

**投稿論文 (和文)**  
**PAPERS**

# カルマンフィルタ有限要素法による岩盤損傷力学 パラメータの逆解析

呉 旭<sup>1</sup>・市川康明<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 名古屋大学助手 工学部 機械情報システム工学科 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)

<sup>2</sup>正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部 地圏環境工学教室 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)

本研究では、カルマンフィルタ有限要素法の逆解析手法を用いて岩盤の損傷力学パラメータの同定方法を提案する。変数変換を行い、カルマンフィルタの感度マトリックスを直接微分法で容易に求められるほか、同定解析の効率も向上される。また、定常パラメータを同定する場合にカルマンフィルタにおけるシステム誤差の役割およびその値の設定問題については、具体的な数値シミュレーションを通じて検討する。

**Key Words** : *jointed rock mass, parameter identification, Kalman filtering*

## 1. はじめに

地盤工学分野においては、現場計測を実施し得られたデータ（たとえば、変位）を基に逆解析を通して、地盤構造物の変形挙動の予測や安定性の評価などを行い設計の見直しや施工の指導を遂行すると言った情報化施工のプロセス<sup>1),2)</sup>は、重要な位置を占めている。

近年、大規模な岩盤構造物を建設する場合にも、このような情報化施工の方法論が積極的に導入されている<sup>3),4)</sup>。節理や亀裂など分布不連続面を内包している岩盤を、適切な力学モデルで表現したあと、モデルに含まれているパラメータを合理的に決めれば、有限要素法などの数値解析結果から岩盤構造物の変形挙動をより正確に把握することが可能となる。筆者らはコンプリメンタリエネルギー等価仮説に基づく岩盤の損傷力学モデルを提案している。しかし、このモデルに含まれているパラメータすなわち岩盤の損傷テンソルを如何に合理的に決められるかが、実用上大きな問題となっている。

本論文では、現場実験または施工中における岩盤のいくつかの点での変位を観測されることを想定し、カルマンフィルタ有限要素法の逆解析手法を用いて、その岩盤の損傷力学モデルのパラメータを同定する方法を提案する。孔内載荷試験を例にして、模擬観測データによる逆解析の数値シミュレーションを行い、提案手法の有効性を検討する。本手法は主に二つ特徴がある。一つは、同定するパラメータの変数変換を行い、カルマンフィルタの感度マトリックスを直接微分法で容易に求められるほかに、同定するパラメータの感度も高められ同定解析の効率が向上される。もう一つは、定常パラメ-

ータの同定解析する場合に、カルマンフィルタにおけるシステムノイズを考慮することによって同定解析の収束性が改善される。また、模擬観測データに含まれている観測誤差の大きさは、同定解析の収束性にどんな影響を与えているかについても、具体的な計算例を通じて検討する。

## 2. 同定方法の構成

### (1) 岩盤の損傷力学モデル

亀裂や節理などの分布不連続面を内包している不連続性岩盤を等価連続体に置き換え、有限要素法など数値解析手法を用いて、不連続性岩盤構造物の変形挙動を予測するのは岩盤工学において重要な問題である。いままで、不連続性岩盤の等価連続性モデルに関する研究が多数行われている<sup>5)</sup>。中でも、コンプリメンタリエネルギー等価仮説による岩盤の損傷力学モデルは、異方性損傷のポアソン効果を表しているため、掘削による地下空洞の変位予測に良好な適用性が示されている<sup>6)</sup>。この理論では岩盤に存在している亀裂や節理など分布不連続面の幾何学特性を2階対称な損傷テンソル $\Omega$ で表し、その力学効果は実質応力を通して<sup>7),8)</sup>、コンプリメンタリエネルギー等価仮説を用いて評価される。損傷テンソルの主値座標系 $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ において、岩盤の弾性コンプライアンスのマトリックス形式は、式(1)で表され、また、損傷主値間の相互作用を考慮すれば、式(2)で与えられる。詳細は文献(6)に参照されたい。

$$C = \frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$C' = \frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & -\nu_0\alpha\beta & -\nu_0\alpha\gamma \\ -\nu_0\beta\alpha & \beta^2 & -\nu_0\beta\gamma \\ -\nu_0\gamma\alpha & -\nu_0\gamma\beta & \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = (1+\nu_0) \begin{bmatrix} \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\gamma+\alpha)^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$B' = (1+\nu_0) \begin{bmatrix} \frac{(1+\alpha)^2(1+\beta)^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+\beta)^2(1+\gamma)^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\gamma)^2(1+\alpha)^2}{8} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{1}{1-\omega_1}, \beta = \frac{1}{1-\omega_2}, \gamma = \frac{1}{1-\omega_3} \quad (6)$$

と定義する。\$E\_0, \nu\_0\$ は、それぞれ岩石の弾性係数とポアソン比である（ここに、岩盤の母材（岩石）を等方線形弾性体と仮定する）。\$\omega\_1, \omega\_2, \omega\_3\$ はそれぞれ岩盤の損傷テンソル \$\mathbf{\Omega}\$ の3つの主値である。

有限要素法など数値解析を行う場合に、解析座標系における \$\mathbf{\Omega}\$ の主方向が必要となる。これが分かれば、座標変換によって式(1)~式(6)から解析座標系における岩盤の弾性コンプライアンスが求められ、有限要素法の剛性マトリックスを計算できる。

\$E\_0, \nu\_0\$ は岩石コア供試体の室内実験から容易に求められる。問題は岩盤の損傷テンソル \$\mathbf{\Omega}\$ をどのように決めるかにある。以下では、カルマンフィルター有限要素法の逆解析手法を用いて、変位観測データから岩盤の損傷テンソル \$\mathbf{\Omega}\$ を同定する一手法を試みる。

## (2) カルマンフィルター有限要素法

地盤工学における逆解析手法としては、大きく分類すると、三つの方法がある<sup>9)</sup>。すなわち、(1) 逆定式化法 (inverse approach), (2) 直接定式化法 (direct approach), (3) 統計的な推定法 (statistical approach)。逆定式化法は、問題の支配方程式と境界条件から計測量と逆解析の未知パラメーターの関係式、いわゆる観測方程式を誘導することが必要である。それに計測値を代入し、観測方程式の左辺と右辺との差 (equation error) から誤差関数を構成し、それを最小化するように未知パラメーターを求める。直接定式化法は、計測値と通常の順解析から得られた結果との差 (output error) から誤差関数を構成し、それを最小化するように未知パラメーター

を求める。統計的な推定法は、求めようとするパラメーターを確率量と見なし、その事前確率分布から、統計的な推定法を適用して未知パラメーターの平均値と分散を求める。

本論文では、統計的な推定法の一つであるカルマンフィルターを用いている。カルマンフィルター理論は<sup>10)~13)</sup>、本来線形確率システムの状態推定のアルゴリズムとして発表されたものであるが、実際の応用では未知パラメーターを含むシステムの推定や同定に用いられることが多い。制御工学はもちろん、それ以外の多くの分野たとえば土木工学、社会・経済学などにおいてもよく適用されている。現在、カルマンフィルターは単なるフィルターの範疇を超え、現代のシステム制御またはシステム同定の重要な一理論として幅広く適用されている。近年、カルマンフィルターの同定アルゴリズムに有限要素法を取り込んだ、いわゆるカルマンフィルター有限要素法が盛んに適用されている<sup>14)~17)</sup>。ここでは、定常状態ベクトル \$\mathbf{x}\$ を有するシステムが、観測ベクトル \$\mathbf{y}\$ を通して観測されたとする場合に、カルマンフィルター理論を用いて \$\mathbf{x}\$ の最適推定値 \$\hat{\mathbf{x}}\$ を求める問題を考える。

岩盤の静的つりあい問題に対して有限要素法を適用して

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

が得られたとする。

ここでは、\$\mathbf{u}\_1\$ は観測節点の変位ベクトル、\$\mathbf{u}\_2\$ は観測節点以外の節点の変位ベクトルとしている。\$\mathbf{K}\_{ij} (i, j=1, 2)\$ は剛性マトリックス \$\mathbf{K}\$ の分割マトリックスである。\$\mathbf{K}\$ は岩盤の弾性コンプライアンスの関数であり、対称かつ正定値なマトリックスである。岩石の弾性係数 \$E\_0\$、ポアソン比 \$\nu\_0\$ を既知とすれば、\$\mathbf{K}\_{ij}\$ は岩盤の損傷テンソル \$\mathbf{\Omega}\$ のみに依存する。\$\mathbf{f}\_i (i=1, 2)\$ は節点に作用している荷重ベクトルであり、ここでは、既知とする。

式(7)を

$$\mathbf{u}_1 = [\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}]^{-1} (\mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{f}_2) \quad (8)$$

と変形し、それに観測ノイズ \$\mathbf{v}\_k\$ を加えて、カルマンフィルターの観測方程式として、改めて書くこととなる。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{\Omega}_k) + \mathbf{v}_k \quad (9)$$

ここに、\$\mathbf{y}\_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}\_1\$、\$\mathbf{h}\_k(\mathbf{\Omega}\_k)\$ は式(8)の右辺と同じものである。また、\$\mathbf{v}\_k\$ は平均値 \$\mathbf{0}\$、共分散 \$\mathbf{R}\$ の白色観測ノイズである。つまり、\$E(\mathbf{v}\_k) = \mathbf{0}\$、\$E(\mathbf{v}\_k \otimes \mathbf{v}\_k) = \mathbf{R}\_k\$。\$E(\cdot)\$ は平均作用素であり、\$\otimes\$ はテンソル積である。下文字 \$k\$ は同定するパラメーターの更新ステップ数を意味する。

ここでは、\$\mathbf{h}\_k(\mathbf{\Omega}\_k)\$ は \$\mathbf{\Omega}\_k\$ の非線形関数であるので、拡張カルマンフィルターを適用する必要があることに注意されたい。また、記述上の理由から、以下では2次元

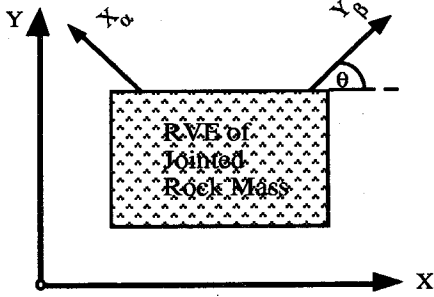


図-1 解析座標系と損傷主値座標系

の場合に限定し議論を進めていく。

2次元の岩盤の損傷テンソル  $\Omega$  は、その2つ主値 ( $\omega_1, \omega_2$ ) および主方向ベクトル  $X_\alpha$  と解析座標軸  $X$  との間の角度 ( $\theta$ ) で完全に記述できる (図-1)。ただし、ここでは直接 ( $\omega_1, \omega_2, \theta$ ) を同定するわけではなく、変数変換を行い新たな未知パラメータベクトル ( $\alpha, \beta, c$ ) をカルマンフィルターの状態ベクトル  $x$  としている。

$$\begin{aligned} x &\stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, \beta, c)^T \\ c &\stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta \end{aligned} \quad (10)$$

また、 $\alpha, \beta$  は式 (6) に定義している。

このように変数変換を行うことによって、同定解析における感度マトリックスを直接微分法で容易に求められることに加えて、未知パラメータの感度も高められ同定解析の効率が改善される。

ここでは、 $x$  は時間に依存しない、すなわち、定数状態ベクトルである。ただし、 $x$  に平均値  $\mathbf{0}$ 、共分散  $\mathbf{Q}$  の白色システムノイズが存在していることを仮定し、 $x$  を一つ確率変数ベクトルとして取り扱う。したがって、カルマンフィルターの状態方程式がつぎのように書ける。

$$x_{k+1} = x_k + w_k \quad (11)$$

ただし、 $E(w_k) = \mathbf{0}$ 、 $E(w_k \otimes w_k) = \mathbf{Q}_k$ 、また、 $E(w_k \otimes v_k) = \mathbf{0}$ 、 $E(v_k \otimes x_k) = \mathbf{0}$ 、 $E(v_k \otimes v_k) = \mathbf{0}$ 。

状態方程式 (11) と観測方程式 (9) を拡張カルマンフィルター同定アルゴリズムに適用すると、変位を観測すれば、適当な初期値から出発して、未知パラメータを同定できるようになっている。その同定アルゴリズムは、つぎのようにまとめられる<sup>10), 11)</sup>。

システム予測方程式

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}_{k|k} \quad (12)$$

$$P_{k+1|k} = P_{k|k} + Q_k \quad (13)$$

カルマンゲイン

$$\begin{aligned} G_{k+1|k} &= P_{k+1|k} H_{k+1|k}^T \\ &\cdot (H_{k+1|k} P_{k+1|k} H_{k+1|k}^T + R_{k+1})^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

観測更新方程式

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + G_{k+1|k} [y_{k+1} - h_{k+1}(\hat{x}_{k+1|k})] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1|k+1} &= [I - G_{k+1|k} H_{k+1|k}] P_{k+1|k} \\ &\cdot [I - G_{k+1|k} H_{k+1|k}]^T \\ &+ G_{k+1|k} R_{k+1} G_{k+1|k}^T \end{aligned} \quad (16)$$

感度マトリックス

$$H_{k+1|k} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{k+1|k}} = \left[ \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \frac{\partial h}{\partial \beta}, \frac{\partial h}{\partial c} \right]_{x=\hat{x}_{k+1|k}} \quad (17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \alpha} &= - (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( \frac{\partial K_{11}}{\partial \alpha} - \frac{\partial K_{12}}{\partial \alpha} K_{22}^{-1} K_{21} + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial \alpha} K_{22}^{-1} K_{21} \right. \\ &\quad \left. - K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{21}}{\partial \alpha} \right) (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &(f_1 - K_{12} K_{22}^{-1} f_2) + (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( - \frac{\partial K_{12}}{\partial \alpha} K_{22}^{-1} f_2 + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial \alpha} K_{22}^{-1} f_2 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \beta} &= - (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( \frac{\partial K_{11}}{\partial \beta} - \frac{\partial K_{12}}{\partial \beta} K_{22}^{-1} K_{21} + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial \beta} K_{22}^{-1} K_{21} \right. \\ &\quad \left. - K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{21}}{\partial \beta} \right) (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &(f_1 - K_{12} K_{22}^{-1} f_2) + (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( - \frac{\partial K_{12}}{\partial \beta} K_{22}^{-1} f_2 + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial \beta} K_{22}^{-1} f_2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial c} &= - (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( \frac{\partial K_{11}}{\partial c} - \frac{\partial K_{12}}{\partial c} K_{22}^{-1} K_{21} + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial c} K_{22}^{-1} K_{21} \right. \\ &\quad \left. - K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{21}}{\partial c} \right) (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &(f_1 - K_{12} K_{22}^{-1} f_2) + (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21})^{-1} \cdot \\ &\left( - \frac{\partial K_{12}}{\partial c} K_{22}^{-1} f_2 + K_{12} K_{22}^{-1} \frac{\partial K_{22}}{\partial c} K_{22}^{-1} f_2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

また、前節で示した岩盤の損傷力学モデルのコンプライアンスを用いて、およびコンプライアンスの座標変換の概念を考慮すれば、有限要素法の方程式から  $\partial K_{ij} / \partial \alpha$ 、 $\partial K_{ij} / \partial \beta$ 、 $\partial K_{ij} / \partial c$  ( $i, j = 1, 2$ ) が容易に計算される。

初期値

$$\begin{aligned} \hat{x}_{0|0} &= x_0 \\ P_{0|0} &= P_0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $\hat{\cdot}$  は状態ベクトル  $x$  の最適推定値を意味する。肩文字  $T$  はマトリックスの転置を意味する。下文字  $k+1|k$  は  $k$  ステップまでの情報を用いて、 $k+1$  ステップの予測値を意味する。また、有限要素法の剛性マトリックス  $K$  の記号との混同を避けるために、カルマンゲインを通常記号  $K$  の代わりに記号  $G$  で表す。

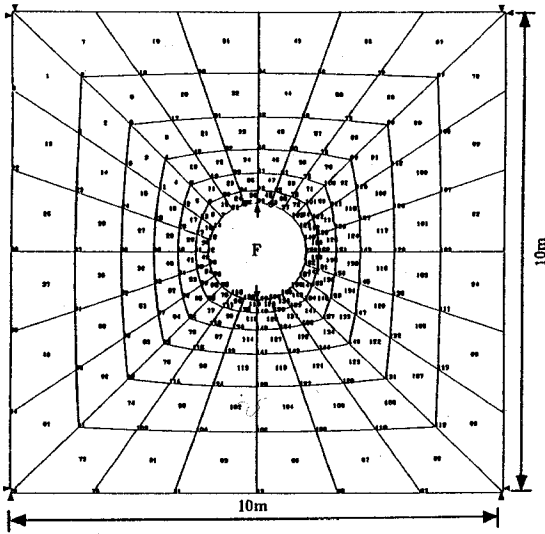


図-2 同定解析例

表-1 模擬観測データ用の解析条件

rock:	$E_0 = 9.8 \times 10^3$ (MPa), $\nu_0 = 0.25$ .
damage:	$\omega_1 = 2/3, \omega_2 = 1/2, \theta = 35.0^\circ, 60.0^\circ$ .

### 3. 同定解析例

本節では、前述したカルマンフィルター有限要素法による岩盤損傷力学モデルのパラメーター同定手法の適用性を検討するために、孔内載荷試験を例にして、模擬観測データによる逆解析の数値シミュレーションを行う。

#### (1) 逆解析例の設定

解析モデルは図-2に示す。なお、平面ひずみ状態を仮定し、荷重は  $F=196.0$  (KN) とした。

まず、岩盤の損傷パラメーター ( $\omega_1, \omega_2, \theta$ ) をあらかじめ既知値として設定し、普通の順解析を行う。順解析に用いられたパラメーターは表-1に示している。

観測する節点の変位 ( $X$  方向,  $Y$  方向) は順解析の結果から出力され、それに白色ノイズを加えて、模擬観測データとして同定解析に使われる。本逆解析例においては、一つの載荷点およびその左右の二つ節点での変位、合計6個の変位成分を観測変位データとする。その内の一つ模擬観測データ (載荷点での  $Y$  方向変位成分) を例として図-3に示す。ただし、それが標準誤差  $\sigma = 3.0 \times 10^{-2}$  (cm) の白色ノイズを含んだものである。

また、未知状態ベクトル  $\mathbf{x} = \left( \frac{1}{1-\omega_1}, \frac{1}{1-\omega_2}, \cos\theta \right)^t$  =  $(\alpha, \beta, c)^t$  の初期値  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = (1.0, 1.0, \cos 15.0^\circ)^t$  とする。未知状態ベクトルの推定誤差共分散  $\mathbf{P}$  の初期値

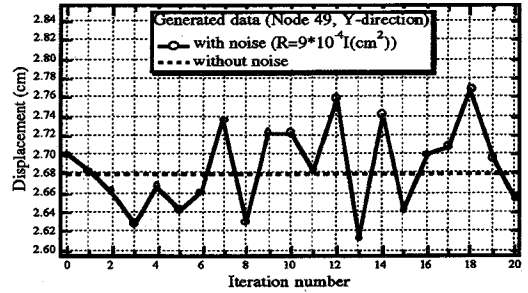


図-3 模擬観測データ (節点49のY方向の観測変位)

$\mathbf{P}_{0|0}$ , 観測誤差共分散  $\mathbf{R}$  およびシステム誤差共分散  $\mathbf{Q}$  などの設定に関しては、各解析例において具体的に示す。

#### (2) 同定解析結果および考察

##### a) 観測誤差による同定解析への影響

誤差を含んでいる観測データから真の情報を取り出し、システムの同定や未知パラメーターの推定を行うことは、フィルターの本来の意味するところである。アルゴリズムから言うと、観測誤差共分散  $\mathbf{R}$  の逆行列は重み付き最小二乗法の重み行列に相当し、正規化因子として働く。具体的な同定解析を行う場合には、 $\mathbf{R}$  の大きさの設定は計測機器の実際の精度から定めるべきである。ここでは、数値計算上で  $\mathbf{R}$  がパラメーター同定解析の収束性にどんな影響を与えているかについて検討する。つまり、ほかの条件を一定にして、 $\mathbf{R}$  だけを変えて (もちろん、それに応じて観測データに含まれているノイズも変わる)、同定解析の結果を調べる。ここで、5つの誤差レベルを有する模擬観測データ (標準偏差  $\sigma = 10^{-1}, 3 \times 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  (cm)) を用いた同定解析の結果が、それぞれ図-4に示している。

図-4から分かるように、本逆解析例では、観測誤差の標準偏差  $\sigma$  に関しては、 $0 < \sigma \leq 10^{-2}$  (cm) であれば、観測データに含まれた誤差がほぼ完全にフィルターリングされ、同定結果は真値と一致した。一方、 $\sigma = 3 \times 10^{-2}$  cm の場合に、真値のまわりに少し変動している同定結果となった。 $\sigma > 3 \times 10^{-2}$  cm であると、観測誤差をフィルターリングできず、同定解析ができなくなる。

##### b) システム誤差による同定解析への影響

前述のように、パラメーター定常条件式 (11) をカルマンフィルターの状態方程式としているが、それにシステム誤差  $\mathbf{w}_k$  (その共分散  $E(\mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k) = \mathbf{Q}_k$ ) を加えることはどんな意味を持つだろうか。ここでは、システム誤差共分散  $\mathbf{Q}_k$  の同定解析過程への影響について、逆解析例の結果を基に検討する。

Case-1:  $\mathbf{P}_0$  は未知状態ベクトルの推定誤差共分散の初期値であるので、 $\mathbf{P}_0$  の対角要素の大きさが対応して

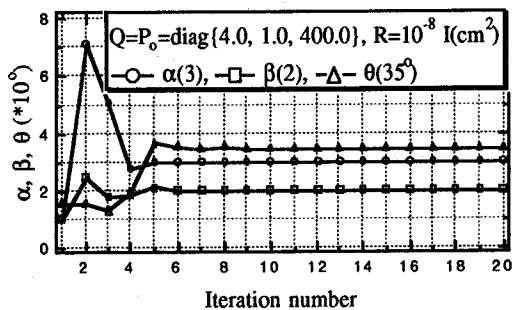
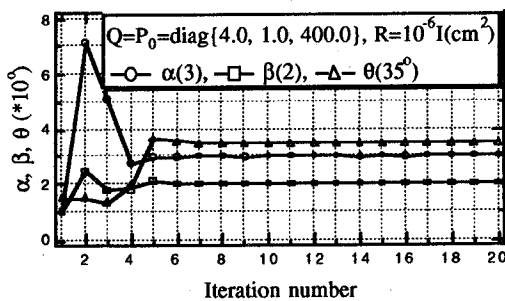
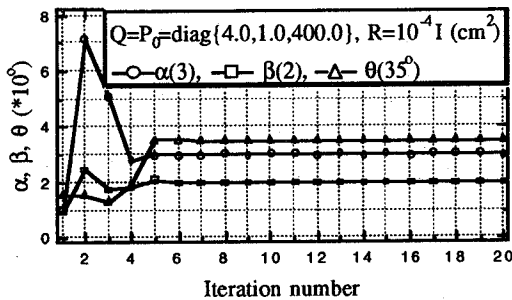
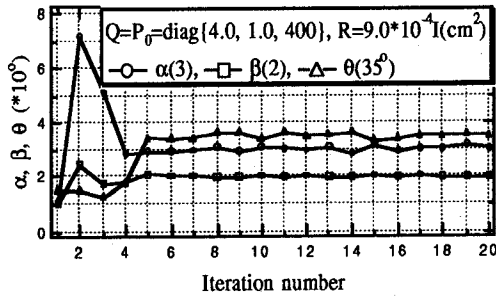
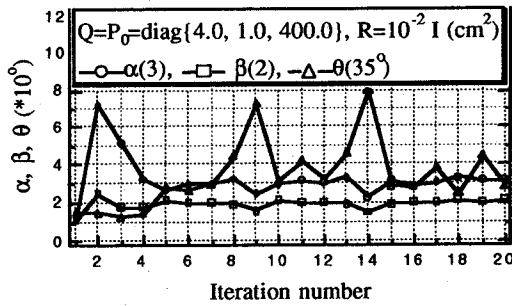


図-4 観測誤差の同定解析への影響

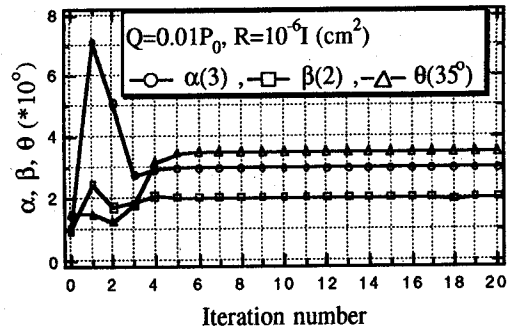
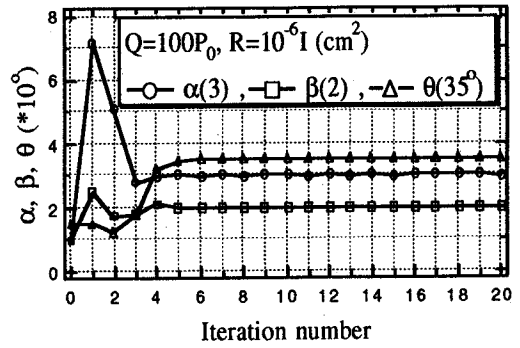


図-5 システム誤差の同定解析への影響 (1)

いる未知パラメータの事前情報と関連している。模擬観測データによる同定解析の場合には、未知パラメータの真値と初期値が分かっているので  $P_0$  を正確に設定できるが、実際的には不可能なもので未知パラメータの事前情報に基づいて設定しなければならない。ここでは、 $P_0 = \text{diag}\{4.0, 1.0, 400.0\}$ 、 $R = 10^{-6} I(\text{cm}^2)$  と設定する。そして、 $Q_k$  を  $P_0$  の 100 倍と  $\frac{1}{100}$  倍と仮定し、同定結果の違いを見る。図-5 に示すように、ほぼ同様な同定結果が得られた。

Case-2:  $Q_k$  を  $P_0$  と同値し、 $P_0$  を単位マトリックス  $I$  のスカラー倍であると仮定する。すなわち、 $P_0 = sI$ 、 $s = 10^{-5}, 10^{-3}, 10^3, 10^4$ 、また、 $R = 10^{-8} I(\text{cm}^2)$  と仮定する。同定解析結果は図-6 に示す。いずれの場合も、同定結果は真値に収束している。

Case-3: 未知パラメータである損傷主方向角  $\theta$  の真値を  $35.0^\circ$  から  $60.0^\circ$  に変更し、また  $s = 10^{-5}, 10^{-3}, 10^3, 10^6$  とする。他の条件は Case-2 のものと同じである。同定解析結果は図-7 に示す。いずれの場合も、同定結果は真値に収束している。

Case-4: システム誤差を考慮しない、つまり  $Q_k = 0$  とする場合の同定結果は図-8 に示す。同定解析は収束するが真値には収束しない。

以上の数値シミュレーション結果から分かるように、本同定解析例においては、 $Q_k = 0$  とすると、未知パラメー

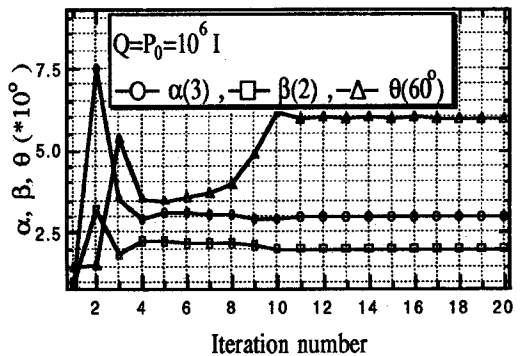
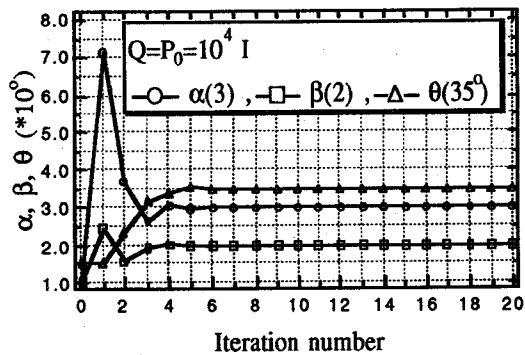
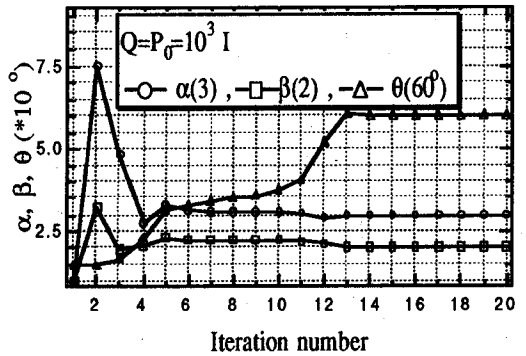
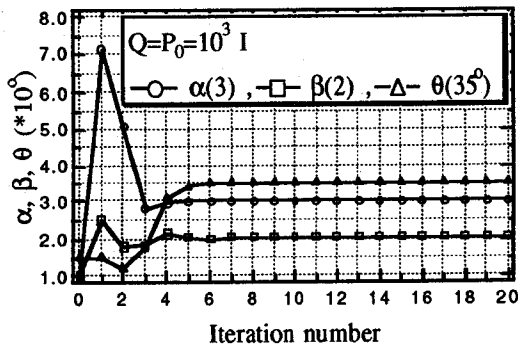
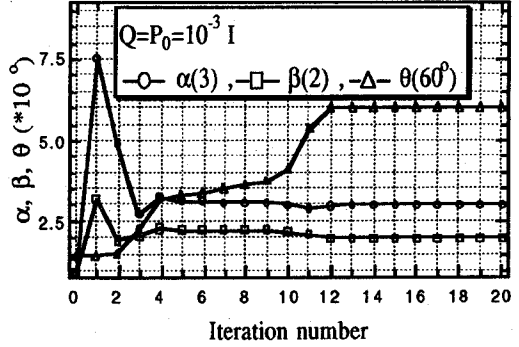
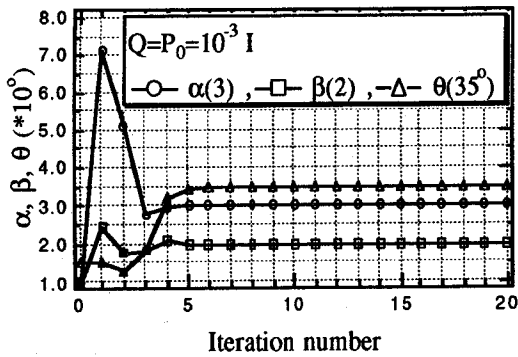
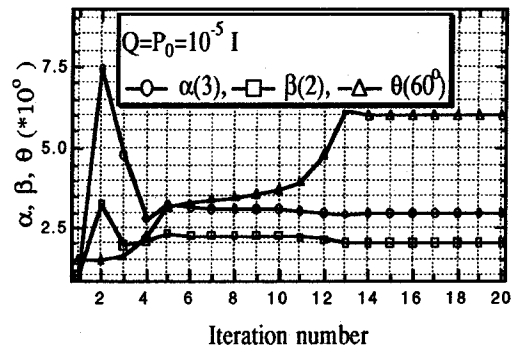
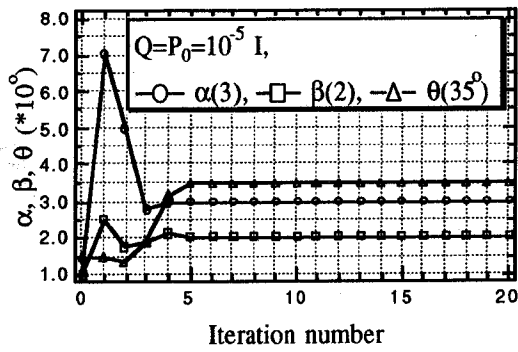


図-6 システム誤差の同定解析への影響 (2)

図-7 システム誤差の同定解析への影響 (3)

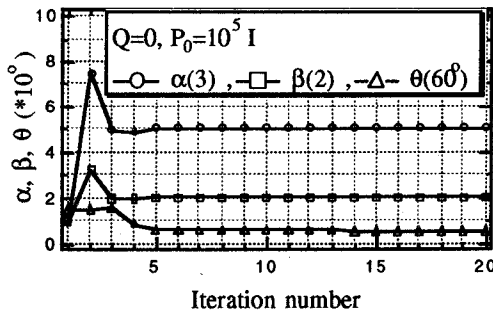
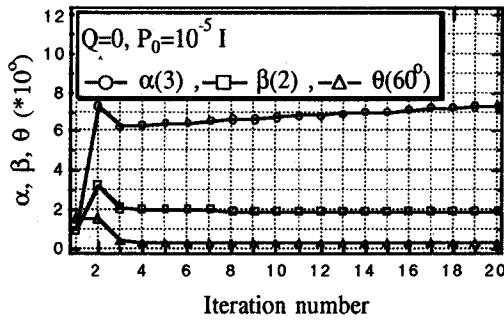


図-8 システム誤差の同定解析への影響 (4)

ターをうまく同定できなかつた。一方、 $Q_k > 0$ であれば、殆どよい同定結果が得られた。 $P_0$ の設定は比較的に自由であり、同定解析結果に不敏感である。すなわち、観測データの取り入れるごとに初期設定した $P_0$ の影響は次第に小さくなる。また、 $Q_k = P_0$ というのが、一つ良い選択肢である。

システム誤差がこのような役割を演じているのは何故だろうか。Jazwiskiの指摘のように<sup>10)</sup>、パラメーターの定常条件にシステム雑音を加えるのは、主にカルマンフィルターの収束性を高めるためである。同定アルゴリズムの式(13)からわかるように、システム誤差 $Q_k$ を考慮することが推定誤差共分散 $P_{k+1|k}$ を増やすことと等価であり、カルマンゲイン $G$ も大きくなる。そうすると、最新観測された情報 $y_{k+1}$ が十分に活用され、推定過程の収束性を高めることになる。この点について、逐次重み付け最小二乗法、つまりつぎの2次誤差関数の最小化問題

$$\begin{aligned} & \hat{x}_{k+1|k+1} \\ & \leftarrow \underset{\text{minimum}}{J(x)} \\ & = (\hat{x}_{k+1|k} - x)^T (P_{k+1|k} + Q_k)^{-1} (\hat{x}_{k+1|k} - x) \\ & + (y_{k+1} - h_{k+1}(x))^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - h_{k+1}(x)) \quad (22) \end{aligned}$$

と前節で示した同定アルゴリズム(式(12)~式(16))とは同じものであることに注意すれば、説明できる<sup>18)</sup>。システムノイズ共分散 $Q_k$ が対称かつ正定値マトリク

スであるので、式(22)から明らかなように $Q_k$ を考慮することは、相対的に大きな重み $R_{k+1}^{-1}$ を最新観測されたデータ $y_{k+1}$ に付け、相対的に小さな重み $(P_{k+1|k} + Q_k)^{-1}$ を状態量の事前情報 $x_{k+1|k}$ に与えることを意味する。

ここで強調したいのは、システム雑音を考慮できることがカルマンフィルターのひとつ特徴でもある。実際、定常パラメーター同定問題に対しては、もしシステム雑音を考慮しない、すなわち $Q_k = 0$ とすれば、式(22)はバイズの推定式となり、カルマンフィルターとバイズのアプローチと完全に一致する。

#### 4. 結 論

本研究の結果をまとめるとつぎのようである。

- (1) カルマンフィルター有限要素法により岩盤の損傷力学モデルのパラメーターを同定する一手法を提案した。本同定手法を適用する際に、カルマンフィルターにおける感度マトリクスを直接微分法で計算し、変数変換を行って同定解析の効率の向上を図っている。
- (2) 観測データに含まれている観測誤差は同定解析の結果に影響を与えている。模擬観測データを用いた同定解析例においては、変位観測誤差分散は $\pm 3\sigma = \pm 0.9$  (mm)を越えると観測誤差をフィルタリングしきれず、同定解析ができなくなる。
- (3) 定常パラメーターを同定する場合においては、システム誤差を考慮すれば、収束性が大いに改善される。事前情報が不十分の場合では、未知状態ベクトルの推定誤差共分散の初期値 $P_0$ は単位行列のスカラ倍にして、システム誤差 $Q$ は $P_0$ と同値すれば、良い同定結果を得られる。これらは模擬観測データを用いた同定解析例を通じて確認された。

#### 参考文献

- 1) Asaoka, A. : Observational procedure of settlement prediction, *Soils and Foundations*, Vol.18, No.4, pp.87-101, 1978.
- 2) 桜井春輔：トンネル工事における変位計測結果の評価法, 土木学会論文集, No.317, pp.93-100, 1982.
- 3) 桜井春輔, 谷河正也：岩盤の不連続面の影響を考慮した大規模地下空洞の変位計測結果の逆解析, 土木学会論文集, No.403/VI-10, pp.75-84, 1989.
- 4) 土山茂希, 大上俊之, 市川康明：不連続性岩盤における損傷場の逆解析と地下空洞掘削時の変形予測, 土木学会論文集, No.475/III-24, pp.49-58, 1993.
- 5) 桜井春輔, 清水則一：不連続性岩盤の解析手法の現状, 土と基礎, Vol.40, No.11, pp.39-44, 1992.
- 6) 呉 旭, 市川康明, 京谷孝史, 川本眺万：コンプリメンタリエネルギー等価仮説による岩盤の損傷力学モデルとその地下空洞掘削問題への適用, 土木学会論文集, No.505/III-29, pp.115-122, 1994.
- 7) 京谷孝史, 市川康明, 川本眺万：岩盤の力学特性評価に



- おける損傷テンソルの適用について, 土木学会論文集, No. 358/Ⅲ-3, pp. 27-35, 1985.
- 8) Kawamoto, T., Ichikawa, Y. and Kyoya, T. : Deformation and fracture behaviour of discontinuous rock mass and damage mechanics theory, *Int. J. Numer. Analy. Method in Geomech.*, 12, pp.1-30, 1988.
  - 9) 清水則一: 地下空洞における現場計測変位の逆解析法並びに岩盤評価に関する研究, 学位論文, 神戸大学, pp. 8-12, 1993.
  - 10) Jazwiski, A.H. : *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.
  - 11) Anderson, B.D.O. and Moor, J.B. : *Optimal Filtering*, Prentice-Hall Inc., 1979.
  - 12) 星谷 勝, 斉藤悦郎: 建設技術者のためのデータ解析と応用 (カルマンフィルターを中心として), 鹿島出版会, 1991.
  - 13) 西山 清: パソコンで解くカルマンフィルタ, 丸善株式会社, 1993.
  - 14) 村上 章, 長谷川高士: Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置, 土木学会論文集, No. 388/Ⅲ-6, pp. 227-235, 1987.
  - 15) 鈴木 誠, 石井 清: 拡張カルマンフィルターによる土質定数空間分布推定, 土木学会論文集, No. 406/Ⅲ-11, pp. 71-78, 1989.
  - 16) 門田俊一, 斉藤悦郎, 和久昭正, 後藤哲雄: 繰り返しカルマンフィルターによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用, 土木学会論文集, No. 406/Ⅲ-11, pp. 107-116, 1989.
  - 17) Hendriks, M.A.N. and Oomens, C.W.J. : Identification aspects of inhomogeneous materials, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Tanaka, M. and Bui, H.D. (Eds.) pp.301-309, 1992.
  - 18) Hendriks, M.A.N. : *Identification of the mechanical behavior of solid materials*, Doctoral Dissertation, 1991. (1993. 12. 3 受付)

## IDENTIFICATION OF DAMAGE PARAMETERS FOR JOINTED ROCK MASS BASED ON THE KALMAN FILTER FINITE ELEMENT METHOD

Xu WU and Yasuaki ICHIKAWA

In this paper, a parameter identification procedure based on the Kalman filter finite element technique for damage mechanics model of jointed rock mass is proposed. In addition that the sensitivity of parameters to be identified is increased with transforming the variables, the convergence of parameter identification process is improved by means of introducing the system noise. An example of jack test by use of generated data has been carried out to demonstrate the applicability and effectiveness of the proposed procedure. It is found that the performance of the proposed procedure is very well even if the value of system noise is chosen in a large range except zero.