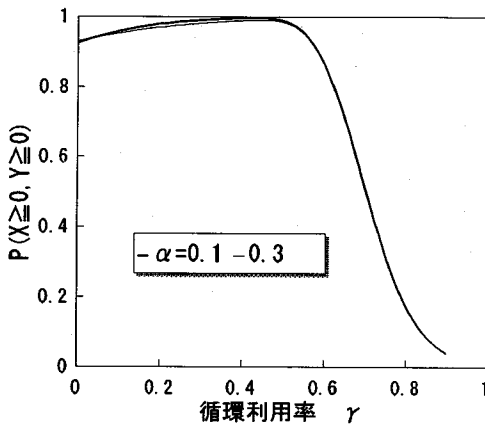


図-5 総需要が確保される確率(その4)

#### 4. 最適な循環利用レベル

これまでの検討結果から分かるように、非循環時河川水利用率  $\beta(0)$ 、循環利用効率  $\epsilon$  が与えられたときに、最も望ましい循環利用率  $\gamma^*$  を以下に示す2つの基準により選定することができる。

- (基準1)  $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0)$  の時
- (基準2)  $P(X \geq 0, Y \geq 0)$  が最大値を取るとき

基準1はサブシステム間の安定性のバランスを重視したものであり、基準2はシステム全体の安定性を追求した結果である。基準1を採用した場合の最適循環利用率レベルは  $h = k$  より、基準2を採用した場合の最適循環利用率レベルは式(35)より求めることができる。

いずれの場合にも、最適循環利用率レベルは非循環時河川水利用率や循環利用効率等パラメーターの陰関数となり解析的に求めることは難しいが、数値解析手法を使えば簡単に計算できる。表-3には基準2を採用した場合の最適循環利用率レベルの数値表の一例を示した。河川流量の分散と変動係数、需要量の分散と変動係数および循環利用効率が与えられたときの最適循環利用率レベルは同表より求めることができる。

最適循環利用率レベル数値表の代わりに次の近似式を使用することもできる。これは、数値解析結果をもとに重回帰により作成したものである。

$$\begin{aligned} \gamma^* = & 0.079 - 0.111 \cdot a - 0.910 \cdot b \\ & \quad [-0.18] \quad [-0.75] \\ & -0.171 \cdot \alpha + 0.527 \cdot \epsilon + 0.259 \cdot \beta(0) \\ & \quad [-0.26] \quad [0.51] \quad [0.32] \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、重回帰係数は0.929であった([ ]内は標準偏回帰係数)。この式より、循環利用の最適レベルは河川流量および需要量のばらつきと下流確保流量が大きくなるほど低くなり、循環利用効率および非循環時河川水利用率が大きくなると高くなることがわかる。標準偏回帰係数からは、特に需要量のばらつきと循環利用効率が支配的要因であるといえる。

最適循環利用率レベル数値表を作成したことにより、水供給システム安定化対策としての都市排水循環利用の効果とその他の対策(例えば、流況調節による河川流況安定化対策、広域化等による水需要安定化対策、循環利用効率化対策等)の効果との比較も可能になり、さらに各対策のコストや実現可能性等も考慮すれば対策の選定が可能になる。



表-3 最適な循環利用率 $\gamma^*$ の例

$a$	$b$	$\alpha$	$\epsilon$	$\beta(0)$	$\gamma^*$
0.2	0.1	0.1	0.5	0.5	0.286
0.2	0.1	0.1	0.5	1.0	0.359
0.2	0.1	0.1	0.5	1.2	0.383
0.2	0.1	0.1	0.7	0.5	0.393
0.2	0.1	0.1	0.7	1.0	0.482
0.2	0.1	0.1	0.7	1.2	0.511
0.2	0.3	0.1	0.5	0.5	0.078
0.2	0.3	0.1	0.5	1.0	0.263
0.2	0.3	0.1	0.5	1.2	0.305
0.2	0.3	0.1	0.7	0.5	0.118
0.2	0.3	0.1	0.7	1.0	0.370
0.2	0.3	0.1	0.7	1.2	0.446
0.4	0.1	0.1	0.5	0.5	0.327
0.4	0.1	0.1	0.5	1.0	0.364
0.4	0.1	0.1	0.5	1.2	0.375
0.4	0.1	0.1	0.7	0.5	0.461
0.4	0.1	0.1	0.7	1.0	0.510
0.4	0.1	0.1	0.7	1.2	0.526
0.4	0.3	0.1	0.5	0.5	0.130
0.4	0.3	0.1	0.5	1.0	0.230
0.4	0.3	0.1	0.5	1.2	0.251
0.4	0.3	0.1	0.7	0.5	0.200
0.4	0.3	0.1	0.7	1.0	0.353
0.4	0.3	0.1	0.7	1.2	0.401

## 5. おわりに

本研究では、都市排水の循環利用による水供給システムの安定性の変化を定量的に評価するためのモデルを提案した。安定性を計る指標としては需要量の確保される確率を用いた。本指標は、従来使われている利水安全度指標である渇水確率年と対応しているため、概念的には明確である。理論および数値分析により、本モデルは水供給システムの安定性とこれに影響を及ぼす諸要因との関係をよく表現していることが判明され、モデルの有効性が示された。

本モデルによる解析結果から次のことが言える。

1. 高開発河川に水源を持つ都市では循環利用を推進する意義が非常に高い。
2. 水供給システムの安定化にとって、最も望ましい循環利用レベルが存在する。
3. 最適レベルを越えた循環利用はかえって水供給システム安定性の低下を招く。

本研究の最大の意義は、上記の知見に加えて、都市排水の循環利用による水供給システムの安定性の変化を定量的に評価するためのモデルを提案でき、水供給システムの安定にとって最も望ましい循環利用レベルが示されたことにあると考えている。本研究で導出された最適循環利用レベルの関係式をもとに、水供給システムを安定化させるための様々な対策の効果を比較することが可能になる。

今後の課題としては、循環利用システム内部の不確実性(特に、総需要量 $D_0$ と総排水量 $D'_0$ の変動特性の違いや用途による変動特性の違い)を明示的に扱ったより一般的な安定性モデルの構築、流量および需要の確率特性の同定、循環利用効率の同定等が挙げられる。

## 付録 I 最適循環利用レベルの証明

総需要量が確保される確率 $P(X \geq 0, Y \geq 0)$ は $(h, k, \rho)$ の関数であり、ここでは、この関数を $L(h, k, \rho)$ と記す。関数 $L(h, k, \rho)$ の定義により、

$$L(h, k, \rho) = 1 - Q(-h) - Q(-k) + L(-h, -k, \rho) \quad (I.1)$$

が得られる。ここに、 $Q(h)$ は正規分布の上側確率である。上式から分かるように

$$\frac{\partial L(h, k, \rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial L(-h, -k, \rho)}{\partial \rho} \quad (I.2)$$

上式を水供給システムの最大の安定性が実現される必要条件、

$$\frac{dL(h, k, \rho)}{d\gamma} = 0 \quad (I.3)$$

に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial Q(-h)}{\partial(-h)} \frac{\partial h}{\partial \gamma} + \frac{\partial Q(-k)}{\partial(-k)} \frac{\partial k}{\partial \gamma} - \frac{\partial L(-h, -k, \rho)}{\partial(-h)} \frac{\partial h}{\partial \gamma} - \frac{\partial L(-h, -k, \rho)}{\partial(-k)} \frac{\partial k}{\partial \gamma} - \frac{\partial L(h, k, \rho)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \gamma} - \frac{\partial L(h, k, \rho)}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \gamma} = 0 \quad (I.4)$$

上式に含まれる微分、積分 $(\partial L(\pm h, \pm k, \rho)/\partial \gamma)$ は単積分となる)はすべて解析に実行可能である。その結果、式(35)が得られる。以上、上式が水供給システム全体の最大の安定性が実現される必要条件であることは証明された。十分条件に関する証明は難しいが、 $\rho = 1$ のときに最大値が存在することおよび $(X, Y)$ の結合分布の分布関数が連続関数であることを考えれば、上式は必要十分条件であることが推察できる。

## 参考文献

- 1) 国土庁水資源部：日本の水資源，平成4年度水資源白書，1994。
- 2) S.P.Zhang, H. Watanabe and R. Yamada : Prediction of Daily Water Demands by Neural Networks, *Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering*, Vol.3, pp.217-227, 1994.
- 3) 小泉明，稲員とよの，千田孝一，川口士郎：多元ARIMAモデルによる水使用量の短期予測，水道協会雑誌，No.651, pp.13-20, 1988.
- 4) 今田俊彦，張昇平，山田良作：多元ARIMAモデルを用いた短期的水需要予測の事例分析，NSC研究年報，Vol.18(1), pp.187-198, 1993.
- 5) 寶馨：水資源システムにおける確率論的モデルと手法の評価に関する研究，京都大学博士論文，1990。

- 6) 山内二郎編：統計数値表，日本規格協会，1972.
- 7) 渡辺晴彦，張昇平，岡田憲夫：都市排水の循環利用による水供給の安定化に関するモデル分析，水文・水資源学会1994年研究発表会要旨集，pp.88-89，1994.

(1995. 4. 10 受付)

## STABILITY ANALYSES OF URBAN WATER SUPPLY SYSTEMS WITH WASTEWATER REUSE

Haruhiko WATANABE, Sheng Ping ZHANG and Norio OKADA

Wastewater reuse can be considered as a type of water resource development which is expected to improve the aquatic environment, as well as the stability and reliability of municipal water supply systems. To this extent, wastewater reuse has been taken into account in the planning of water supply systems in several Japanese cities.

However, to date the effect of wastewater reuse on water supply system stabilization has not been discussed quantitatively, and the relation between wastewater reuse rate and water supply system stability has not been analyzed.

In this study, a stochastic model has been presented to evaluate the stability of water supply systems with optimal wastewater reuse rate. Some theoretical analyses and numerical studies were performed, and all of the results have shown that the model is reliable for not only basic studies on water supply system stability, but also for practical use as well.