

# 斜面下流端から発生する水路群について

泉 典洋<sup>1</sup>・Gary Parker<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D. 東京工業大学助手 工学部土木工学科 (〒152 東京都目黒区大岡山二丁目12-1)

<sup>2</sup>Ph.D. Professor, University of Minnesota, St Anthony Falls Hydraulic Laboratory (Mississippi River at 3rd Avenue SE, Minneapolis, Minnesota 55414, USA)

斜面下流端のステップ近傍で発生したガリは上流側へ向かって水路へと発達しながら複雑なチャンネルネットワークを形作っていく。本研究では発生初期のガリの発達メカニズムを調べるために、下流端にステップが存在する緩やかな一様勾配斜面を考え、そのステップにサイン形状を有する斜面方向の微小擾乱を与えたときの斜面上の流速分布及び水面形状を浅水流方程式を特異摂動法を用いて解くことによって求めた。それによると擾乱の影響が顕著な下流端近傍の薄い層内では降雨およびレイノルズ応力の影響は無視できることがわかった。また計算によって、上流方向にくぼんだ部分に流れが集中する様子を再現でき、それらの結果に限界掃流力を用いた水路の初期形成仮説を適用した結果、(水深/斜面勾配)程度のオーダーの卓越波長が得られた。

**Key Words :** gully, channelization, self-organization, perturbation analysis

## 1. はじめに

地表上に降り注いだ雨水は、地表を侵食しながら標高のより低い場所へと下流していく。下流へ行くにつれて流量を増した流れは、所々に集まりながらその場所を侵食し、局所的に標高の低い場所を形成する。侵食によって標高が低下した場所には更なる流れの集中が生じ、いつしか流れが定常的に通過する場所が発生する。我々が通常河川と呼んでいる水路の誕生である。誕生したばかりの水路群の幾何形状は、単純なものに過ぎない。しかし時間の経過とともに、標高の低下(地表面の侵食)と流れの集中という二つの相互作用によって、樹枝や血管網にも似た複雑な幾何形状を有するチャンネルネットワークへと発達していく。この様にしてチャンネルネットワークは流水と地表との相互作用によって自律形成されるのである。

Schumm<sup>1)</sup>らは、従来の研究を整理し、代表的なチャンネルネットワークの発生及び発達モデルとして次の三つを挙げている。

- (a) 最初に表面からの侵食によって斜面上の下流方向に幾つもの平行なリルが発生し、次にそれと直角方向のリルが発生する。それらの過程を繰り返しながら、より複雑なチャンネルネットワークへと発達していく<sup>2)</sup>(図-1-a)。
- (b) 下流端に生じたガリが、上流側へ成長、進展しながら分岐を繰り返して全流域を覆い、樹枝状のパターンを形成していく<sup>3), 4)</sup>(図-1-b)。
- (c) 最初に主要な水路が表面からの侵食によって形成され、それに引き続いて幹から枝が伸びていく様に

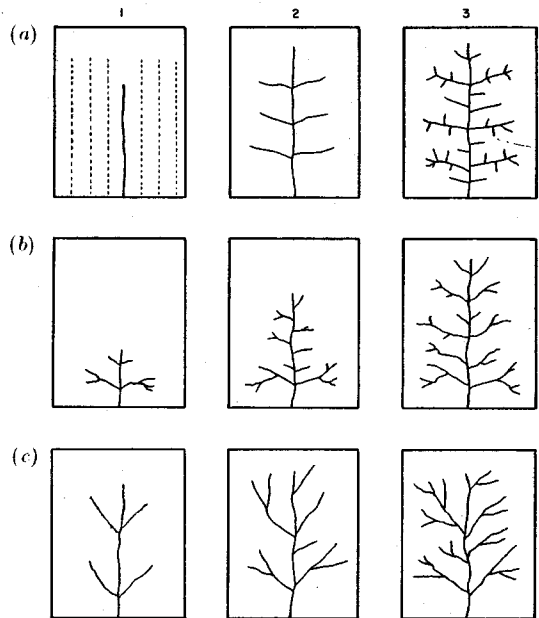


図-1 水路網発達モデル (a) 下流方向に平行なリルとそれに直角方向のリルによって複雑な水路網を形成していく。(b) 下流端のガリが上流側へ進展しながら複雑な水路網を形成していく。(c) 主要な水路が最初に形成され、その後の支流の発達により複雑な水路網が形成されていく。Schumm et al.<sup>1)</sup>より引用

小さな水路が発達し、より複雑な樹枝状のパターンへと発展していく<sup>5)</sup>(図-1-c)。

Schumm<sup>1)</sup>らは、上記三つのモデルは a と b の二つのタ

イブに帰着させることができると述べている。水路化が地表面から発生する  $a$  のモデルと、下流端から発生する  $b$  のモデルを用いれば、 $c$  はそれら二つの組み合わせとして表すことが可能というのである。このように考えるとモデル  $a$ 、 $b$  の二つのタイプの形成メカニズムが明らかになれば、全てのチャンネルネットワークの形成過程が説明できることになる(もっともこれは表面流によって発達するチャンネルネットワークの形成過程に限っての話であり、表面流の他にも地下水湧出によって発達するチャンネルネットワークも存在する<sup>6), 7)</sup>).

本邦における水路網形成に関する研究は、1970年頃から芦田、澤井を中心に行われてきたが<sup>8)~11)</sup>、ここではその中から澤井・芦田<sup>10)</sup>および澤井<sup>11)</sup>の研究について触れておこう。澤井・芦田<sup>10)</sup>は粘性土流路の安定横断面形状を理論的に導き、その妥当性を実験によって確認している。さらに横断面形状の安定性という観点から流路の分裂条件を求めているが、斜面上に形成される水路間隔をこの分裂条件によって説明するには至っていない。澤井<sup>11)</sup>は降雨によって粘性土斜面上に形成される水路網の詳細な実験を行い、流路の合体過程の数値シミュレーションを行っている。シミュレーションは合体過程の特性を部分的に再現し得たものの、未だ完成されたものとは言い難い。彼らの研究は、斜面表面から発生する水路を取り扱っている点でモデル  $a$  に相当していると考えられる。

著者らは文献 12), 13), 14)(以下前報と呼ぶ)で上流側から(斜面表面から)発生する水路群の形成間隔を浅水流方程式と perturbation analysis を用いた物理モデルによって論じたが、これも上記の三つの発生モデルの中の  $a$  に相当している。

本研究ではモデル  $a$  の対極に位置するモデル  $b$  を想定し、下流端に発生するガリが水路群へと発達していくモデルを構築することを試みる。具体的には、下流端にステップを有する斜面を考え、発生初期におけるガリをステップ上に与えられたサイン型の斜面方向擾乱によってモデル化する。さらに斜面上を流れるシートフローの流速分布及び水面形状を、擾乱の振幅を微小パラメータとした摂動法の手法を用いて求め、文献 13), 14) で提案した、限界掃流力を用いた水路の初期形成仮説を用いて斜面下流端における水路群の形成間隔の予測を試みる。

## 2. ガリの発達モデル

水路群の形成機構は斜面構成材料の力学的な性質によって次の二つに大別される。一つは非粘着性の土砂の場合に発生する土砂輸送による水路形成であり、地

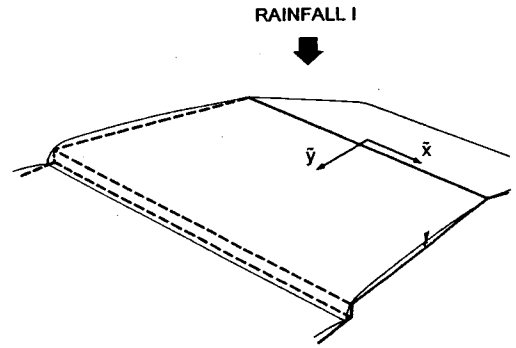


図-2 本モデルで想定する斜面形状

表面高さ  $\tilde{\eta}_b$  は次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{\eta}_b}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1-\lambda_p} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}}. \quad (1)$$

ここで  $\tilde{t}$  は時間、 $\lambda_p$  は空隙率、 $\tilde{\mathbf{q}}$  は掃流砂ベクトル、 $\tilde{\nabla}$  は斜面と平行な平面上での divergence を表している。粘性土砂の場合、水路は侵食によって形成され、その場合の地表面高さ  $\tilde{\eta}_b$  の時間変化は次式によって表される。

$$\frac{\partial \tilde{\eta}_b}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1-\lambda_p} E. \quad (2)$$

ここで  $E$  は侵食量であり、通常境界剪断力の関数として表される。本研究では前報と同様に、斜面は一樣な粘性土によって構成されているものとし、水路群は侵食によって形成されるものとする。したがって地表面高さの時間変化は式 (2) で表されるものとする。  $E$  としては、限界掃流力の概念を用いた次の表式を採用する。

$$E = \begin{cases} 0, & \tilde{\tau} \leq \tilde{\tau}_{th} \\ E(\tilde{\tau}), & \tilde{\tau} > \tilde{\tau}_{th}. \end{cases} \quad (3)$$

ここで  $\tilde{\tau}$  は境界剪断力、 $\tilde{\tau}_{th}$  は限界掃流力である。Ariathurai and Arulanandan<sup>15)</sup>等も粘性土の侵食に対して同種の関係式を提案している。上式は、境界剪断力が限界掃流力以下の領域では侵食が生じないことを表している。

図-2に本モデルで想定する斜面の形状を示す。斜面は平坦でかつ一樣な勾配  $S$  を有しており、強度  $I$  の降雨が発生しているものとする。勾配  $S$  は後で述べるように流れが常流となるよう十分小さいものとする。斜面の下流端にはステップ状の段差が存在しており、降雨は斜面上を流下した後ステップを落下、更に下流へと流下していく。このようなステップは地殻変動によって生じた断層のように、地球上では一般的に見られるものである。降雨によって斜面上の流量および境界剪断力は流下に伴って増加していく。前報では降雨による境界剪断力の増加によって水路化が始まる過程をモデル化した。本報ではステップによる境界剪断力の増加によって生じる水路化の過程を取り扱う。ここで想

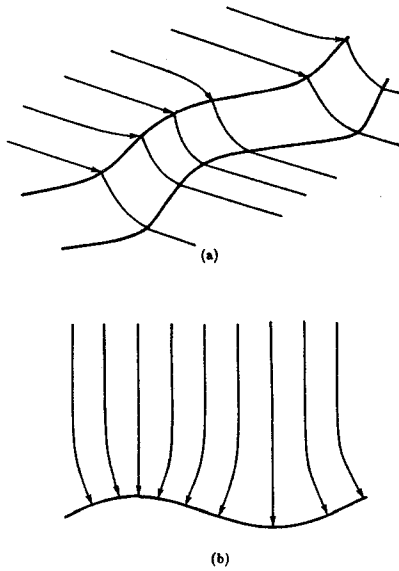


図-3 下流端ステップに与えられたサイン型の斜面方向振動とそれによって生じる表面流の局所的集中

定しているように勾配  $S$  が十分小さく、斜面上の流れが常流であるとき水面形はステップに向かって背水曲線を描きながら流速を増加させ、ステップ上で限界水深に達する。その際、流速及び境界剪断力はステップ上で斜面上での最大値をとり、ステップ近傍での侵食が最も活発となる。

いま下流端ステップより十分上流では境界剪断力は限界掃流力に達しておらず、ステップの影響で流れが加速されることによって境界剪断力は限界掃流力に達し、斜面上の侵食が始まるものとする。もしステップが横断方向に完全な直線であれば侵食は横断方向に一樣に発生する。ところが多くの場合、下流端には局所的な流れの集中が発生し、それによる選択的侵食によってガリが発生する。発生初期におけるガリのモデルとして、図-3のような形状を考える。図-2に示したような斜面の下流端ステップ上に波数  $\bar{k}$  のサイン形状を有する振動を与える。斜面上の流れが常流であるとき、流れは下流端のステップの形状の影響を受け、ステップを落下する際上流側にくぼんだ部分(発達初期のガリ)に集まり流量を増加させるのに対して、突き出た部分では逆に流量を減少させる。このような効果はガリの近傍で境界剪断力の増加及びそれによる選択的侵食を引き起こし、ガリをより大きく発達させることになる。また、それによって流れを集中させる効果は増大し、ガリは更に発達していくことになる。

ガリの発達は、与えられた振動の波長  $\bar{\lambda} (= 2\pi/\bar{k})$  に依存する。最もよく発達する振動の波長を卓越波長  $\bar{\lambda}_0$

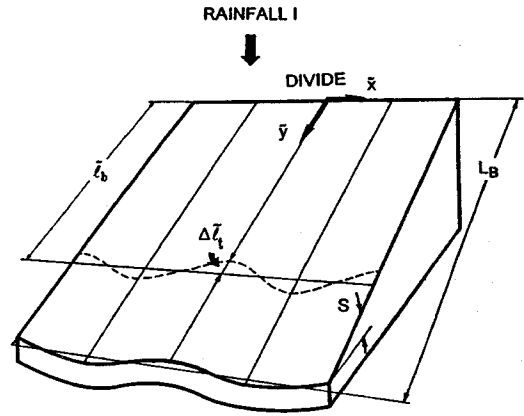


図-4 斜面下流端における水路形成過程の概念図(斜面表面は完全に平坦であり、振動は下流端に斜面方向に与えられていることに注意)

と呼ばば、この  $\bar{\lambda}_0$  が水路の形成間隔に他ならない。このような卓越波長を評価する方法として古典的線形安定論があるが、前報で取り扱った上流側から生じる水路化の理論の場合と同様に、限界掃流力付近での侵食の不連続性故に適用が困難となる。そこで前報で用いたのと同様の仮説を用いて卓越波長を評価することにする。

いま、斜面下流端に振動が与えられない(横断方向に一直線の)状態で、ステップの存在によって増大した境界剪断力が限界掃流力に達して侵食が始まる位置を  $\bar{y} = \bar{y}_0$  としよう。もし斜面下流端ステップに図-3に示すような振動が与えられれば流れはガリの部分に集中し、ガリの上流域における境界剪断力はガリ以外の部分の上流域における境界剪断力より大きくなる。同時にガリの上流域では  $\bar{y} = \bar{y}_0$  より若干上流で限界掃流力に達し、侵食が始まることになる。 $\bar{y} = \bar{y}_0$  の点からガリ中央の上流において限界掃流力が実現する点までの距離を  $\Delta \bar{l}_i$  とする。一般に  $\Delta \bar{l}_i$  は波長  $\bar{\lambda}$  の関数であることが期待される。一旦形成された水路はさらに流れを集めることによって上流方向に急速に発達することから、最初に形成された水路がその後の水路網の形態を支配するものと考えられる。そこで卓越波長は分水嶺より下流方向、侵食の始まる地点までの距離を最小にするものと仮定する。この距離を最小にすることは  $\Delta \bar{l}_i$  を最大にすることに対応している。そのとき卓越波長を与える条件は次の式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \Delta \bar{l}_i = 0. \quad (4)$$

水路の形成は境界剪断力が限界掃流力を越えるところで起こり、形成された水路の先端部はそのまわりの流れを集めることによって他の水路が近傍に形成される

ことを妨げ、その後の水路網を決定することになる。

### 3. 流れの支配方程式

上記のモデルによるガリの発達の様子を知るには境界剪断力の分布を見積もる必要がある。そのためにまず流速分布を求めてみよう。

斜面上のシートフローは前報と同様にレイノルズ応力と降雨の影響を含めた次の浅水流方程式によって記述できる。

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - g \frac{\partial \bar{\eta}_b}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\tau}_x}{\rho \bar{h}} \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \nu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} - g \frac{\partial \bar{\eta}_b}{\partial \bar{y}} - \frac{\bar{\tau}_y}{\rho \bar{h}} \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \nu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \nu_t \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{U} \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V} \bar{h}}{\partial \bar{y}} = I. \quad (7)$$

ここで $\bar{x}$ は横断方向座標、 $\bar{y}$ は下流方向を正、上流端を原点にとった平均流方向の座標、 $\bar{U}$ 、 $\bar{V}$ はそれぞれ $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 方向の流速成分、 $\bar{h}$ は水深、 $g$ は重力加速度、 $\rho$ は水の密度、 $\bar{\tau}_x$ および $\bar{\tau}_y$ はそれぞれ境界剪断力 $\bar{\tau}$ の $\bar{x}$ および $\bar{y}$ 方向成分、 $\nu_t$ は渦動粘性係数、 $I$ および $\bar{\eta}_b$ は前述したようにそれぞれ降雨強度および地表面高さである。

境界剪断力ベクトル $(\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y)$ 及び渦動粘性係数 $\nu_t$ は、前報と同様次式で与えられるものとする。

$$(\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y) = \rho C_f (\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{1/2} (\bar{U}, \bar{V}), \quad (8)$$

$$\nu_t = 0.2u^* \bar{h}. \quad (9)$$

ここで $C_f$ は抵抗係数であり、簡単のため定数とみなす。 $u^*$ は境界に働く摩擦速度 $(= \sqrt{\bar{\tau}/\rho})$ である。

斜面自体は平坦で且つ一様勾配 $S$ を有しているので、斜面表面の高さ $\bar{\eta}_b$ は上流端の高さを0とすれば次のように表される。

$$\bar{\eta}_b = -S\bar{y}. \quad (10)$$

上流側での境界条件は上流端において流量フラックスが0になるということである。それは次式によって表される。

$$\bar{V} \bar{h} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = 0. \quad (11)$$

図-3, 4に示したような、ステップに与えられた摂動は、次式で表される。

$$\bar{y} = L_B - \bar{a} \cos \bar{k} \bar{x}. \quad (12)$$

ここで $L_B$ は斜面の長さ(分水嶺からステップまでの距離)、 $\bar{a}$ は摂動の振幅で無限小と仮定する。また前述のように $\bar{k} (= 2\pi/\bar{\lambda})$ は波数、 $\bar{\lambda}$ は波長である。式(12)で

$\bar{x} = 0, \pm 2\pi/\bar{k}, \pm 4\pi/\bar{k}, \dots$ は上流側にくぼんだ部分の中央(ガリ頭部)に相当している。

このモデルの前提として、流れは斜面上のいたるところで常流である。従って下流端のステップ上ではフルード数1の限界水深が実現されている。すなわち

$$\frac{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}{g \bar{h}} = 1 \quad \text{at} \quad \bar{y} = L_B - \bar{a} \cos \bar{k} \bar{x} \quad (13)$$

が成立している。

### 4. 無次元化

前報と同様、以下の無次元変数を導入する。

$$(\bar{U}, \bar{V}) = V_0 (U, V), \quad (14a)$$

$$\bar{h} = H_0 h, \quad (14b)$$

$$\bar{x} = (H_0/S) x, \quad (14c)$$

$$(\bar{y}, \bar{a}) = L_B (y, a), \quad (14d)$$

$$\bar{k} = (H_0/S)^{-1} k. \quad (14e)$$

ここで $V_0$ 、 $H_0$ はそれぞれ摂動がない場合のステップ上での流速及び水深であり、従って $V_0/(gH_0)^{1/2} = 1$ のような関係がある。また本研究では前報と異なり、流下方向の長さスケールとして、侵食の始まるまでの分水嶺からの距離 $L_{th}$ ではなく、斜面の長さ(分水嶺からステップまでの距離) $L_B$ が用いられている。

上記の無次元変数を用いて支配方程式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + \psi V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - C_s \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{h} U \\ + \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \psi^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial V}{\partial x} + \psi V \frac{\partial V}{\partial y} = -\psi \frac{\partial h}{\partial y} + 1 - C_s \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{h} V \\ + \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \psi^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial U h}{\partial x} + \psi \frac{\partial V h}{\partial y} = \psi. \quad (17)$$

ここで $\chi = (U^2 + V^2)^{1/2} h$ である。また無次元パラメータ $C_s$ は $C_f/S$ であり、常流を仮定している現在の場合、1より大きい値をとる。無次元渦動粘性係数 $\epsilon$ は $0.2SC_f^{1/2}$ と表され、 $C_f$ が0.01のオーダー、 $S$ がそれよりさらに小さい値であることを考慮すれば、非常に小さい値であることがわかる。もう一つの無次元パラメータ $\psi$ は次式で表される。

$$\psi = \frac{I}{V_0 S} = \frac{H_0}{L_B S}. \quad (18)$$

上式では、斜面上に降った総雨量が下流端での流量に一致することから導かれる $IL_B = V_0 H_0$ の関係が用いられている。通常の場合に想定される $H_0$ と $L_B S$ の関

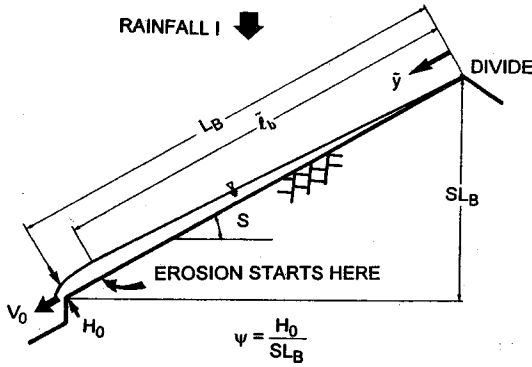


図-5 パラメータ $\psi$ の定義

係を図-5に示した。 $S$ が極度に小さくなる場合を除けば $\psi$ は非常に小さい値と考えられる。

無次元化した境界条件は次のとおりである。

$$Vh = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, \quad (19a)$$

$$U^2 + V^2 = h \quad \text{at} \quad y = 1 - a \cos kx. \quad (19b)$$

## 5. 内部領域と外部領域

前報に倣って微小パラメータ  $a$ ,  $\psi$ ,  $\epsilon$ に関する次のような摂動展開を導入することにしよう。

$$U = aU_{100} + a\psi U_{110} + a\epsilon U_{101} + \dots, \quad (20a)$$

$$V = V_{000} + aV_{100} + \psi V_{010} + \epsilon V_{001} + \dots, \quad (20b)$$

$$h = h_{000} + ah_{100} + \psi h_{010} + \epsilon h_{001} + \dots. \quad (20c)$$

上式を式(15)~(17)に代入し境界条件(19a)を用いて解くと、 $a^0\psi^0\epsilon^0$ ,  $a^1\psi^0\epsilon^0$ ,  $a^0\psi^1\epsilon^0$ および $a^0\psi^0\epsilon^1$ それぞれのオーダーについて次のような解が得られる。

$$V_{000} = C_s^{-1/3} y^{1/3}, \quad (21a)$$

$$h_{000} = C_s^{1/3} y^{2/3}, \quad (21b)$$

$$U_{100} = 0, \quad (21c)$$

$$V_{100} = V_{010} = V_{001} = 0, \quad (21d)$$

$$h_{100} = h_{010} = h_{001} = 0. \quad (21e)$$

これは前報中の等流近似の場合の解に相当している。この解によって分水嶺での境界条件(19a)は満足されるが下流端ステップでの境界条件(19b)は満足されていない。解(21)を導く際に式(15)~(17)中の一回微分の項を無視したために全ての境界条件を満たすことができなくなったのである。無視された移流慣性項と圧力の項は、微小パラメータを係数として持つにもかかわらず下流端ステップ近傍では小さい値とは成り得ない。これは一種の特異摂動問題となっている<sup>16)</sup>。解(21)は

ステップから十分離れたところ(外部領域)でのみ成立する外部解となっているのである。

移流慣性項と圧力の項が無視し得ないステップ近傍(内部領域)では次のような内部変数を定義するのが便利である。

$$y' = \frac{1-y}{\psi}. \quad (22)$$

上記の内部変数を用いて支配方程式を書き換え、 $\psi$ 及び $\epsilon$ に関して一次以上のオーダーの項を無視すれば次式が得られる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial y'} = -\frac{\partial h}{\partial x} - C_s \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{h} U, \quad (23)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial h}{\partial y'} + 1 - C_s \frac{(U^2 + V^2)^{1/2}}{h} V, \quad (24)$$

$$\frac{\partial U h}{\partial x} - \frac{\partial V h}{\partial y'} = 0. \quad (25)$$

すなわち内部領域における支配方程式は、レイノルズ応力、降雨のどちらの効果も無視された二次元の浅水方程式に帰着する。このことは次のことを意味している。バックウォーターの長さスケール( $H_0/S$ )が斜面の長さ(分水嶺から下流端ステップまでの距離) $L_B$ に比較して十分小さい時、ステップ近傍に着目すれば降雨の影響は無視し得るほど小さいものであり、同時にレイノルズ応力の影響も小さいものとなる。そこでここではこれら二つの影響を無視する。もちろん式(20)中の $O(a^0\psi^1\epsilon^0)$ ,  $O(a^0\psi^0\epsilon^1)$ の項は $O(a^1\psi^0\epsilon^0)$ の項に比べて小さくはなく、無視することはできないはずである。ところが $O(a^0\psi^1\epsilon^0)$ ,  $O(a^0\psi^0\epsilon^1)$ の項は、それぞれ降雨、レイノルズ応力の影響によって生じるベースフローからのずれを表しており、我々が現在着目している、ステップに与えられた横断方向の摂動によって生じる流れの集中とは無関係なものである。局所的な流れの集中を表現するのは $a$ について1次以上の項であり、 $k$ に対する依存性のない $O(a^0\psi^1\epsilon^0)$ ,  $O(a^0\psi^0\epsilon^1)$ 等の $a^0$ のオーダーの項は計算する必要はない。

式(23)~(25)を解く際に用いられる境界条件を考えよう。上流での境界条件は $y = 1$ での外部解が $y' \rightarrow \infty$ での内部解に一致するという条件<sup>16)</sup>を用いれば次の様に得られる。

$$V = h^{-1} = C_s^{-1/3} \quad \text{at} \quad y' \rightarrow \infty. \quad (26)$$

また下流端での境界条件(19b)は次のように書き換えられる。

$$U^2 + V^2 = h \quad \text{at} \quad y' = a \cos kx. \quad (27)$$

結局我々のしなければならないことは、式(23)~(25)を境界条件(26), (27)の下で解くことである。

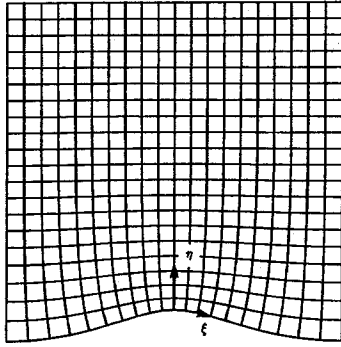


図-6 式(28)によって変換された座標

## 6. 座標変換及び線形化

### (1) 座標変換

ステップ上での境界条件を容易にするため次のような座標変換を導入する。

$$x = \xi - ae^{-k\eta} \sin k\xi, \quad (28a)$$

$$y' = \eta + ae^{-k\eta} \cos k\xi. \quad (28b)$$

この変換のヤコビアンは次式で表される。

$$J = \frac{\partial(x, y')}{\partial(\xi, \eta)} = 1 - 2ake^{-k\eta} \cos k\xi + (ak)^2 e^{-2k\eta}. \quad (29)$$

上記の座標変換を図に示すと図-6のようになる。式(28)によってステップは完全なサイン形状とはならないが $a^1$ のオーダーでは、十分な精度でサイン形状とみなして差し支えない。これを用いて支配方程式(23)~(25)を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{u}{J^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{J^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{uv}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \eta} \\ & - \frac{v^2}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \xi} = -\frac{1}{J^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ & + \frac{ake^{-k\eta} \sin k\xi}{J^{1/2}} - C_s \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h} u, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{J^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{J^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{uv}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \xi} \\ & + \frac{u^2}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \eta} = \frac{1}{J^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\ & + \frac{1 - ake^{-k\eta} \cos k\xi}{J^{1/2}} - C_s \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h} v, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J^{1/2} uh}{\partial \xi} - \frac{\partial J^{1/2} vh}{\partial \eta} = 0. \quad (32)$$

ここで $u$ ,  $v$ はそれぞれ $\xi$ ,  $-\eta$ 方向の流速である。

境界条件(26), (27)は座標変換によって次の様に書き換えられる。

$$v = h^{-1} = C_s^{-1/3} \quad \text{at} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$u^2 + v^2 = h \quad \text{at} \quad \eta = 0. \quad (34)$$

ステップに与えられた摂動の振幅 $a$ に関する次のような展開を導入する。

$$u = au_1 + a^2 u_2 + \dots, \quad (35a)$$

$$v = v_0 + av_1 + a^2 v_2 + \dots, \quad (35b)$$

$$h = h_0 + ah_1 + a^2 h_2 + \dots. \quad (35c)$$

上式中の $v_0$ ,  $h_0$ が摂動のないときの解であり、 $\eta$ だけの関数となることに注意すれば、 $a$ について0次のオーダーでは次式が得られる。

$$v_0 \frac{dv_0}{d\eta} + \frac{dh_0}{d\eta} = -1 + C_s \frac{v_0^2}{h_0}, \quad (36)$$

$$\frac{dv_0 h_0}{d\eta} = 0. \quad (37)$$

上式はよく知られた1次元の背水曲線に他ならない。この方程式は摂動がないときのベースフローを記述している。

$a$ の1次のオーダーでは次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & -v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - k^2 v_0^2 e^{-k\eta} \sin k\xi + \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \\ & = ke^{-k\eta} \sin k\xi - C_s \frac{v_0}{h_0} u_1, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - kv_0 \frac{\partial v_0}{\partial \eta} e^{-k\eta} \cos k\xi \\ & - \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - k \frac{\partial h_0}{\partial \eta} e^{-k\eta} \cos k\xi \\ & = -2C_s \frac{v_0}{h_0} v_1 + C_s \left( \frac{v_0}{h_0} \right)^2 h_1, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h_0 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - h_0 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - h_1 \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - v_0 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \\ & - v_1 \frac{\partial h_0}{\partial \eta} + k \frac{\partial v_0 h_0 e^{-k\eta}}{\partial \eta} \cos k\xi = 0. \quad (40) \end{aligned}$$

### (2) $a^0$ のオーダー(ベースフロー)

上流側無限遠方では流れは等流となっている。そのことから式(37)は積分できて次のようになる。

$$v_0 h_0 = 1. \quad (41)$$

式(36)と(41)から $h_0$ を消去すれば次の常微分方程式が導かれる。

$$\frac{dv_0}{d\eta} = \frac{C_s v_0^3 - 1}{v_0 - v_0^{-2}}. \quad (42)$$

下流端のステップ上では定義によって次の条件が要求される。

$$v_0 = h_0 = 1 \quad \text{at} \quad \eta = 0. \quad (43)$$

上の境界条件を用いれば式(42)は積分できて次のようになる。

$$\int_1^{v_0} \frac{v_0 - v_0^{-2}}{C_s v_0^3 - 1} dv_0 = \eta. \quad (44)$$

式(42)から明白のように流速の勾配は $v_0 = 1$ において無限大となる。通常は式(44)のように $v_0$ で積分することによって特異点での数値積分を可能としているが、

この方法は比較的形が単純な (42) にしか適用できず、式 (38)~(40) のように複雑な場合は別の手法が必要となる。ここでは後に式 (38)~(40) を取り扱う際にも用いられる簡単な手法を用いてこの特異性を記述することを試みる。

そのためにまずステップ近傍に特異性の集中する非常に薄い厚さ  $\delta$  の層を考える。その内部では次のような変数を導入するのが便利である。

$$\eta^* = \frac{\eta}{\delta}. \quad (45)$$

上式を式 (36) および (37) に代入して次の方程式が得られる。

$$v_0 \frac{dv_0}{d\eta^*} + \frac{dh_0}{d\eta^*} = \delta \left( -1 + C_s \frac{v_0^2}{h_0} \right), \quad (46)$$

$$\frac{dv_0 h_0}{d\eta^*} = 0. \quad (47)$$

流速及び水深を  $\delta$  を用いて次のように展開する。

$$v_0 = 1 + \delta^{1/2} v_{01} + \delta v_{02} + \dots, \quad (48a)$$

$$h_0 = 1 + \delta^{1/2} h_{01} + \delta h_{02} + \dots \quad (48b)$$

上式が境界条件 (43) を満足する為には次の条件が必要となる。

$$v_{0n} = h_{0n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{at} \quad \eta^* = 0. \quad (49)$$

式 (48) を (46) に代入すると  $\delta^{1/2}$  のオーダーについて次式が得られる。

$$\frac{dv_{01}}{d\eta^*} + \frac{dh_{01}}{d\eta^*} = 0. \quad (50)$$

上式を境界条件 (49) を用いて積分すると次の結果が得られる。

$$v_{01} + h_{01} = 0. \quad (51)$$

連続の式 (47) に (48) を代入し、積分することによって (51) と全く同様の式が得られる。 $\delta$  の 1 次のオーダーについては式 (46), (47) から次式が得られる。

$$\frac{dv_{02}}{d\eta^*} + \frac{dh_{02}}{d\eta^*} = -v_{01} \frac{dv_{01}}{d\eta^*} - 1 + C_s, \quad (52)$$

$$\frac{dv_{02}}{d\eta^*} + \frac{dh_{02}}{d\eta^*} = -\frac{dv_{01} h_{01}}{d\eta^*}. \quad (53)$$

式 (51), (52), (53) から  $v_{01}$  に関して次のような結果が得られる。

$$\frac{3}{2} \frac{dv_{01}^2}{d\eta^*} = C_s - 1. \quad (54)$$

上式に境界条件 (49) を適用して積分すれば次の結果が得られる。

$$v_{01} = -G\eta^{*1/2}, \quad (55a)$$

$$G = \left[ \frac{2(C_s - 1)}{3} \right]^{1/2}. \quad (55b)$$

$h_{01}$  については式 (51) を用いて次のように求められる。

$$h_{01} = G\eta^{*1/2}. \quad (56)$$

$v_{01}$  の微分をとれば  $\eta^* = 0$  のとき無限大となり、この解が特異性を表現できていることがわかる。内部変数を

従来の変数  $\eta$  で書き直して、結局内部層内での解は次のようになる。

$$v_0 = 1 - G\eta^{1/2}, \quad (57a)$$

$$h_0 = 1 + G\eta^{1/2}. \quad (57b)$$

上式の  $\eta$  に関する微分を考えれば  $\delta$  を  $G^{-2}$  に比べて十分小さくとれば上の解は良い近似になっていることが期待される。

### (3) $a^1$ のオーダー

式 (38)~(40) の解は次のように表される。

$$u_1 = u_1^*(\eta) \sin k\xi, \quad (58a)$$

$$v_1 = v_1^*(\eta) \cos k\xi, \quad (58b)$$

$$h_1 = h_1^*(\eta) \cos k\xi. \quad (58c)$$

式 (58) を式 (38)~(40) に代入し、式 (41) を用いて整理すれば次の一階の常微分方程式系が得られる。

$$\frac{du}{d\eta} = \mathcal{L}(\eta)u + m(\eta)e^{-k\eta}. \quad (59)$$

ここで  $u$  は次式で表されるベクトルである。

$$u = [u_1^*, v_1^*, h_1^*]^T. \quad (60)$$

$\mathcal{L}$  は  $3 \times 3$  の行列であり、次式で表される。

$$\mathcal{L}(\eta) = [L_{ij}], \quad (61)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_s v_0, L_{12} = 0, L_{13} = -\frac{k}{v_0}, \\ L_{21} &= -\frac{k}{v_0(v_0^2 - v_0^{-1})}, L_{22} = -\frac{v_0 dv_0/d\eta - 2C_s v_0^3 + v_0^{-2} dv_0/d\eta}{v_0^2 - v_0^{-1}}, \\ L_{23} &= -\frac{C_s v_0^2 - dv_0/d\eta}{v_0^2 - v_0^{-1}}, L_{31} = \frac{k}{v_0^2 - v_0^{-1}}, \\ L_{32} &= \frac{2v_0^{-1} dv_0/d\eta - 2C_s v_0}{v_0^2 - v_0^{-1}}, L_{33} = \frac{C_s v_0^2 - v_0 dv_0/d\eta}{v_0^2 - v_0^{-1}}. \end{aligned}$$

また  $m$  は次式で表される。

$$m(\eta) = [m_i], \quad (62)$$

$$m_1 = -\left(k^2 v_0 + \frac{k}{v_0}\right), \quad m_2 = -\frac{k C_s v_0^4 - k v_0 - k^2}{v_0^2 - v_0^{-1}},$$

$$m_3 = \frac{k C_s v_0^2 - k v_0^{-1} - k^2 v_0}{v_0^2 - v_0^{-1}}.$$

ここで  $v_0$  と  $dv_0/d\eta$  が  $\eta$  の関数であることから、 $\mathcal{L}$  と  $m$  も  $\eta$  の関数であることに注意する。

## 7. 解法

### (1) 外部層、中間層及び内部層

$u = [u_1^*, v_1^*, h_1^*]^T$  に対する境界条件を考えてみる。上流側無限遠方 ( $\eta \rightarrow \infty$ ) では式 (33) のように流速及び水深がある一定値に漸近し、振動成分が全て消失する。したがって次式が成立する。

$$u \rightarrow 0 \quad \text{at} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (63)$$

ステップ上ではフルード数 = 1 の境界条件が成立している。式 (35) を (34) に代入すると  $a$  の 1 次のオーダー

でuに関する次のような関係が得られる。

$$2v_1^* = h_1^* \quad \text{at} \quad \eta = 0. \quad (64)$$

ここで式(63)は3個、式(64)は1個の境界条件を含んでおり、合計四つの境界条件があるように見える。式(59)は三変数を含む一階の微分方程式系であるから四つの境界条件は過剰である。実際は後述するように境界条件(63)では二つの条件が満たされれば残りの一つも自動的に満たされており、二つの境界条件しか含まれていない。従って式(64)と共に三つの境界条件になっていることがわかる。

上流側無限遠方での境界条件をより明確にするため、 $v_0$ が定数に非常に近くなるような領域を外部層として定義し、まずそこの解を解析的に求めてみる。元の微分方程式系は変数係数の微分方程式であり解析的に解く方法は存在しないが、ベースフローの等流からのずれが非常に小さい外部層においては微分方程式系の係数は定数と近似することが可能となり、解析解が求められる。

外部層以外の領域では式(59)を数值的に解くことが必要となる。ところが後に述べるように、この解はステップ近傍で強い特異性を有しており、この特異性故に式(59)の数値積分はステップ近傍で不可能となる。この特異性を回避するための一方法として、6(2)で行ったようにステップ近傍に非常に薄い層(内部層)を定義する。この内部層は解に強い特異性が存在する領域として定義される。内部層内での解を求め、外部層と内部層との間の領域(中間層)での解と接続することによって特異点近傍での数値積分を回避する方法をとる。なお、ここで用いる内部層、外部層という用語は5で用いた内部領域、外部領域とは違うことに注意する必要がある。すなわち図-7に示したように、流体場はまず降雨の影響の無視できない外部領域(outer region)と下流端ステップ近傍の降雨の影響が無視できるくらい狭い内部領域(inner region)に分割され、内部領域はさらにベースフローの等流からのずれが非常に小さい外部層(outer layer)、解の特異性が非常に強い下流端ステップの極近傍の内部層(inner layer)、そしてそれらをつなぐ中間層(intermediate layer)に分けられるのである。

## (2) 外部層での解

外部層ではベースフローにおいて流速、水深の一定値(等流流速、等流水深)からのずれが非常に小さい。この小さいずれを無視すれば外部層内での流速、水深は次のように表される。

$$v_0 = h_0^{-1} = C_s^{-1/3}, \quad (65)$$

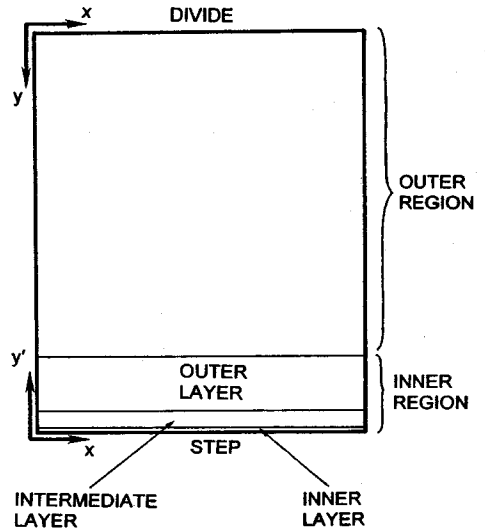


図-7 外部領域および内部領域と外部層、中間層および内部層

このとき式(59)は次のように表される。

$$\frac{du^o}{d\eta} = \mathcal{L}^o u^o + m^o e^{-k\eta}. \quad (66)$$

ここで

$$\mathcal{L}^o = \begin{bmatrix} C_s^{2/3} & 0 & -kC_s^{1/3} \\ \frac{-kC_s}{1-C_s} & \frac{2C_s^{2/3}}{1-C_s} & -\frac{1}{1-C_s} \\ \frac{kC_s^{2/3}}{1-C_s} & \frac{-2C_s^{4/3}}{1-C_s} & \frac{C_s^{2/3}}{1-C_s} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$m^o = \begin{bmatrix} -\left(k^2 C_s^{1/3} + kC_s^{1/3}\right) \\ \frac{k^2 C_s^{2/3}}{1-C_s} \\ -\frac{k^2 C_s^{1/3}}{1-C_s} \end{bmatrix} \quad (68)$$

である。

微分方程式系(66)は今度は容易に解けて次のような解が得られる。

$$u^o = \sum_{n=1}^3 A_n u_n e^{\lambda_n \eta} - (\mathcal{L}^o + kI)^{-1} m^o e^{-k\eta}. \quad (69)$$

ここで $\lambda_n$ は $\mathcal{L}^o$ の特性方程式の第n番目の解であり、 $u_n$ はそれに対応する基底ベクトル、 $A_n$ は未定定数である。 $\mathcal{L}^o$ の特性方程式は次式のようになる。

$$(C_s - 1)\lambda_n^3 + C_s^{2/3}(4 - C_s)\lambda_n^2 - C_s(k^2 + 3C_s^{1/3})\lambda_n + 2k^2 C_s^{5/3} = 0. \quad (70)$$

上式を $\lambda_n$ について解くと三つの根が得られるが、そのうちの一つは常に負の実根であり、他の2根の実部は必ず正であることがわかる。負の実根を $-\lambda_1$ 、正の実部を持つ根を $\lambda_2, \lambda_3$ とすれば、 $\eta$ が無限大になるとき $u^o$ が発散しないという条件から $A_2, A_3$ はゼロにならなければならないことがわかる。従って次のような解が導か



れる。

$$u^o = A_1 \begin{bmatrix} \frac{kC_s^{1/3}}{C_s^{2/3} + \lambda_1} \\ \frac{1 - C_s^{1/3} \lambda_1}{2C_s^{2/3} + \lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\lambda_1 \eta} + \begin{bmatrix} kC_s^{1/3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-k\eta}. \quad (71)$$

### (3) 内部層での解

ベースフローのステップ近傍での解を導く際と同様の手法を用いて  $a^1$  のオーダーの解を求める。式 (45) の内部変数を用いて式 (30)~(32) は次のように書き直される。

$$\delta \frac{u}{J^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{J^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial \eta^*} - \frac{uv}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \eta^*} - \delta \frac{v^2}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \xi} = -\delta \frac{1}{J^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \delta \left[ \frac{ake^{-\delta k \eta^*} \sin k\xi}{J^{1/2}} - C_s \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h} u \right], \quad (72)$$

$$\delta \frac{u}{J^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{J^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial \eta^*} + \delta \frac{uv}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \xi} + \frac{v^2}{J} \frac{\partial J^{1/2}}{\partial \eta^*} = \frac{1}{J^{1/2}} \frac{\partial h}{\partial \eta^*} + \delta \left[ \frac{1 - ake^{-\delta k \eta^*} \cos k\xi}{J^{1/2}} - C_s \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{h} v \right] \quad (73)$$

$$\delta \frac{\partial J^{1/2} u h}{\partial \xi} - \frac{\partial J^{1/2} v h}{\partial \eta^*} = 0. \quad (74)$$

座標変換のヤコビアン  $J$  も次のように書き直せる。

$$J = 1 - ak \cos k\xi + (ak)^2 + \delta(2ak^2 \cos k\xi - 2a^2 k^3) + O(\delta^2). \quad (75)$$

内部層内の解は  $a$  と  $\delta$  を微小パラメータとして次のように展開できる。

$$u = au_{10}(\xi) + a\delta^{1/2}u_{11}(\xi, \eta^*) + \dots, \quad (76a)$$

$$v = 1 + av_{10}(\xi) + \delta^{1/2}v_{01}(\eta^*) + a\delta^{1/2}v_{11}(\xi, \eta^*) + \dots, \quad (76b)$$

$$h = 1 + ah_{10}(\xi) + \delta^{1/2}h_{01}(\eta^*) + a\delta^{1/2}h_{11}(\xi, \eta^*) + \dots \quad (76c)$$

上式を式 (72)~(74) に代入し、境界条件 (64) を用いて、 $a^1$ ,  $\delta^{1/2}$  のオーダーまでの解を求めると次のような結果が得られる。

$$u = aB_1 \sin k\xi + \dots, \quad (77a)$$

$$v = 1 - G\eta^{1/2} + aB_2 \cos k\xi + \dots, \quad (77b)$$

$$h = 1 + G\eta^{1/2} + 2aB_2 \cos k\xi + \dots \quad (77c)$$

$u$  の値は次の様になる。

$$u = [B_1, B_2, 2B_2]^T. \quad (78)$$

ここで  $B_1$ ,  $B_2$  は未定常数であり、中間層での解と接続することによって決定される。式 (77), (78) によれば、内部層内においては  $a^1$  のオーダーの解は  $\eta$  方向に変化

せず、下流端ステップから  $\delta$  だけ離れた内部層外縁でも境界条件 (64) が成立することがわかる。

### (4) 中間層での解

中間層での解は数値解析によって求められる。外部層での解は 1 つの自由定数  $A_1$  を持つ。これを用いたシューティング法によって式 (59) を数値積分する。その手順は次のようになる。まず  $A_1$  の値を推定し、式 (71) から得られる  $\eta_i$  における値を初期値としてルンゲクッタ法を用い、下流端に向かって積分する。ここで  $\eta_i$  は外部層と中間層の境界点であり  $v_0$  及び  $h_0$  がそれぞれ  $C_s^{-1/3}$ ,  $C_s^{1/3}$  に十分近い (ここでは  $v_0 = 0.99C_s^{-1/3}$  としている) 点として定義される。以上のようにして得られた中間層の解は、内部層の外縁  $\eta = \delta$  (ここでは  $\delta = 0.0001$  としている) において接続条件 (78) を満たすように内部層での解と接合される。ニュートンラプソン法を用いて推定値  $A_1$  を修正し、再び  $\eta_i$  から  $\delta$  まで計算する。この繰り返し計算をすることによって正しい推定値  $A_1$  及び流速、水深分布を求めることができる。

## 8. 結果と考察

前節の方法を用いて求められる  $C_s = 4$ ,  $k = 4$  における  $u_1^*(\eta)$ ,  $v_1^*(\eta)$ ,  $h_1^*(\eta)$  の値を図-8 に示した。これらの値は、図-3 の中の上流側にくぼんだ部分の中央部 ( $x = 0, \pm 2\pi/k, \pm 4\pi/k$ ) の上流側での流速及び水深の流下方向分布と考えることができる。

図-9 には 1 波長分の斜面上のシートフローの流速ベクトルを示した。用いた値は  $C_s = 4$ ,  $k = 4$ ,  $a = 0.025$  である。ステップに近づくにつれて流速ベクトルが上流側へくぼんだ部分に向かっていく様子がわかる。また僅かではあるがくぼんだ部分での流速は突き出た部分より大きくなっていることもわかる。

ここで得られた結果と限界掃流力による水路の初期形成仮説を用いて卓越波長を求めてみる。まず  $\xi, \eta$  平面上で表された  $u_1, v_1, h_1$  を  $x, y$  平面 (実平面) 上で表す。式 (28) より次の関係が得られる。

$$\xi = x + ae^{-ky'} \sin kx + O(a^2), \quad (79a)$$

$$\eta = y' - ae^{-ky'} \cos kx + O(a^2). \quad (79b)$$

上式を式 (58), さらに式 (35) に代入してテイラー展開を用いれば次のような関係が得られる。

$$u = au_1^*(y') \sin kx + \dots, \quad (80a)$$

$$v = v_0(y') + a \left[ v_1^*(y') - \frac{dv_0}{dy'} e^{-ky'} \right] \cos kx + \dots, \quad (80b)$$

$$h = h_0(y') + a \left[ h_1^*(y') - \frac{dh_0}{dy'} e^{-ky'} \right] \cos kx + \dots \quad (80c)$$

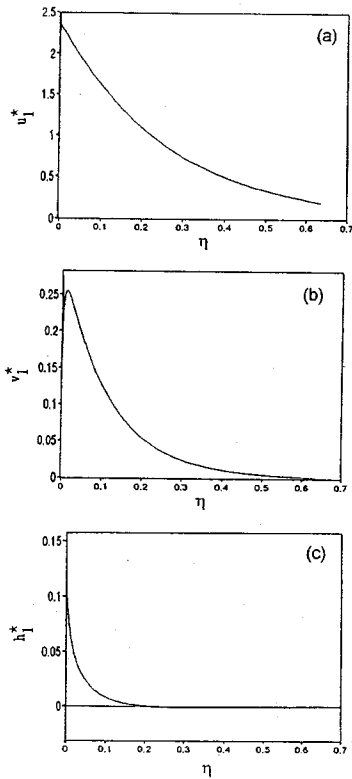


図-8 計算によって得られた流速および水深分布 (a)  $u_1^*$ , (b)  $v_1^*$ , (c)  $h_1^*$  ( $C_s = 4, k = 4$ )

境界剪断力 $\bar{\tau}$ を次の様に無次元化する。

$$\tau = \frac{\bar{\tau}}{\rho C_f V_0^2} \quad (81)$$

$\tau$ を摂動の振幅  $a$  を用いて次のように展開する。

$$\tau = \tau_0(y') + a\tau_1(x, y') + \dots \quad (82)$$

式 (8), (80), (82) を用いれば次の関係が導かれる。

$$\tau_0 = v_0^2(y'), \quad (83a)$$

$$\tau_1 = 2v_0(y') \left[ v_1^*(y') - \frac{dv_0}{dy'} e^{-ky'} \right] \cos kx. \quad (83b)$$

ここで  $dv_0/dy'$  はステップ近傍で非常に大きな値をとるが、無限大となるステップ上でなければ、 $a$  を任意に小さくすることによって上のテーラー級数は十分収束可能である。

与えられた摂動の結果、限界掃流力が  $y' = \ell$  の位置で実現するとする。この  $\ell$  は摂動を与える前の直線状の下流端 ( $y' = 0$ ) から侵食が始まる点までの無次元距離である。従って

$$\tau(\ell) = \tau_{th}. \quad (84)$$

の関係が成り立つ。ここで  $\tau_{th} = \bar{\tau}_{th}/(\rho C_f V_0^2)$  である。 $\ell$  も  $a$  を用いて次の様に展開する。

$$\ell = \ell_0 + a\ell_1 + O(a^2). \quad (85)$$

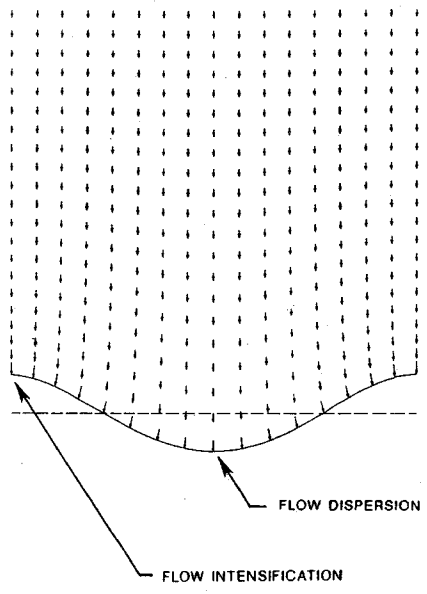


図-9 計算によって得られた流速ベクトル ( $C_s = 4, k = 4, a = 0.025$ , くぼんだ部分に向かう流速ベクトルに注意)

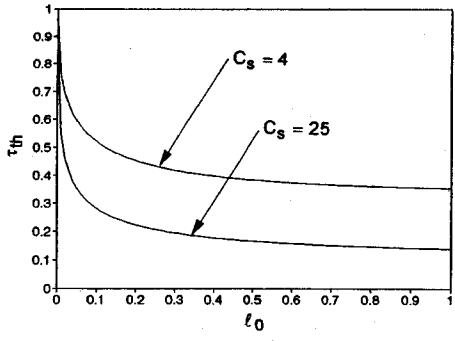


図-10  $\ell_0$  と  $\tau_{th}$  の関係

ここで  $a^0$  のオーダーの  $\ell_0$  は摂動を与える前の侵食の始まる位置を表している。 $\ell_0$  は定義より次の様に表せる。

$$\tau_0(\ell_0) = \tau_{th}. \quad (86)$$

ここで  $\ell_0$  と  $\tau_{th}$  との関係は、式 (44) を用いて次の様に表される。

$$\int_1^{\tau_{th}^{1/2}} \frac{v_0 - v_0^{-2}}{C_s v_0^3 - 1} dv_0 = \ell_0. \quad (87)$$

$\ell_0$  と  $\tau_{th}$  の関係を  $C_s = 4, 25$  について図-10に示した。 $y' = \ell$  における境界剪断力  $\tau$  を、テーラー展開を用いて  $a$  のオーダーまで表せば次の様になる。

$$\tau(\ell) = \tau_0(\ell_0) + a\ell_1 \left. \frac{\partial \tau_0}{\partial y'} \right|_{y'=\ell_0} + a\tau_1(\ell_0). \quad (88)$$

式 (84), (86) および (88) より次の関係が得られる。

$$\ell_1(x) = - \frac{\tau_1(\ell_0)}{[\partial \tau_0 / \partial y']_{y'=\ell_0}}. \quad (89)$$

式(83)を用いれば、式(89)は次の様に書き換えられる。

$$l_1(x) = \left\{ e^{-k\ell_0} - \frac{v_1^*(\ell_0)}{[\partial v_0/\partial y']_{y'=\ell_0}} \right\} \cos kx. \quad (90)$$

図-3に示したように、 $x=0$ がステップが上流にくぼんだ部分の中央に相当することになる。そこでの値は

$$l_1(0) = \left\{ e^{-k\ell_0} - \frac{v_1^*(\ell_0)}{[\partial v_0/\partial y']_{y'=\ell_0}} \right\} \quad (91)$$

となる。上式の $l_1(0)$ は、ガリ中央部における侵食の始まる位置の摂動によるずれであり、前出の $\Delta \tilde{l}_1$ を無次元化したものに他ならない。これは無次元波数 $k$ の関数となっていて、 $l_1(0)$ を最大とする $k$ の値がガリの形成間隔に対応している。図-2に示したように $l_1(0)$ が最大となるとき、分水嶺から境界剪断力が限界掃流力に達する位置までの距離は最短になる。すなわち $l_1(0)$ の値を最大にする $k$ が卓越波数 $k_c$ となる。

実は、(91)を最大にする条件ではなく、式(83b)で $y'=\ell_0$ において得られる $\tau_1$ の値を最大にする条件として $k_c$ を求めても全く同じ結果が得られる。分水嶺から境界剪断力が限界掃流力に達する位置までの距離を最短にする条件と、摂動のない状態で限界掃流力に達する位置において摂動によって増加する境界剪断力を最大にする、という二つの条件は線形解析の範囲内では完全に一致することがわかる。

図-11は $l_1(0)$ を $k$ と $\ell_0$ の関数として表したものである。図-11-aでは $C_s$ の値として4がとられている。計算に用いた $\ell_0$ の範囲では、 $l_1(0)$ の値は $k=0.8 \sim 4$ で最大となっている。これは卓越波長 $\tilde{\lambda}_c$ が $H_0/S$ (限界水深/斜面勾配)のオーダーになることを意味している。またこの図から、 $\ell_0$ の値が大きくなる、すなわち限界掃流力に達する位置が上流になると、 $l_1(0)$ の絶対値が大きくなることがわかる。図-10によれば、大きい $\ell_0$ の値は小さい $\tau_{th}$ の値に対応している。 $\tau_{th}$ が小さいときステップ上での境界剪断力は限界掃流力よりはるかに大きい値となることから、結局次のことがいえる。流量および境界剪断力が大きく、より上流で限界掃流力に達する場合、卓越波長および水路群の形成間隔はより大きい値となる。

図-11-bには $C_s=25$ の場合を示した。この図を図-11-aと比べると同じ $\ell_0$ の値に対して $l_1(0)$ の値はより大きい波数に対して最大となることがわかる。このことは斜面勾配が小さくなったことによって卓越波長が小さくなったことを意味する。

ステップ上での流速 $V_0$ および水深 $H_0$ は降雨強度 $I$ および斜面長 $L_B$ と次のような関係を有する。

$$V_0 H_0 = I L_B. \quad (92)$$

ステップ上ではフルード数が1となることから次の関

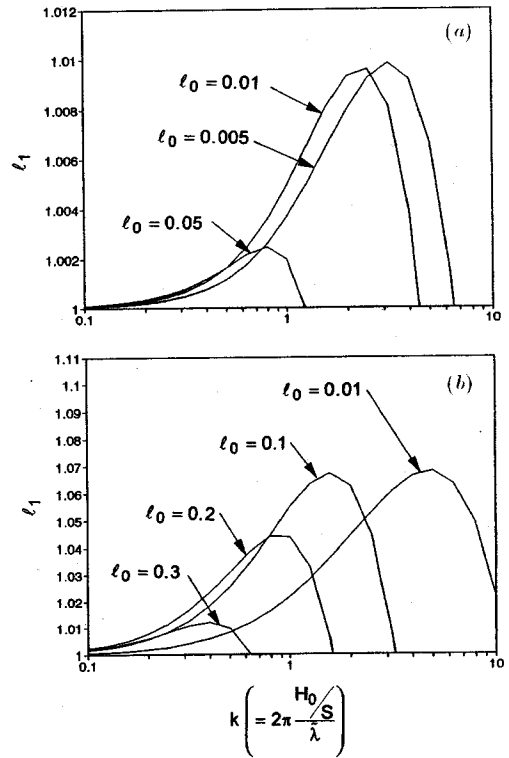


図-11 波数 $k$ および $\ell_0$ による $l_1(0)$ の変化 (a)  $C_s = 4$ , (b)  $C_s = 25$

係が成立する。

$$V_0^2 = g H_0. \quad (93)$$

式(92)および(93)から $V_0$ および $H_0$ の値は次の様に導かれる。

$$V_0 = (g I L_B)^{1/3}, \quad (94a)$$

$$H_0 = g^{-1/3} (I L_B)^{2/3}. \quad (94b)$$

そのとき無次元化された限界掃流力は次の様に表せる。

$$\tau_{th} = \frac{\tilde{\tau}_{th}}{\rho C_f (g I L_B)^{2/3}} = \frac{u_{th}^{*2}}{C_f (g I L_B)^{2/3}}. \quad (95)$$

卓越波長 $\tilde{\lambda}_c$ は次の様に求められる。 $u_{th}^*$ ,  $C_f$ ,  $I$ および $L_B$ の値を与えれば、無次元境界剪断力 $\tau_{th}$ は式(95)から計算できる。さらに $S$ を特定することによって $C_s$ が定まり、それに対応した $\ell_0$ の値が式(87)から計算できる。卓越波数 $k_c$ は式(91)を用いることによって計算できる。最終的に水路群の形成間隔は次の式から求められる。

$$\tilde{\lambda}_c = 2\pi \frac{H_0}{k_c S}. \quad (96)$$

上記の結果の意味を明確にするために $u_{th}^*$ ,  $C_f$ ,  $I$ ,  $L_B$ および $S$ の妥当な値を用いてサンプル計算を行ってみよう。限界摩擦速度 $u_{th}^*$ については一般的な粘性度に対するVanoni<sup>17)</sup>, Raudkivi<sup>18)</sup>の研究、特に植生に覆

われた表土に対する Dietrich et al.<sup>19)</sup>の研究等、様々な値が報告されているが、それによると典型的な  $u_{th}^*$  の値として 0.02 から 0.2 m/s の範囲となる。ここでは 0.1 m/s の値を用いることにする。 $C_f$  の値は表面の状態、植生の有無などによって大きく変化することが報告されているが<sup>20)21)</sup>、ここではそれらの平均的な値として 0.01 を用いることにする。水路化が起こるのは通常の降雨ではなく数十年あるいは数百年に一度の大降雨であると考え、 $I$  の値としては 100 mm/hour ( $2.78 \times 10^{-5}$  m/s) を用いる。斜面長  $L_B$  を 5650 m、斜面の勾配  $S$  を 0.0025 とする。この時  $C_s$  の値は 4 となる。式 (94) および (95) より  $V_0 = 1.15$  m/s,  $H_0 = 0.136$  m,  $\psi = 9.63 \times 10^{-3}$ ,  $\epsilon = 5.00 \times 10^{-5}$ , そして  $\tau_{th} = 0.75$  となる。図-10を用いてパラメータ  $l_0$  の値を求めると 0.01 であることがわかる。このとき下流端ステップから上流に向かって限界掃流力が実現する点までの距離は 0.544 m となる。図-11を用いると  $k_c = 2.3$  であることがわかる。式 (96) より水路群の形成間隔 (卓越波長)  $\lambda_c$  は 149 m となる。

Montgomery and Dietrich<sup>22)</sup>は California 州の Tennessee Valley における水路先端部の平均的な間隔が 80 m 程度になることを見いだしている。Dietrich and Dunne<sup>23)</sup>は、やはり水路先端部間隔の平均値として Oregon 州の Rock Creek で 129 m, California 州の Southern Sierras で 110 m, California 州の San Dimas で 64 m であることを見いだした。また前報で示した California 州の Orland 近郊の水路群でも水路先端部間隔は 100 m 内外となっている。ここで挙げた 149 m という理論値と 64 m ~ 129 m の実測値を単純に比較することはできない。理論値を求める際に用いた  $I$  の水路形成時点における値を知ることは不可能であるし、 $S$  についても斜面上の侵食によって大きく変化するため水路形成時点での値は知り得ない。したがって、推測を交えた大雑把な議論とならざるを得ないが、少なくとも各パラメータの妥当な値の範囲内で、本理論は実測値を概ね説明できたとみなして良いであろう。

前報で議論された上流側から発生する水路化との比較のために、 $u_{th}^*$ ,  $S$ ,  $C_f$  および  $I$  の値を同一にして水路化が上流側から発生する場合の水路群の形成間隔を求めてみる。それによると  $\lambda_c$  の値は 188 m であることがわかる。また  $L_{th}$  の値は 14700 m と計算される。ここで用いた条件では、水路化が下流側から発生する場合の卓越波長は上流側から発生する場合の卓越波長よりわずかに小さくなっているが、 $S$ ,  $L_B$  等のパラメータの取り方如何でどちらが大きくなることも有り得る。いずれにしても二つのモデルは、各パラメータの妥当な値の範囲内ではほぼ同オーダー (1 ~ 10) の  $k_c$  を与える。また水路化が上流側から発生する場合にはより長

い斜面長が必要となる。

下流端から発生する水路化を特徴づけるのは下流端におけるステップの存在である。このステップによって流れは加速され、上流側からの水路化の場合より短い距離で限界掃流力に達する。このことによって次のような分類が可能となる。もしステップが存在しない場合は、水路化は上流側から起こる。もし斜面が  $L_{th}$  よりも短く、下流端にステップを有するような場合には、水路化は下流端ステップから発生する。もし無次元境界剪断力  $\tau_{th}$  が 1 より大きく、次式が成り立つ場合、

$$L_B < \frac{u_{th}^{*3}}{gIC_f^{3/2}}, \quad (97)$$

境界剪断力は斜面上のどの点でも限界掃流力を下回っていることになり、侵食はどこにも起きないことになる。

さらに斜面勾配について次のことにも言及できる。もし斜面勾配  $S$  が底面の抵抗係数  $C_f$  よりも小さければ斜面上の流れは常流となり、上流側から、下流端からのどちらからでも水路化は起こりうる。ところがもし斜面勾配  $S$  が  $C_f$  よりも大きい場合、斜面上の流れは射流となり下流端の影響は上流側へ伝わることはなく、本論文で取り扱った下流端からの水路形成は生じ得ないことになる。したがって急勾配斜面で発生する水路化は常に上流側から発生することがわかる。

## 9. 結論

本研究によって得られた主要な結論は次の通りである。

- (1) 発生初期のガリのモデルとして斜面方向にサイン型の振動を与えられたステップを考え、下流端にこのようなステップを有する斜面上に一定の降雨が生じている場合の流速および水面形状を二種類の特異振動法を用いて求めた。理論によれば、ステップ近傍では降雨およびレイノルズ応力の影響は無視し得、支配方程式は降雨とレイノルズ応力を無視した浅水流方程式に帰着することがわかった。その方程式を解くことによって、流れは上流側にくぼんだ部分に集中し、その上流付近には境界剪断力の強調される部分が生じることがわかった。
- (2) (1) で得られた流速分布の結果から境界剪断力分布を見積もり、さらに限界掃流力を用いた水路の初期形成仮説を適用することによって (限界水深/斜面勾配) 程度のオーダーの卓越波長が得られた。この値は上流から発生する水路間隔と比べるとほぼ同程度となった。
- (3) 上流あるいは下流からの水路形成過程の内のどちらが実現するかは、斜面長によって決定されることがわかった。斜面が十分長ければ上流から、斜面が短くステップが存在する場合は下流端から水

路は発生する。また急勾配斜面の場合には上流からの水路形成しか起こり得ないことがわかった。

- (4) 浅水方程式を用いることで、発生初期のガリ周辺の流れを合理的に説明することができた。ガリの発達にともなって非線形項の重要性が大きくなり、本理論は適用不能となるが、本研究で用いた支配方程式を非線形項も含めて数値計算を用いて解けば、チャンネルネットワークへの発達過程をシミュレートすることが可能になると考えられる。

謝辞：本研究は United States Science Foundation (No. CTS-8901598) 及び University of Minnesota, Graduate School (Grant-in-Aid of Research, Artistry and Scholarship) の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) Schumm, S. A., Mosley, M. P. and Weaver, W. E.: *Experimental fluvial geomorphology*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- 2) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins: Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol. 56, pp. 275-370, 1945.
- 3) Howard, A. D.: Simulation of stream networks by headward growth and branching, *Geogr. Anal.*, Vol. 3, pp. 29-50, 1971.
- 4) Smart, J. S., and Moruzzi, V. L.: Random-walk model of stream network development, *J. Research Development*, IBM 15, pp. 197-203, 1971.
- 5) Glock, W. S.: The development of drainage systems, *A synoptic View*, *Geogr. Rev.*, Vol. 21, pp. 475-482, 1931.
- 6) Dunne, T.: Formation and controls of channel networks, *Progr. in Phys. Geog.*, Vol. 4, pp. 211-239, 1980.
- 7) Howard, A. D. and MacLane, C. F., III: Erosion of cohesionless sediment by groundwater seepage, *Water Res. Res.*, Vol. 24, pp. 1659-1674, 1988.
- 8) 芦田和男・田中健二：裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(1) - 流路網の確率的シミュレーションを

中心として - 京都大学防災研究所年報第 18 号 B, pp. 513-528, 1975.

- 9) 芦田和男・澤井健二：裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(3) - 流路の 3 次元形状 - 京都大学防災研究所年報第 20 号 B-2, pp. 371-385, 1977.
- 10) 澤井健二・芦田和男：粘着性流路の侵食と横断形状に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 266 号, pp. 73-86, 1977.
- 11) 澤井健二：降雨による流路網の発達過程に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第 25 号 B-2, 1977.
- 12) 泉 典洋・パーカー, ゲーリー: チャンネルネットワークの初期形成機構, 土木学会水工学論文集, 第 38 巻, pp. 203-208, 1994.
- 13) 泉 典洋・パーカー, ゲーリー: 上流側から発生するチャンネルネットワークの初期形成機構, 東京工業大学土木工学科研究報告 No. 49, pp. 62-83, 1994.
- 14) Izumi, N. and Parker, G.: Inception of channelization and drainage basin formation: upstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 283, pp. 341-363, 1995.
- 15) Ariathurai, R. and Arulanandan, K.: Erosion rates of cohesive soils, *Proc. ASCE, Journal of Hydraulic Division*, Vol. 104 (HY2), pp. 279-283, 1978.
- 16) Nayfeh, A. H.: *Perturbation analysis*, John Wiley, New York, 1973.
- 17) Vanoni, V. A. (Editor): *Sedimentation Engineering*, ASCE, New York, 1975.
- 18) Raudkivi, A. J.: *Loose Boundary Hydraulics*, 2nd edition, Pergamon Press, Oxford, 1976.
- 19) Dietrich, W. E., Wilson, C. J., Montgomery, E. R., and McLean, J.: Analysis of erosion thresholds, channel networks, and landscape morphology using a digital terrain model, *J. Geology*, Vol. 101, pp. 259-278, 1993.
- 20) Yoon, Y. N. and Wenzel, H. G., Jr.: Mechanics of sheet flow under simulated rainfall, *J. of Hyd. Eng., Proc. of ASCE*, Vol. 97, pp. 1367-1386, 1971.
- 21) Shen, H. W. and Li, R. M.: Rainfall effect on sheet flow over smooth surface, *J. of Hyd. Eng., Proc. of ASCE*, Vol. 99, pp. 771-792, 1973.
- 22) Montgomery, D. R. and Dietrich, W. E.: Source area, drainage density and channel initiation, *Water Res. Res.*, Vol. 25, pp. 1907-1918, 1989.
- 23) Dietrich, W. E. and Dunne, T.: The channel head, *Channel Networks Hydrology*, Berlin, K. and Kirkby, M. J. eds. Wiley, pp. 175-219, 1993.

(1994. 9. 14 受付)

## ON INCIPIENT CHANNELS FORMED AT THE DOWNSTREAM END OF PLATEAUX

Norihiro IZUMI and Gary PARKER

At the inception of channelization, gullies are seen to be formed at the downstream end of plateau. Those gullies migrate upstream to become channels and develop into complex systems of channel network. In this paper, a mathematical model of gully formation is presented. Velocity and surface profiles of sheet flow over the plateau with the perturbed downstream end are calculated by solving St. Venant shallow water equations with the use of singular perturbation techniques. The calculated results show the tendency of flow concentration into indentations at the downstream end as expected. Applying the "threshold concept" to the results, characteristic wavelength of the order of (depth/plateau slope) is obtained, which is of the same order as that obtained from the "upstream-driven theory".