

乱れの拡散と散逸がバランスした乱流場に対する 標準型 $k-\varepsilon$ モデルの有効性

杉原裕司¹・松永信博²・増田 章³・小松利光⁴

¹正会員 工修 九州大学助手 大学院総合理工学研究科 (〒816 福岡県春日市春日公園 6-1)

²正会員 工博 九州大学助教授 大学院総合理工学研究科

³理博 九州大学教授 応用力学研究所

⁴正会員 工博 九州大学教授 工学部建設都市工学科 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)

乱れの拡散と散逸がバランスした乱流場と見なせる振動格子乱流に対し、標準型 $k-\varepsilon$ モデルの有効性を検証する研究を行った。そのような乱流場を記述する非線形 $k-\varepsilon$ 方程式を解くことによって、乱れエネルギー、エネルギー散逸率、乱れエネルギーフラックス、渦動粘性係数および乱れの代表長さスケールの厳密解を求めた。これらの厳密解から予測される乱流特性量間の関係を実験値から検証することにより、モデルの有効性を示した。厳密解にはモデル定数および圧力動揺項と変動流速の3重相関項の比からつくられる3つのモデルパラメータが含まれており、これらの値を実験値から直接推定した。推定値は、モデル定数の標準値から計算されるものと一致し、モデル定数の妥当性が検証された。圧力動揺項の3重相関項に対する比は-0.49であった。

Key Words : $k-\varepsilon$ model, turbulence, closure problem

1. 緒 論

工学的問題への応用が最も進んでいる乱流モデルの一つに $k-\varepsilon$ モデルが挙げられる。このモデルは、渦動粘性係数を乱れエネルギーとエネルギー散逸率の2つの乱流特性量を用いて表現するものであり、方程式中に幾つかのモデル定数を含んでいる¹⁾。 $k-\varepsilon$ モデルの有効性は、あらゆる流れ場に対して保証されるものではなく、モデル定数も普遍値と考えることはできない。従って、適用例のない流れ場へ用いる場合、モデルやパラメータの有効性に対して検討を要する²⁾。均質流体中の十分発達した乱流を対象とした $k-\varepsilon$ モデルは特に標準型 $k-\varepsilon$ モデルと呼ばれており、この標準型モデルをベースにして壁面や水表面または浮力による乱れの変形効果を取り入れた拡張型が開発されている^{1),3)}。標準型 $k-\varepsilon$ モデルは、比較的単純な乱流構造をもつ流れ場の実験値に基づいて検定されており、乱れエネルギーの移流と散逸がバランスした一様格子乱流や生成と散逸がバランスした定常な2次元せん断乱流などはその代表的なものである。これ以外の基本的なエネルギーバランスとして、乱れエネルギーの拡散と散逸のつり合いが考えられるが、このような乱れは標準型 $k-\varepsilon$ モデルの試験対象になっておらず、その有効性の詳細は明らかでない。静止流体中における水平格子の鉛直振動によって形成される振動格子乱流は、近似的に平均流がなく、乱れエネルギーの鉛直拡散

と散逸がバランスした場とみなすことができる^{4),5)}。従って、振動格子乱流場へ標準型 $k-\varepsilon$ モデルを適用し、モデル化やモデル定数の有効性について検討することは、乱流モデル構築上重要な意義をもっており、例えば停滞水域の鉛直混合や碎波乱流といった平均流の効果の小さい乱流場の解析へとモデルの適用範囲を拡大する上でも検討されるべき問題である。また、このような単純乱流場へ立ち返ってモデルの基本性能を再検討することは、複雑乱流場におけるモデルの適用限界を議論する上でも重要なことと思われる。

これまでに振動格子乱流へ $k-\varepsilon$ モデルを適用した例として松永他⁵⁾の研究がある。彼らは、標準型 $k-\varepsilon$ モデルの非線形発展方程式を数値積分することによって定常解を求め、その数値解が測定データを良く説明できることを示した。しかしながら、彼らの研究においては、解の性質やモデル定数については検討されていない。

本研究の目的は、振動格子乱流場へ標準型 $k-\varepsilon$ モデルを適用し、解析結果と実験値を比較検討することによって、乱れエネルギーの拡散と散逸がバランスした乱流場に対する標準型 $k-\varepsilon$ モデルの有効性を詳細に検証することである。本論文の構成は以下のようになっている。第2節では、乱れの拡散と散逸がバランスした乱流場に関する非線形 $k-\varepsilon$ 方程式の厳密解を導出し、この厳密解から予測される乱流特性量間の関係を示している。また、厳密解には、モデル定数および圧力動揺項の

変動流速の3重相関項に対する比からつくられる3つのモデルパラメータが含まれており、これらの値を推定する方法を示している。第3節では、実験方法およびデータ解析方法について述べている。第4節では、厳密解と実験値を系統的に比較することによって、モデルの妥当性を検討し、モデルパラメータの値を推定している。第5節では、4節で確定されたパラメータ値を用いた厳密解と実験値の鉛直分布特性の適合性を示している。第6節では、従来採用されてきた振動格子乱流の経験則について議論している。第7節は本論文の結論となっている。

2. 乱れの拡散と散逸がバランスした乱流場に関する標準型 k - ε モデルの厳密解

静止流体中において水平格子を鉛直振動させた際に発生する乱流は近似的に平均流がなく、乱れの統計量は水平面内において一様等方で、鉛直方向にのみ分布をもつ乱れ場とみなすことができる。この振動格子乱流に対し標準型 k - ε モデルを適用する。以後、標準型 k - ε モデルを単に k - ε モデルと呼ぶ。今、定常状態を考えると、 k -方程式、 ε -方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right\} - \varepsilon &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \right\} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} &= 0 \quad (1) \\ \nu_t &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

ここで、 k は乱れエネルギー、 ε はエネルギー散逸率、 ν_t は渦動粘性係数、そして z は格子振動中心から鉛直上向きに取られた座標である。また、 σ_k 、 σ_ε 、 C_2 および C_μ はモデル定数である。

格子振動によって乱れエネルギー k_0 とエネルギー散逸率 ε_0 をもった乱れが $z=0$ において定常的に形成されていると考えよう。この場合、境界条件は、

$$\begin{aligned} k &= k_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \quad \text{at } z=0 \quad (2) \\ k &\rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、モデル定数以外のパラメータを含まない無次元モデル解を得るために境界値 k_0 、 ε_0 を用いて方程式系を無次元化する。無次元諸量は、次式で定義されている。

$$\hat{k} = k/k_0, \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0, \quad \hat{z} = z/(k_0^3 \varepsilon_0^{-2})^{1/2} \quad (3)$$

$$\hat{\nu}_t = \nu_t / (k_0^2 \varepsilon_0^{-1}) = C_\mu \hat{k}^2 / \hat{\varepsilon}$$

無次元化された式(1)と式(2)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{z}} \left\{ \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{d\hat{k}}{d\hat{z}} \right\} - \hat{\varepsilon} &= 0 \\ \frac{d}{d\hat{z}} \left\{ \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\hat{z}} \right\} - C_2 \frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{k}} &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\hat{\nu}_t = C_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\varepsilon}}$$

$$\hat{k} = 1, \quad \hat{\varepsilon} = 1 \quad \text{at } \hat{z} = 0$$

$$\hat{k} \rightarrow 0, \quad \hat{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{as } \hat{z} \rightarrow \infty$$

式(4)の非線形方程式系を解くに当って、鉛直座標 \hat{z} の代りに渦動粘性係数でスケールされた新しい座標系 $\hat{\zeta}$ を導入しよう。 \hat{z} 座標系から $\hat{\zeta}$ 座標系への変換は次式のように定義されている。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\zeta}}{d\hat{z}} &= \frac{\sigma_k}{\hat{\nu}_t} > 0 \quad \text{for } 0 < \hat{z} < \infty \\ \hat{\zeta} &= \zeta_0 \quad \text{at } \hat{z} = 0 \\ \hat{\zeta} &\rightarrow \infty \quad \text{as } \hat{z} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $\zeta_0 \equiv \sqrt{\frac{6C_\mu}{C_\mu}}$ である。

式(5)を用いて式(4)を $\hat{\zeta}$ 座標系へ変換すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{k}}{d\hat{\zeta}^2} &= \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \right) \hat{k}^2 \\ \frac{d^2 \hat{\varepsilon}}{d\hat{\zeta}^2} &= \left(\frac{C_2 C_\mu \sigma_\varepsilon}{\sigma_k^2} \right) \hat{k} \hat{\varepsilon} \\ \hat{k} &= 1, \quad \hat{\varepsilon} = 1 \quad \text{at } \hat{\zeta} = \zeta_0 \\ \hat{k} &\rightarrow 0, \quad \hat{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{as } \hat{\zeta} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

となる。式(6)に関する \hat{k} および $\hat{\varepsilon}$ の厳密解は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \left(\frac{\zeta_0}{\hat{\zeta}} \right)^2 \\ \hat{\varepsilon} &= \left(\frac{\zeta_0}{\hat{\zeta}} \right)^{3+r} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 r は次式を満足しなければならない。

$$(r+3)(r+4) = \frac{6C_2 \sigma_\varepsilon}{\sigma_k}$$

従って、

$$r = -\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6C_2 \sigma_\varepsilon}{\sigma_k}} \quad (8)$$

となる。

式(5)で与えられた定義より、

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\zeta}}{d\hat{z}} &= \frac{\sigma_k}{\hat{\nu}_t} = \frac{\sigma_k}{C_\mu} \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}^2} \\ &= \frac{\zeta_0^2}{6} \left(\frac{\zeta_0}{\hat{\zeta}} \right)^{r-1} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。式(9)を積分して、次式のように $\hat{\zeta}$ と \hat{z} の関係式を得る。

$$\left(\frac{\hat{\zeta}}{\zeta_0} \right)^r = \frac{\hat{z}}{z_0} + 1 \quad (10)$$

ここで、 $z_0 = \frac{6}{r\zeta_0}$ である。

式(7)と式(10)より、振動格子乱流の乱流特性量

の厳密解が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^2 = \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)^{-\frac{2}{r}} \\ \hat{\varepsilon} &= \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^{3+r} = \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)^{-\frac{3+r}{r}} \\ \hat{q} &\equiv -\frac{\partial_i}{\sigma_k} \frac{d\hat{k}}{d\hat{z}} = \frac{2}{\zeta_0} \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^3 = \frac{2}{\zeta_0} \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)^{-\frac{3}{r}} \\ \hat{\nu}_i &= C_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\varepsilon}} = C_\mu \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^{1-r} = C_\mu \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)^{-\frac{1-r}{r}} \\ \hat{l}_i &\equiv \frac{\hat{k}^{3/2}}{\hat{\varepsilon}} = \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^{-r} = \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)\end{aligned}\quad (11)$$

ここで、 \hat{q} は乱れエネルギーのトータル鉛直フラックス、 \hat{l}_i は \hat{k} と $\hat{\varepsilon}$ で定義される乱れの代表長さスケールである。

$q (= \hat{q} k_0^{3/2})$ は、振動格子乱流場の場合、次式のように定義される。

$$q = \frac{1}{2} \overline{(2u'(z)^2 + w'(z)^2)w'(z)} + \frac{1}{\rho} \overline{p'(z)w'(z)} \quad (12)$$

ここで $u'(z)$ 、 $w'(z)$ はそれぞれ変動流速の水平方向および鉛直方向成分を示し、 $p'(z)$ 、 ρ はそれぞれ変動圧力および作業流体の密度である。通常、測定可能なのは右辺第1項の変動流速の3重相関項のみであり、第2項の圧力動揺項がどの程度の大きさをもつかは一般に不明である。ここで、3重相関項を F とし、この量を k - ε モデルで表現しよう。今、圧力動揺項が γF で表現できるとする。ここで、 γ は定数で、圧力動揺項の F に対する割合である。 γ を用いて式 (12) のトータル・フラックスを表わせば、

$$q = (1 + \gamma)F \quad (13)$$

となる。従って、式 (11) の第3式および式 (13) より、無次元3重相関項 \hat{F} は次式のようになる。

$$\hat{F} = \left(\frac{2}{\zeta_0'}\right) \left(\frac{\zeta_0}{\bar{\rho}}\right)^3 = \left(\frac{2}{\zeta_0'}\right) \left(\frac{\hat{z}}{z_0} + 1\right)^{-\frac{3}{r}} \quad (14)$$

ただし、 $\zeta_0' = (1 + \gamma)\zeta_0$ である。今後、本論文中でフラックスといった場合、変動流速の3重相関 F のことを示す。

以上より、振動格子乱流の k - ε モデル解は、パラメータ r 、 ζ_0 、 ζ_0' を決定すれば完全に記述されることがわかる。式 (11)、式 (14) より、乱流特性量の間には次の関係がある。

$$\hat{\varepsilon} = \hat{k}^{\frac{3+r}{2}}, \quad \hat{F}^2 = \left(\frac{2}{\zeta_0'}\right)^2 \hat{k}^3 \quad (15)$$

式 (15) の関係を用いれば、実験データから、直接 r 、 ζ_0' が推定可能である。また、式 (11) の第5式より、 l_i の z 方向の分布から z_0 が推定できる。 z_0 がわかれば式 (10) の関係を用いて ζ_0 を推定可能である。以上のように、式 (15) の関係を実験値から検証できれば、 k - ε モデルが振動格子乱流のような乱れの拡散と散逸がバラ

表—1 実験条件および境界値 k_0 、 ε_0

Run No	f (Hz)	S (cm)	v (cm/s)	S/M	Re	k_0 (cm ² /s ²)	ε_0 (cm ² /s ³)	symbol
1	4.0	4.0	1.51×10 ¹	0.8	4.24×10 ²	42.0	50.0	○
2	6.0	4.0	1.65×10 ¹	0.8	5.82×10 ²	100	220	●
3	2.0	8.0	1.72×10 ¹	1.6	7.44×10 ²	64.0	57.0	△
4	4.0	4.0	6.97×10 ²	0.8	9.18×10 ²	56.0	91.0	▲
5	2.0	8.0	7.52×10 ²	1.6	1.70×10 ³	94.0	132	□
6	3.0	4.0	1.18×10 ²	0.8	4.07×10 ²	67.0	117	■
7	6.0	4.0	1.00×10 ²	0.8	9.60×10 ²	333	1397	◇
8	2.0	8.0	1.00×10 ²	1.6	1.28×10 ³	170	338	◆
9	2.0	4.0	1.15×10 ²	0.8	2.78×10 ²	28.0	20.0	▣
10	4.0	4.0	1.15×10 ²	0.8	5.57×10 ²	153	341	田
11	5.0	4.0	1.15×10 ²	0.8	6.96×10 ²	250	731	⊗
12	1.5	8.0	1.15×10 ²	1.6	8.35×10 ²	95.0	132	+
13	2.0	8.0	1.15×10 ²	1.6	1.11×10 ³	172	315	×
14	3.0	8.0	1.15×10 ²	1.6	1.67×10 ³	400	1300	※

バラした乱流場に対しても有効であることになる。また、 r と ζ_0 の値からモデル定数の妥当性がわかり、 ζ_0 と ζ_0' から圧力動揺項と3重相関項の比 γ を推定できることになる。

3. 実験方法およびデータ解析

乱れエネルギー k 、エネルギー散逸率 ε および乱れエネルギーの鉛直フラックス F の実験値には、松永他⁵⁾ のデータを用いた。ここで、松永他の実験方法の概略について述べる。実験には、長さ1.0 m、深さ0.4 mの水槽 (A) と縦と横の長さが0.25 m、深さ0.6 mの正方形断面水槽 (B) の2つが用いられた。水平格子は、正方角柱で構成されており、棧の幅 d は1.0 cm、格子のメッシュ間隔 M は5.0 cmであった。この水平格子を鉛直振動させることによって乱れを発生させた。

A 水槽においては、2方向V型ホットフィルム流速計を台車に取り付け、それを水平走行させることによって乱れを測定した。同一水平面内における流速測定を5回ずつ繰り返し、乱れの統計量は5回の平均を取ることで算定された。測定は3.5 cm ≤ z ≤ 24.0 cm の範囲で行い、乱れ諸量の鉛直分布を求めた。乱れエネルギー k と乱れエネルギーフラックス F は、水平面内における乱れの等方向性を仮定して、次式より求められた。

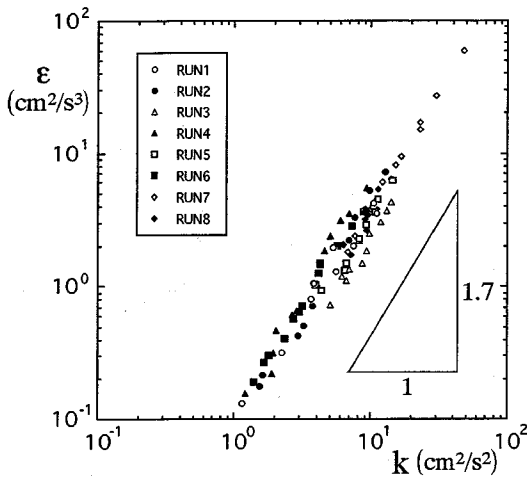
$$k(z) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} \overline{(2u'(z)^2 + w'(z)^2)}_n \quad (16)$$

$$F(z) = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} \overline{[(2u'(z)^2 + w'(z)^2)w'(z)]}_n$$

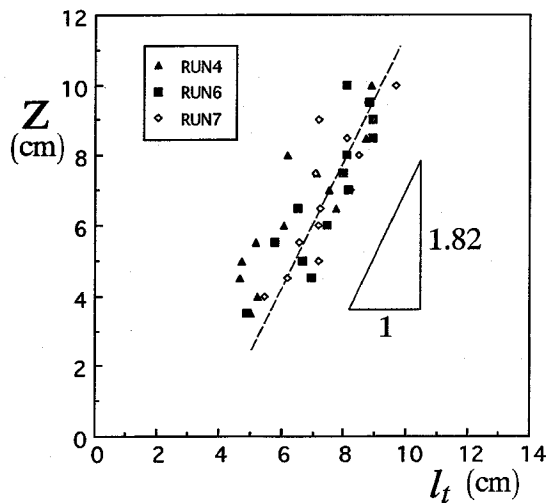
ここで、 $-$ は、流速計がトラバースした水平線に沿った平均値を示している。エネルギー散逸率は、小松他⁶⁾ によって提案された慣性域の波数スペクトルの普遍式

$$F_w(\bar{k}) = 0.627 \varepsilon^{2/3} \bar{k}^{-5/3} \quad (17)$$

から算定した。ここで、 F_w は w' の水平方向波数のスペクトルであり、 \bar{k} は水平方向の波数である。波数スペク



図一 乱れエネルギーとエネルギー散逸率の関係



図二 代表長さスケールの鉛直分布

トルは、周波数スペクトルを台車の走行速度を用いて波数空間へ変換することによって求められた。B水槽においては、2台のレーザー流速計を空間に固定することによって、乱れの長時間測定を行った。乱れ諸量の鉛直分布を得るためにレーザー流速計を0.5 cmまたは1.0 cmの間隔で鉛直方向に移動させた。定点観測では波数スペクトルは得られないので、レーザー流速計による測定ではエネルギー散逸率 ε は算定されていない。表一に実験条件が示されている。Run No. 1~8では、ホットフィルム計測が行われ、Run No. 9~14ではレーザー計測が行われた。表中において、 f は格子振動の振動数、 S は振幅を示す。 ν は作業流体の動粘性係数であり、 Re は fS^2/ν で定義された格子レイノルズ数である。 k_0 、 ε_0 については第5節で説明する。

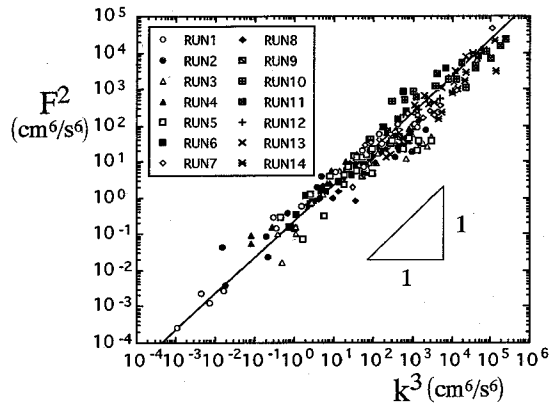
4. k - ε モデルの有効性の検証とパラメータの推定

図一に、 k と ε の関係を示す。この図より、 k と ε の間には、広範囲の実験条件に渡って式(15)の第1式で示されるようなべき乗の関係が成立していることがわかる。 ε は k の1.7乗に比例しており、このことは式(15)の第1式より、 r の値が0.4を取ることを意味している。 k - ε モデルにおけるモデル定数の標準値は、それぞれ

$$\sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3, C_2=1.92, C_\mu=0.09 \quad (18)$$

である¹⁾。これらの値と式(8)より、標準型 k - ε モデルにおける r は0.402であり、振動格子実験から直接推定された値と良く一致する。

図二に、算定された k と ε を用いて式(11)の第5式より計算される乱れの代表長さスケール l_t の鉛直分布が示されている。 l_t のデータは広範囲の実験条件にま



図三 乱れエネルギーと乱れエネルギーフラックスの関係

たがっており、そのため全データをプロットした場合、他の条件のデータ同士が交錯して z_0 値の推定が難しくなるので、ここでは代表的な3つのデータをプロットすることにし、全データに対する適合性は5節で検証する。 l_t は、 z に対してほぼ線形的に増加しており、 k - ε モデル解と定性的に一致することがわかる。図中の点線の勾配は、1.82であり実験値の勾配をほぼ表現している。これより、 $z_0 \approx 1.82$ となる。従って、 $r \approx 0.4$ であることを考慮すれば、式(10)より、 $\zeta_0 \approx 8.24$ となる。式(18)のモデル定数の標準値から決まる値は $\zeta_0 \approx 8.16$ であり、実験データの推定値とほぼ一致する。

図三に、 F^2 と k^3 の関係を示す。式(15)から予想されるように、 F^2 は広範囲に渡って k^3 と線形的な関係にあることがわかる。このことは、 k - ε モデルの妥当性を示唆している。図中の実線は測定データにおける F^2 と k^3 の関係を近似したものであり、 $k^3=1$ における切

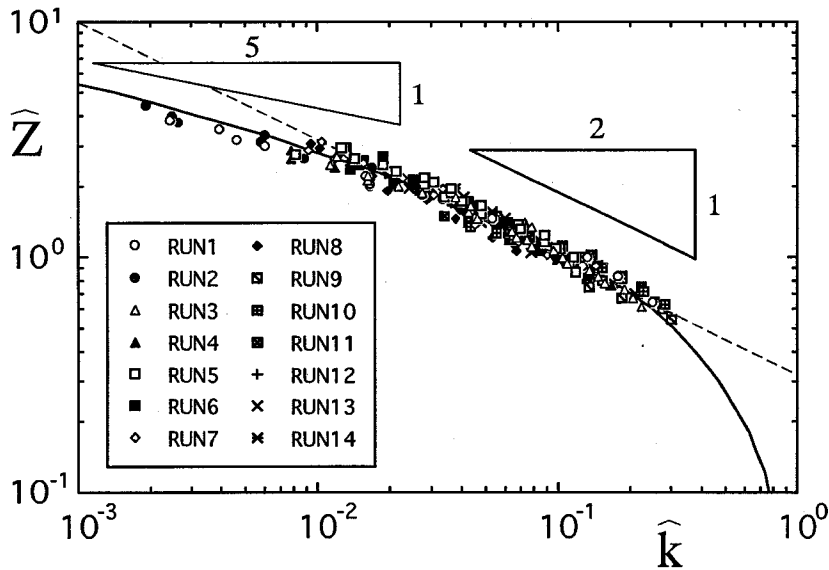


図-4 乱れエネルギーの実験値と厳密解の適合性

片を読み取ることによって、 ζ_0' を推定できる。 ζ_0' は4.17であり、 $\zeta_0 \approx 8.24$ より $\gamma = -0.49$ となることから、圧力動揺項は3重相関項の約49%にも及ぶことになる。これは、一般に考えられているものよりもかなり大きな値を取る。これが、振動格子乱流特有の値なのかどうかについてはさらに検討が必要である。また、 $\gamma < 0$ である。これは、乱れエネルギーと圧力動揺が負の相関関係にあることを意味しており、ベルヌーイの定理から考えて、物理的に妥当であると思われる。

以上の比較により、 k - ε モデルの厳密解から導かれた式(15)の関係は、実験データから直接的に検証され、乱れエネルギーの拡散と散逸がバランスした乱流場における k - ε モデルの妥当性が示された。また、モデル定数の標準値は、この乱流場においても有効であることがわかった。検証に用いた実験値には作業流体の動粘性係数を水の17倍程度に変えたものもあり、この程度の高粘性流体に対しても k - ε モデルが適用可能であると言える。

5. 厳密解と実験値の鉛直分布特性の適合性

前節において振動格子乱流に対する k - ε モデルの有効性が検証された。そこで本節では厳密解を実験値に適合させて、その鉛直分布特性を検討しよう。このことは、振動格子乱流の乱れ特性解明の立場からも重要なことと思われる。

k の実験値を z に対して両対数紙上でプロットし、式(11)の第1式の \hat{k} の厳密解($\gamma = 0.4$, $\zeta_0 = 8.24$)と良

く適合するように重ね合わせ、式(3)を使えば、無次元化に用いた境界条件 k_0 と ε_0 を算定することができる。 F と ε の実験値に対しても同様に、それぞれ \hat{F} ($\zeta_0' = 4.17$)、 $\hat{\varepsilon}$ に適合させることによって k_0 と ε_0 を算定できる。当然これら3つの特性量の適合において得られた k_0 と ε_0 の値は互いに一致しなければならない。この条件を満たすように、実験値と厳密解の適合を試行錯誤的に繰り返した。ただし、レーザー流速計の測定においては、 ε は算定されていないので、 k と F による最適適合から k_0 と ε_0 を算定した。算定された k_0 、 ε_0 は、表-1中に示されている。

乱流特性量の実験値を k_0 、 ε_0 を用いて無次元化すれば、厳密解との適合性を示すことができる。図-4, 5, 6は、それぞれ、 k 、 ε 、 F の実験値を表-1に示された k_0 、 ε_0 を用いて無次元化し、重ね合わせにおける厳密解と実験値の適合性を示したものであり、図中の実線が厳密解を示している。これらの図から、3つの特性量の実験値は、広範囲の格子レイノルズ数に対して、厳密解に極めて良く適合していることがわかる。 z が十分大きくなってくと乱れエネルギーは z の-5乗に、散逸率は z の-8.5乗に、そして乱れエネルギーフラックスは z の-7.5乗に比例して減衰することが厳密解から予測されているが、実験値は広範囲の条件に渡ってこれを支持している。

ここで、図-4, 5, 6を式(10)を用いて ζ 座標系の図に変換し、厳密解と実験値の ζ 系における適合性についても参考までに示しておこう。図-7, 8, 9は、それぞれ、 ζ 座標系における乱れエネルギー、エネルギー

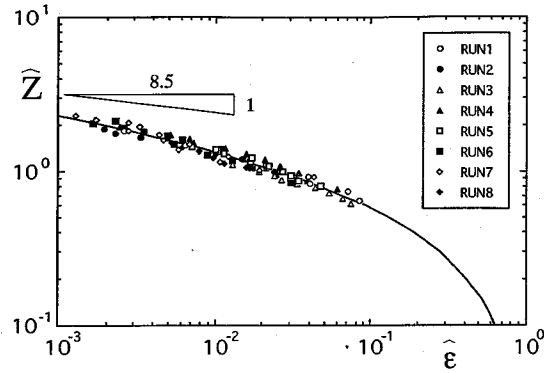


図-5 エネルギー散逸率の実験値と厳密解の適合性

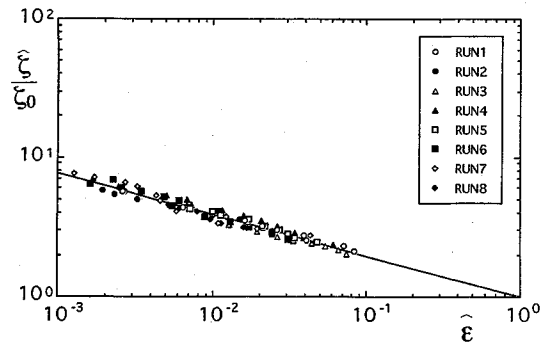


図-8 ζ 座標系におけるエネルギー散逸率の実験値と厳密解の適合性

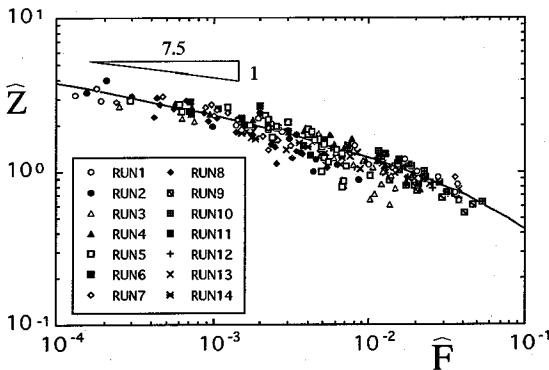


図-6 乱れエネルギーフラックスの実験値と厳密解の適合性

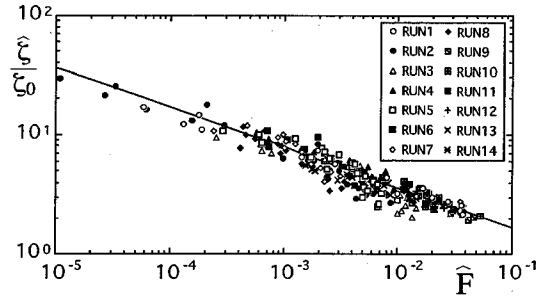


図-9 ζ 座標系における乱れエネルギーフラックスの実験値と厳密解の適合性

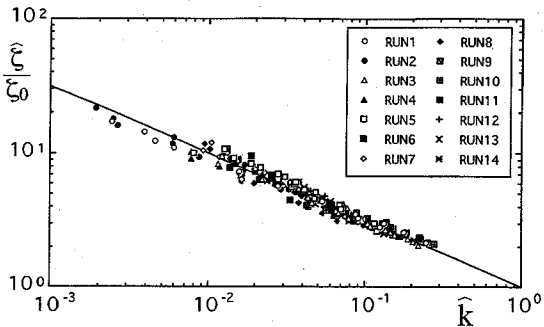


図-7 ζ 座標系における乱れエネルギーの実験値と厳密解の適合性

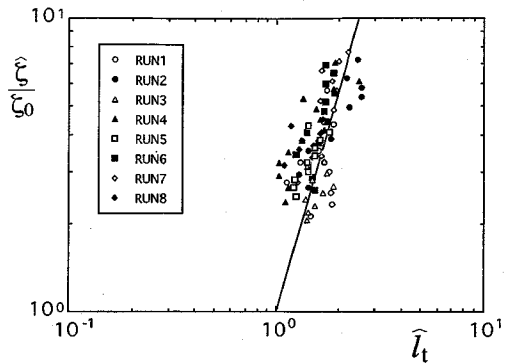


図-10 ζ 座標系における代表長さスケールの実験値と厳密解の適合性

散逸率および乱れエネルギーフラックスの厳密解と実験値の適合性を示したものである。 \widehat{k} 、 $\widehat{\epsilon}$ および \widehat{F} はそれぞれ $\widehat{\zeta}$ の -2 乗、 -3.4 乗、 -3 乗に比例して減衰する。図-10は、 ζ 座標系における乱れの代表長さスケールの厳密解と実験値の適合性を示したものである。多少データのバラツキが見られるが、分布の適合性から4節において評価された z_0 の値が妥当であることがわかる。乱れの代表長さスケールは、 z 座標系では z に対して線

形的に、 ζ 座標系では $\widehat{\zeta}$ の 0.4 乗に比例して増加する。

6. 厳密解と従来の経験則との比較

振動格子乱流の乱れの減衰則に関しては、多くの研究者に支持されている経験則がある。ここで、本研究で得られた厳密解と経験則の整合性について検討しよう。振動格子乱流場の乱れに関しては、乱れ強度と積分長さスケールについての経験則が与えられており、Hopfinger

& Toly⁷⁾, Ura et al.⁸⁾, De Silva & Fernando⁹⁾らが提案した次のタイプのものが最も広く支持されている。

$$\begin{aligned} u &= AfS(S/M)^{\frac{1}{2}}(z/M)^{-1} \\ w &= BfS(S/M)^{\frac{1}{2}}(z/M)^{-1} \\ l &= \beta z \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 u , w はそれぞれ、水平、鉛直方向の乱れ強度、 l は積分長さスケールで、 A , B , β は経験定数である。式 (19) から乱れエネルギーを評価すると、

$$k = \frac{1}{2}(2A^2 + B^2)f^2S^2(S/M)^{\frac{1}{2}}(z/M)^{-2} \quad (20)$$

となる。従って、経験則では k は z の -2 乗に比例して減衰することになり、先の厳密解の -5 乗則と矛盾している。式 (19) で示される乱れ強度の z 依存性は、渦動粘性係数が z に依らず空間的に一定であるという仮定と $l \sim z$ という経験的關係を用いることにより導くことができる⁷⁾、このことが厳密解と経験則のべき指数の差異の原因になっているものと思われる。確かに、この仮定の下で $k-\varepsilon$ 方程式の解を求めた場合、 k が z の -2 乗で減衰する解が得られる。実際、上記の仮定に従って $k-\varepsilon$ 方程式を解いてみよう。今、渦動粘性係数が z に依存しないことから、

$$\frac{\nu_t}{\sigma_k} = A_0 \quad (21)$$

とする。ここで、 A_0 は定数で、場の乱れの大きさを規定する Long^{4),10)}によって提唱されたアクションに相当する量である。これより、 k と ε の関係は次のように決まる。

$$\varepsilon = \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k A_0} \right) k^2 \quad (22)$$

従って、式 (1) の第 1 式、式 (21)、(22) より、 $k-$ 方程式は、

$$\frac{d^2 k}{dz^2} = \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k A_0^2} \right) k^2 \quad (23)$$

となる。 l が $z=0$ で 0 になるとすれば、 k はそこで ∞ に発散することになる。よって境界条件は、

$$k \rightarrow \infty \text{ as } z \rightarrow 0 \quad (24)$$

$$k \rightarrow 0 \text{ as } z \rightarrow \infty$$

のように表わせる。式 (23) を式 (24) の条件のもとで解けば、 k の解が求められる。その k を式 (22) へ代入すれば ε の解を求めることができる。従って、経験則の仮定のもとでの k と ε の厳密解は、次式のようになる。

$$k = \left(\frac{6\sigma_k A_0^2}{C_\mu} \right) z^{-2} \quad (25)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{6^2 \sigma_k A_0^3}{C_\mu} \right) z^{-4}$$

当然、この解は式 (1) の ε -方程式を満足しなければならない。式 (25) を ε -方程式へ代入すると、次のよ

うな関係がモデル定数間の制約条件として導かれる。

$$\frac{20}{6} = \frac{C_2 \sigma_\varepsilon}{\sigma_k} \quad (26)$$

また、乱れの代表長さスケール l_t は、定義より、

$$l_t = \left(\frac{\sigma_k}{6C_\mu} \right)^{\frac{1}{2}} z \quad (27)$$

となる。このように、 $k-\varepsilon$ モデルは、 k が z の -2 乗で減衰し、長さスケールが z に比例するといった経験則の解を満たしている。従って、従来支持されてきた経験則は、 $\nu_t = \text{一定}$ と仮定し、乱れが $z=0$ で発散する場合の $k-\varepsilon$ 方程式の解に相当するものと見なすことができる。すなわち、経験則と本研究で示された厳密解との違いは、渦動粘性係数の z 依存性の取り扱いに起因するものであると結論されたことになる。無論、実際には ν_t は z と共に必ず減衰することから、経験則の仮定はかなり非現実的なものと言わざるを得ない。また、 $z=0$ における乱れも現実において有限値を取るはずである。モデル定数の標準値が式 (26) の制約条件を満足していないのもそのことを示唆している。図-4 中の点線は、式 (25) の第 1 式の k の解を k_0 , ε_0 で無次元化し、実験値と最も適合するように $A_0/(k_0^2 \varepsilon_0^{-1})$ を決定して、式 (11) の厳密解と比較したものである。この際、 $A_0/(k_0^2 \varepsilon_0^{-1})$ は 0.0384 であった。この図より、 ν_t の z 依存性を考慮した厳密解は、従来の経験則よりも乱流構造を正確に表現したものになっていることがわかる。

7. 結 論

振動格子乱流場へ $k-\varepsilon$ モデルを適用し、乱れエネルギーの拡散と散逸がバランスした乱流場における $k-\varepsilon$ モデルの有効性を調べた。結果を要約すると以下のようになる。

- 1) 乱れエネルギー、エネルギー散逸率、乱れエネルギーフラックス、渦動粘性係数および乱れの代表長さスケールに関する $k-\varepsilon$ モデルの厳密解が得られた。
- 2) 厳密解と実験値との比較から、モデルの妥当性を検証した。また、モデル定数からつくられるモデルパラメータを実験値から直接推定し、その結果、モデル定数の標準値が、この乱流場に関しても有効であることがわかった。
- 3) 圧力動揺の変動流速の 3 重相関に対する割合を見積もった結果、およそ 49% にも及ぶことがわかった。また、圧力動揺と 3 重相関は負の相関関係にある。
- 4) 振動格子乱流の鉛直分布特性は、 $k-\varepsilon$ モデルによって良く記述されることがわかった。乱れエネルギーは z が十分大きい領域では z の -5 乗に比例して減衰し、従来の経験的に評価された -2 乗則とは異なる。これは経験則では、渦動粘性係数が z に関して

一定と仮定されていることが原因になっている。本研究の厳密解はより一般的な乱流場について得られたものであり、経験則よりも乱流構造を正確に表現している。

謝辞：本研究を行うにあたり、九州大学名誉教授椿東一郎先生には貴重なご助言を頂いた。また、九州大学工学部柴田敏彦氏には、実験およびデータ解析に際して多大なご助力をお願いした。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Rodi, W. : Turbulence models and their application in hydraulics, State-of-the-Art Paper IAHR, 1980.
- 2) 標 宣男, 鈴木正昭, 石黒美佐子, 寺坂春夫: 数値流体力学, 朝倉書店, 1994.
- 3) 瀬津家久, 中川博次: 修正 $k-\varepsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, No. 387/II-8, pp.125-134, 1987.
- 4) Long, R.R. : Theory of turbulence in a homogeneous fluid induced by an oscillating grid, *Phys. Fluids*, Vol.21, pp.1887-1888, 1978.
- 5) 松永信博, 杉原裕司, 小松利光: 振動格子によって発生する乱れの特性, ながれ, Vol.11, No.4, pp.254-265, 1992.
- 6) 小松利光, 松本泰司, 柴田敏彦, 椿東一郎: 平衡波数領域における乱れエネルギーのスペクトル特性, 土木学会論文集, No.405/II-11, pp.109-118, 1989.
- 7) Hopfinger, E. J. and Toly, J.-A. : Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interface, *J. Fluid Mech.*, Vol.78, pp.155-175, 1976.
- 8) Ura, M., Tsubaki, T., Matsunaga, N. and Namikawa, T. : A turbulence-based expression for the entrainment coefficient for two-layered stratified flows, *J. Hydraul. and Hydraul. Eng., JSCE*, Vol.5, No.1, pp.27-37, 1987.
- 9) De Silva, I. P. D. and Fernando, H.J.S. : Some aspects of mixing in a stratified turbulent patch, *J. Fluid Mech.*, Vol.240, pp.601-625, 1992.
- 10) Long, R. R. : A theory of mixing in a stably stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, Vol.84, pp.113-124, 1978.

(1994.12.15 受付)

VALIDITY OF THE STANDARD $k-\varepsilon$ MODEL FOR DIFFUSION-DISSIPATION BALANCED TURBULENCE

Yuji SUGIHARA, Nobuhiro MATSUNAGA, Akira MASUDA
and Toshimitsu KOMATSU

The validity has been investigated of the standard $k-\varepsilon$ model for oscillating-grid turbulence, whose stationary field is in balance between the diffusion of the turbulent energy and the dissipation rate of the energy. The nonlinear $k-\varepsilon$ equations give the exact solutions for the turbulent energy, the dissipation rate of the energy, the vertical flux of the energy, the eddy viscosity and a characteristic length scale. The experimental data satisfy very well the relations expected theoretically between the turbulence quantities. It shows the standard $k-\varepsilon$ model to be applicable to the diffusion-dissipation balanced turbulence. The exact solutions include three model parameters. Their values based on the experimental data show that the model constants accepted widely in the $k-\varepsilon$ model are valid, and that the ratio of the pressure-velocity correlation to the triple correlation between fluctuating velocities takes -0.49 . The exact solutions can describe the turbulent properties much better than the empirical relationships adopted by many researchers.