

特性曲線法に基づく河川水質の数値計算法

鮎川 登¹・片山能輔²・秋元賢吾³・根本浩史⁴

¹正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒169 東京都新宿区大久保 3-4-1)

²正会員 工修 新日本製鐵株式会社

³工修 東京電力株式会社

⁴工修 清水建設株式会社

河川における物質濃度を求めるための支配方程式である水質方程式の特性曲線法に基づく数値計算法を提案する。本論文で提案する水質の数値計算法は、特性曲線に沿って、すなわち、河川水とともに移動しながら濃度の変化を追跡するもので、数値拡散による誤差を生じない計算法である。

Key Words : simulation model, water quality equation, method of characteristics, river, tidal river

1. 序 論

河川における水質 (BOD, COD 濃度) は移流分散方程式などの水質方程式に基づいて計算される。移流分散方程式の数値計算法としては差分法が用いられることが多いが、数値計算の安定のために移流項の差分化に工夫が必要とされる。移流項の差分スキームとして風上差分, Lax-Wendroff スキーム, QUICK スキームなど数多くのスキームが提案されているが、数値拡散による誤差が問題になる¹⁾。

Holly-Preissmann²⁾は移流方程式を特性曲線法に基づいて解く方法を提案している。移流分散方程式を移流方程式と分散方程式に分離し、移流方程式と分散方程式を交互に解いて移流分散方程式の解を求める方法 (部分段階法: fractional step method) に基づいて、移流方程式を Holly-Preissmann 法, 分散方程式を中心差分法により解き、移流分散方程式の解を求める方法は計算精度が良いことが報告されている³⁾。Holly-Preissmann 法は、移流方程式の解が「特性曲線上で濃度が一定となる」ことを用いて、図-1 の点 (x_i, t_{n+1}) の濃度を求める方法である。図-1 の点 A を出発する特性曲線が点 (x_i, t_{n+1}) を通るものとする、点 (x_i, t_{n+1}) の濃度 C_i^{n+1} は点 A の濃度 C_A^n と等しくなる。そこで、時刻 t_n における計算格子点における濃度が既知であるとする、これらの値を用いて、点 A の濃度 C_A^n を推定すれば、時刻 t_{n+1} における点 (x_i, t_{n+1}) の濃度 C_i^{n+1} を求めることができることになる。Holly-Preissmann は、点 A の濃度 C_A^n を点 (x_{i-1}, t_n) と点 (x_i, t_n) の濃度と濃度勾配を用いて内挿する方法を提案した。Holly-Preissmann 法による移

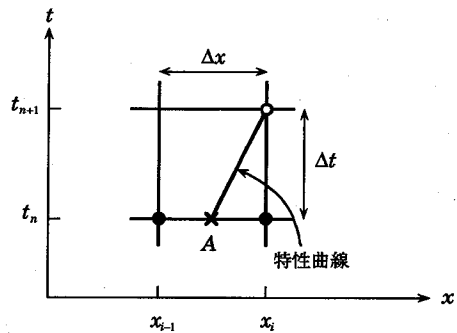


図-1 Holly-Preissmann 法の説明図

流方程式の数値解は従来の方法と比較して、精度が著しく向上することが示されているが、それでも、流速 $u = 0.5$ m/s, 計算距離間隔 $\Delta x = 200$ m の場合に、Courant 数 $C_r = u\Delta t / \Delta x = 0.25$ (Δt は計算時間間隔) としたときの移流方程式の計算では、計算開始 9,600 sec 後 (4.8 km 流下後) には最大濃度が 10% 低下することが示されている²⁾。理論的には移流によっては濃度は変化しないので、これは内挿の誤差による数値拡散によるものと考えられる。また、Holly-Preissmann 法では、2 点 (x_{i-1}, t_n) , (x_i, t_n) の濃度と濃度勾配を用いて、点 A の濃度を内挿するために、点 A がこの 2 点の間に入ることが必要とされ、Courant 数 C_r が 1 以下になるように計算時間間隔 Δt を設定しなければならないという制約条件がつく。

本研究は、汚濁負荷の大きい支川の合流による河川感潮部の水質汚濁の現状を把握し、水質改善対策の効果を

評価するためのシミュレーションモデルを作成することを目的にしている。このような河川の水質には移流の影響が卓越するものと考え、まず、移流だけによる汚濁物質の輸送を考え、潮汐作用により流下と遡上を繰り返す河川感潮部における水質の汚濁過程の基本的なメカニズムを把握することを考えた。そのために、数値拡散を生じない移流方程式の数値計算法を用いることが必要とされた。

本論文では、移流、減衰および分散を考慮した水質方程式を、部分段階法に従い、移流方程式、減衰方程式および分散方程式に分離して水質方程式の数値解を求めるが、移流方程式の数値計算には、特性曲線法を適用し、特性曲線に沿って濃度の変化を追跡することにより、数値拡散が生じないように配慮した。

移流方程式の数値計算における Holly-Preissmann の方法と著者の方法との違いは次のような点である。

(1) Holly-Preissmann の方法では、予め定められた計算格子点における解を求める。そのため、内挿が必要となり、数値拡散を生ずることになる。また、計算時間間隔 Δt のとり方が制約される。著者の方法では、特性曲線に沿って解を求めるので、移流方程式の厳密解が得られ、計算時間間隔 Δt のとり方には数値計算上の制約は受けない。河川感潮部における濃度の計算は数日間にとわって行うことになるのが普通である。Holly-Preissmann の方法では、例えば、流速 $u=1$ m/s、計算断面間隔 $\Delta x=100$ m の条件で計算する場合には、 $C_r = u\Delta t/\Delta x < 1$ の条件を満足させるために、計算時間間隔 Δt は 100 sec 以下にしなければならず、計算時間がかかることになる。河川感潮部における物質濃度の時間変化は緩やかであるので、精度上はこのような短い時間間隔で計算する必要はない。著者の方法では計算時間間隔は 30 分とも 1 時間ともすることができ、計算時間が短縮される。

また、著者の方法では特性曲線、すなわち、水粒子の移動の軌跡に沿って濃度を計算するので、河川水の流下に伴う汚濁の状況を知ることができ、河川における水質汚濁の過程を把握できる利点がある。

(2) Holly-Preissmann の方法では、初期条件および境界条件として濃度と濃度勾配を与えることが必要であるが、著者の方法では濃度を与えるだけでよい。

(3) 著者の方法によると、支川合流部の扱いが簡単になる。

本論文で提案する水質の数値計算法では、まず、河川の流れを計算し、特性曲線を求め、次に特性曲線に沿って濃度を計算する。

2. 流れの数値計算法

(1) 流れの支配方程式

河川の流れは開水路非定常流の連続方程式と運動方程式に基づいて計算する。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{n|Q|Q}{A^2 R^{4/3}} \right) - qv_q \cos \beta = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 A は流水断面積、 Q は流量、 H は水位、 R は径深、 n は Manning の粗度係数、 q は流路単位長当りの横流入量（流入のとき $q > 0$ 、流出のとき $q < 0$ ）、 v_q は横流入水の流速、 β は横流入の流れと主流のなす角度である。

(2) 流れの支配方程式の数値計算法

a) 支配方程式の差分法

流れの計算では、式 (2.1) および式 (2.2) を 4 点陰差分法により差分化し、得られた非線形連立方程式を Newton-Raphson 法により解いて、水位 H および流量 Q を求める。ここで用いる 4 点陰差分スキームは次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1} - f_i^n - f_{i+1}^n}{2\Delta t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x_i} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x_i} \\ f &= \frac{\theta}{2} (f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2} (f_i^n + f_{i+1}^n) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここで、 Δt は計算時間間隔、 Δx は計算断面間隔、 θ は重み係数、上付の添字 n は時刻を表わし、下付きの添字 i は計算断面の位置を表わす。

式 (2.3) の差分近似を用いて、式 (2.1) および式 (2.2) を差分化すると、それぞれ、次のようになる。

$$\theta (Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1} \Delta x_i) + (1-\theta) (Q_{i+1}^n - Q_i^n - q_i^n \Delta x_i) + \frac{\Delta x_i}{2\Delta t} (A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1} - A_i^n - A_{i+1}^n) = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x_i}{2\Delta t} (Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\ & + \theta \left\{ \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{n+1} + L_i^{n+1} \Delta x_i \right\} \\ & + (1-\theta) \left\{ \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^n + L_i^n \Delta x_i \right\} \\ & + \theta^2 g \bar{A}_i^{n+1} (H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1} + \bar{i}_i^{n+1} \Delta x_i) \\ & + \theta(1-\theta) \{ g \bar{A}_i^n (H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1} + \bar{i}_i^{n+1} \Delta x_i) \\ & + g \bar{A}_i^{n+1} (H_{i+1}^n - H_i^n + \bar{i}_i^n \Delta x_i) \} \\ & + (1-\theta)^2 g \bar{A}_i^n (H_{i+1}^n - H_i^n + \bar{i}_i^n \Delta x_i) = 0 \quad (2.5) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \bar{A}_i = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1}) \\ \bar{v}_i &= \frac{1}{2}(v_{fi} + v_{fi+1}), i_{fi} = \left(\frac{n^2 |Q_i| |Q_i|}{A^2 R^{4/3}} \right)_i \\ \bar{L}_i &= \frac{1}{2}(L_i + L_{i+1}), L_i = -q_i v_{qi} \cos \beta_i \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

である。 q_i は断面*i*~*i*+1間の河道の単位長当りの横流入量である。

b) 初期条件と境界条件

流れの計算では、式(2.4)および式(2.5)を用いて時刻 $n\Delta t$ の値から時刻 $(n+1)\Delta t$ の値を求めることになるが、そのために初期条件として、計算開始時における各計算断面の水位と流量を与えることが必要である。また、境界条件として上流端および下流端における水位あるいは流量を与えることが必要である。

感潮部の流れの場合には、はじめの水位は水平とし、流量は0として計算をはじめ、上流端および下流端で所定の水位あるいは流量になるように、上流端および下流端の水位あるいは流量を徐々に変化させながら計算を行い、所定の水位あるいは流量に達した後、最初の数時間の計算は予備計算とし、予備計算終了時の状態を初期条件として与える。

この流れの計算では、支川は横流入として扱うので、支川がある場合には合流点における支川の流量を境界条件として与えることが必要である。

c) 差分方程式の数値計算法

流れの計算は式(2.4)および式(2.5)を用いて行うが、式(2.4)と式(2.5)には Q_i^{n+1} , H_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} および H_{i+1}^{n+1} の4つの未知数が含まれるので、この2つの方程式だけでは解は求められない。そこで、式(2.4)と式(2.5)を $i=1$ から $N-1$ についてたてると、 $2N$ 個の未知数を含む $2N-2$ 個の方程式が得られる。 N は計算断面の数である。これらの方程式に加えて、上流端と下流端で1つずつ境界条件を与えると、 $2N$ 個の未知数に対して $2N$ 個の方程式が得られることになり、これらの方程式を連立して解くことにより各計算断面における水位と流量が求まる。これらの方程式には、非線形方程式が含まれているが、Newton-Raphson法により数値解を求めることができる⁴⁾。

3. 水質の数値計算法

(1) 水質方程式

図-2に示すように、流れに沿って距離 Δx だけ離れて断面I, IIをとり、断面I~II間について物質の収支式をたてる。

断面Iと断面IIの間断面における物質の濃度を C 、流速を u 、流水断面積を A とすると、移流および分

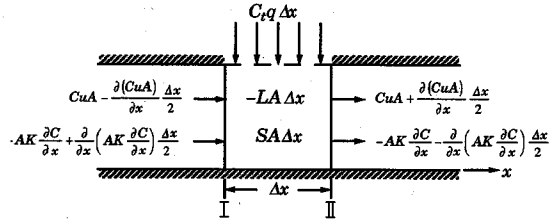


図-2 物質収支の説明図

散により断面I~II間に単位時間当りに流入する物質の量は

$$-\frac{\partial(CuA)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) \Delta x$$

となる。ここで、 E は分散係数である。

溶存酸素による分解やSSの沈澱などによる単位時間単位体積当りの物質の減少量を L とすると、断面I~II間での単位時間当りの物質の減少量は $LA\Delta x$ となる。

河床汚泥の巻上げや溶出などによる単位時間単位体積当りの物質の増加量を S とすると、断面I~II間での単位時間当りの物質の増加量は $SA\Delta x$ となる。

支川の物質の濃度を C_i 、支川の単位幅当りの流量を q とすると、支川からの単位時間当りの物質の流入量は $C_i q \Delta x$ となる。

以上によると、断面I~II間の物質の収支式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(CA\Delta x)}{\partial t} &= -\frac{\partial(CuA)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) \Delta x - LA\Delta x \\ &\quad + SA\Delta x + C_i q \Delta x \end{aligned} \quad (3.1)$$

流れの連続方程式(2.1)を用い、式(3.1)を書き換えると、次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) - L + S + \frac{q}{A} (C_i - C) \quad (3.2)$$

以下では、 L は濃度に比例するものとし、 $L = kC$ とする。 k は減衰係数である。 S については不明な点が多いので、 S は考慮しないことにする。また、支川の合流は別に扱うことにし、水質方程式として次式を用いる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) - kC \quad (3.3)$$

式(3.3)を解いて物質濃度 C を求める。

(2) 水質方程式の数値計算法

水質方程式(3.3)の数値計算法としては、式(3.3)を移流方程式、減衰方程式および分散方程式に分離して扱う方法(部分段階法)を用いる。

$$\text{移流方程式} \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{減衰方程式} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -kC \quad (3.5)$$

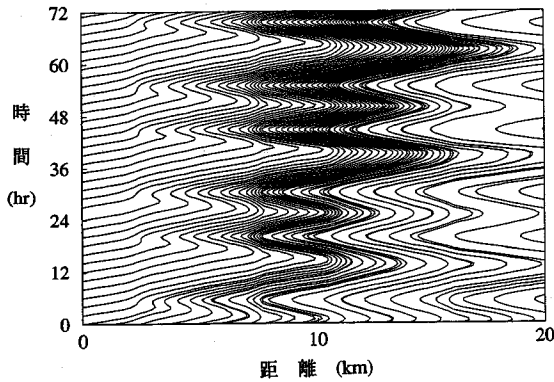


図-3 特性曲線（水粒子の移動の軌跡）の例

$$\text{分散方程式} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

a) 移流方程式の計算法

移流方程式 (3.4) の特性微分方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{dC}{0} \quad (3.7)$$

となり,

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad dC = 0 \quad (3.8)$$

となる。したがって、移流方程式 (3.4) の解は

$$\text{特性曲線} \quad \frac{dx}{dt} = u \text{ 上で, } C = \text{const} \quad (3.9)$$

と表わされる。移流方程式 (3.4) の解を式 (3.9) で表わす場合には、式 (3.4) を差分化して数値解を求めるさいに問題となる数値拡散は生じない。

特性曲線は、流れの計算により流速 $u = Q/A$ を求めると、特性曲線の式 $dx/dt = u$ により定められる。河川感潮部の流れの計算結果から特性曲線を描いた例を図-3に示す。

初期条件として各計算断面における初期濃度、境界条件として流れが順流の場合は上流端で、逆流の場合は下流端で濃度を与えると、特性曲線に沿って濃度が変化しないことから、特性曲線上の各点における濃度を求めることができる。

ただし、流れの順流時に特性曲線が支川の合流点を通過するときには、支川の流入により濃度が変化するので、濃度の計算が必要になる。なお、逆流時に特性曲線が支川の合流点を通過するときば、本川の水が支川に分派することになるので、濃度の変化は生じない。

順流時の支川合流部の濃度計算は、合流部の物質収支式

$$\frac{d(C_m V_m)}{dt} = (C_u - C_m) Q_u + (C_i - C_m) Q_i - (C_d - C_m) Q_d \quad (3.10)$$

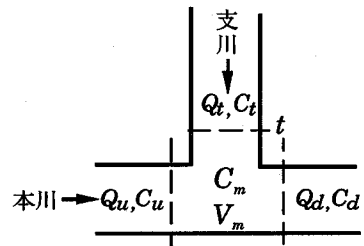


図-4 支川合流部の濃度の計算の説明図

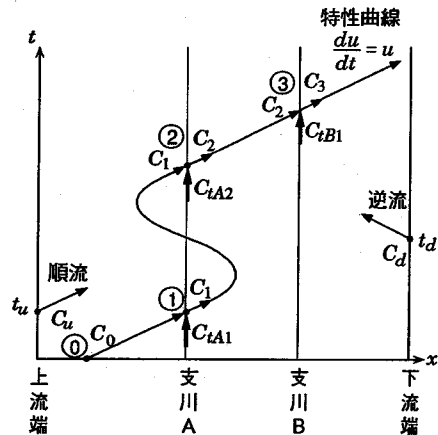


図-5 特性曲線法による移流方程式の解法の手順の説明図

に基づいて行う。ここで、 V_m は合流部の水の体積、 C_m は合流部の物質の濃度、 Q_u 、 Q_d 、 Q_i はそれぞれ合流部直上流、直下流および支川の流量、 C_u 、 C_d 、 C_i はそれぞれ合流部直上流、直下流および支川の物質の濃度である (図-4)。順流の場合は $C_m = C_d$ とする。

特性曲線法による移流方程式の解法の手順を河川感潮部の流れを例として、図-5を用いて説明する。計算対象の河道区間内の点①を出発する特性曲線について考える。特性曲線が支川Aの合流点に達する点①までは特性曲線上の濃度は点①の濃度 C_0 のままであるが、順流状態で支川Aの合流点を通過するときは支川Aからの流入水と混合することにより式 (3.10) で計算される濃度 C_1 になる。その後は、逆流により支川Aの合流点より上流に遡上し、順流時に再び支川Aの合流点に達する点②までは特性曲線上の濃度は C_1 のままである。点②では再び支川Aからの流入水と混合することにより式 (3.10) で計算される濃度 C_2 になる。その後は支川Bに達する点③までは濃度は C_2 のままであるが、点③で支川Bが合流すると式 (3.10) で計算される濃度 C_3 になる。以下、同様に、順流時に支川合流点を通過するたびに式 (3.10) で濃度を計算し、特性曲線上の濃度を求めていく。

上流端を順流時の時刻 t_u に出発する特性曲線に沿う

最初の濃度は上流端における時刻 t_u の濃度 C_u となる。下流端を逆流時の時刻 t_d に出発する特性曲線に沿う最初の濃度は下流端における時刻 t_d の濃度 C_d となる。その後の特性曲線上の濃度の計算は点①を出発する特性曲線上の濃度の計算と同じようにする。

上述した計算手順からわかるように、移流方程式の計算では初期条件として各計算断面の初期濃度を与え、境界条件として順流時には上流端および支川の濃度、逆流時には下流端の濃度を与えることが必要である。

b) 減衰方程式の計算法

減衰方程式 (3.5) の解は次式で与えられる。

$$C = C_0 e^{-kt} \quad (3.11)$$

ここで、 C_0 および C はそれぞれ時刻 $t=t_1$ および $t=t_1 + \Delta t$ における物質の濃度、 k は減衰係数で、時刻 t_1 から時刻 $t_1 + \Delta t$ の間は k は一定であるとする。

c) 分散方程式の計算法

分散方程式 (3.6) は Crank-Nicolson スキームにより差分化し、数値解を求める。すなわち、

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left[\left\{ (AE)^n_i + (AE)^n_{i+1} \right\} \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x_i} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ (AE)^n_{i-1} + (AE)^n_i \right\} \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1}} \right] \\ & + \frac{1}{2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left[\left\{ (AE)^{n+1}_i + (AE)^{n+1}_{i+1} \right\} \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_i^{n+1}}{\Delta x_i} \right. \\ & \quad \left. - \left\{ (AE)^{n+1}_{i-1} + (AE)^{n+1}_i \right\} \frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}} \right] \quad (3.13) \end{aligned}$$

とし、分散方程式 (3.6) を次のように差分化する。

$$\begin{aligned} & \frac{(AE)^{n+1}_i + (AE)^{n+1}_{i+1}}{2A_i^{n+1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1}} C_i^{n+1} \\ & + \left[1 + \frac{\Delta t}{2A_i^{n+1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left\{ \frac{(AE)^{n+1}_i + (AE)^{n+1}_{i+1}}{\Delta x_{i-1}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(AE)^{n+1}_{i-1} + (AE)^{n+1}_i}{\Delta x_i} \right\} \right] C_i^{n+1} \\ & - \frac{(AE)^{n+1}_i + (AE)^{n+1}_{i+1}}{2A_i^{n+1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \frac{\Delta t}{\Delta x_i} C_{i+1}^{n+1} \\ & = \frac{(AE)^n_{i-1} + (AE)^n_i}{2A_i^n(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1}} C_i^n \\ & + \left[1 - \frac{\Delta t}{2A_i^n(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left\{ \frac{(AE)^n_{i-1} + (AE)^n_i}{\Delta x_{i-1}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(AE)^n_i + (AE)^n_{i+1}}{\Delta x_i} \right\} \right] C_i^n \\ & + \frac{(AE)^n_i + (AE)^n_{i+1}}{2A_i^n(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i+1}} C_{i+1}^n \quad (3.14) \end{aligned}$$

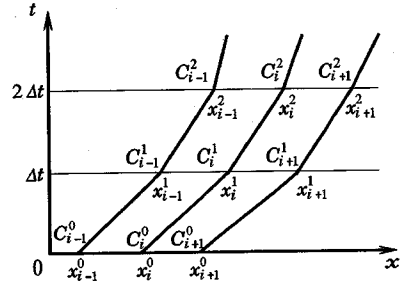


図-6 水質方程式の計算手順の説明図

差分方程式 (3.14) は Gauss の消去法などにより解くことができる。

d) 水質方程式の数値計算の手順

水質方程式 (3.3) を移流方程式、減衰方程式および分散方程式に分離して解き、物質の濃度を求めるための計算手順は次のようである (図-6)。

1) 計算断面 x_i^0 ($i=1, 2, \dots, N$; N は計算断面の数) を出発する水粒子の Δt 時間後の位置 x_i^1 を $x_i^1 = x_i^0 + 0.5(u_i^0 + \bar{u}_i^1)\Delta t$ として求める。ここで、 u_i^0 は時刻 0、位置 x_i^0 の流速、 \bar{u}_i^1 は時刻 Δt 、位置 $\bar{x}_i^1 = x_i^0 + u_i^0 \Delta t$ の流速である。 x_i^1 の濃度 C_i^1 は減衰がない場合は x_i^0 の濃度 C_i^0 に等しく、 $C_i^1 = C_i^0$ とし、減衰がある場合は $C_i^1 = C_i^0 e^{-k\Delta t}$ とする。

2) 式 (3.14) で $C_i^n = C_i^1$ 、 $\Delta x_i = x_{i+1}^1 - x_i^1$ として C_{i+1}^{n+1} を求め、 $C_i^1 = C_{i+1}^{n+1}$ として x_i^1 の濃度 C_i^1 の値を更新する。更新された C_i^1 が移流、減衰および分散による Δt 時間後の x_i^1 の濃度、すなわち、時刻 $t = \Delta t$ における水質方程式の解になる。

3) 時刻 $t = \Delta t$ における点 x_i^1 を出発する水粒子の Δt 時間後 (時刻 $t = 2\Delta t$) の位置 x_i^2 を $x_i^2 = x_i^1 + 0.5(u_i^1 + \bar{u}_i^2)\Delta t$ として求める。ここで、 u_i^1 は時刻 Δt 、位置 x_i^1 の流速、 \bar{u}_i^2 は時刻 $2\Delta t$ 、位置 $\bar{x}_i^2 = x_i^1 + u_i^1 \Delta t$ の流速である。 x_i^2 の濃度 C_i^2 は $C_i^2 = C_i^1 e^{-k\Delta t}$ として求める。

4) 式 (3.14) で $C_i^n = C_i^2$ 、 $\Delta x_i = x_{i+1}^2 - x_i^2$ として C_{i+1}^{n+1} を求め、 $C_i^2 = C_{i+1}^{n+1}$ として x_i^2 の濃度 C_i^2 の値を更新する。更新された C_i^2 が時刻 $t = 2\Delta t$ における水質方程式の解になる。

以下、順次、所定の時刻まで同様の計算を繰り返すことにより各特性曲線に沿う濃度の変化を求めることができ、濃度の場所的分布および時間的分布を求めることができる。

計算断面 x_i^0 における濃度の時間変化は、各時刻における各特性曲線上の点 x_i^n の濃度 C_i^n を用いて内挿することにより求められる。

本論文で提案した水質の数値計算法では、濃度の計算は特性曲線に沿って行うので、数値拡散による誤差は生じない。また、計算断面における濃度は内挿によって求

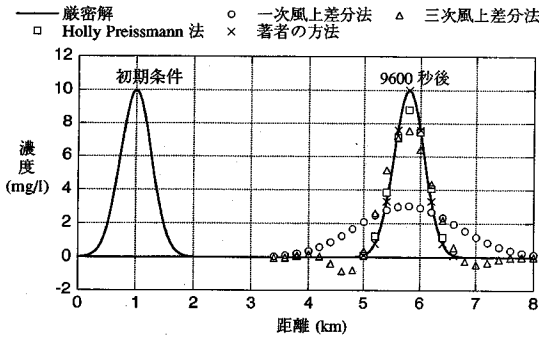


図-7 移流方程式の厳密解と数値解の比較

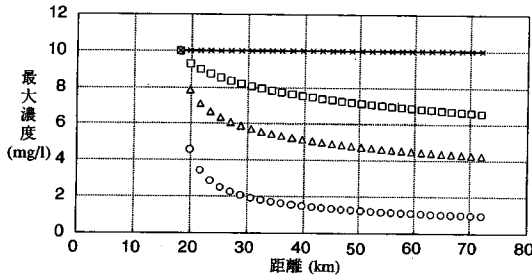


図-8 移流方程式による最大濃度の厳密解と計算値の比較

めることになるが、内挿された値はその後の濃度の計算には用いないので、内挿による誤差は累積されず、計算精度を保つことができる。

4. 水質の数値計算法の妥当性の検討

本論文で提案した河川水質の数値計算法の妥当性を検討するために、移流方程式および移流分散方程式について、厳密解（解析解）と1次および3次精度の風上差分法、Holly-Preissmann 法および著者の方法による数値解を比較し、図-7、図-8 および図-9、図-10 に示した。ただし、計算条件は Holly-Preissmann の論文²⁾に示された条件を参考にし流速を 0.5 m/s、分散係数を $1 \text{ m}^2/\text{s}$ とし、計算断面間隔は 100 m、計算時間間隔は 60 sec とした。

図-7 および図-8 によると、移流方程式については、Holly-Preissmann 法は、1次および3次精度の風上差分法に比べ、精度が向上しているが、数値拡散を生じていることがわかる。著者の方法は数値拡散を生じず、厳密解と一致する解を与えることがわかる。

図-9 および図-10 によると、移流分散方程式についても、Holly-Preissmann 法は、1次および3次精度の風上差分法に比べ、精度が向上しているが、数値拡散を生じていることがわかる。ただし、移流方程式の場合より、誤差は小さくなっている。著者の方法は厳密解とは

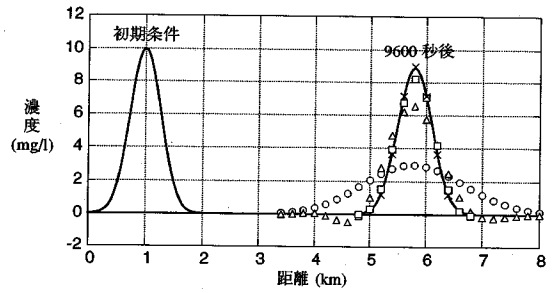


図-9 移流分散方程式の厳密解と数値解の比較 (分散係数 $1 \text{ m}^2/\text{s}$ の場合)

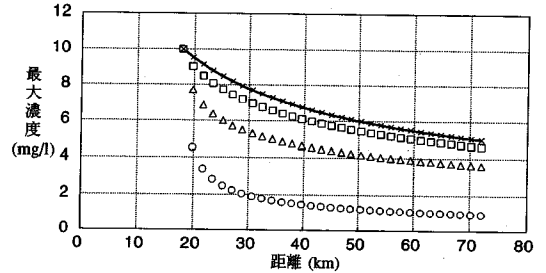


図-10 移流分散方程式による最大濃度の厳密解と計算値の比較 (分散係数 $1 \text{ m}^2/\text{s}$ の場合)

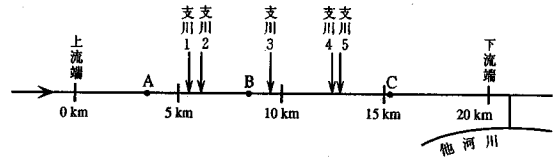


図-11 計算対象河川区間

ば一致する解を与えることがわかる。

5. 河川感潮部の水質計算への適用例

汚濁負荷の大きい支川の合流により水質が汚濁されている河川感潮部の水質計算に、本論文で提案した数値計算法を適用した結果について述べる。

計算の対象としたのは、Y川の河口から 32 km 地点を上流端とし、12 km 地点を下流端とする 20 km の区間である。Y川の感潮部は河口から約 27 km の地点 A (図-11) 付近までであり、上流端は潮汐の影響を受けない非感潮部である。塩分の遡上は、計算対象区間の下流端付近で僅かにみられる程度であるので、計算では塩分の影響は考慮しない。

計算対象区間のある年における平均的な BOD 濃度の縦断分布を示すと、図-12 のようになり、汚濁負荷の大きい支川の合流により水質が汚濁されていることが認められる。

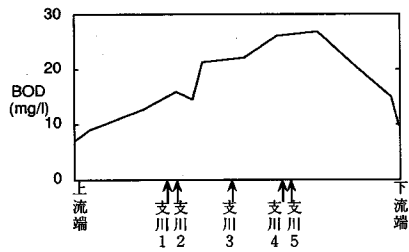
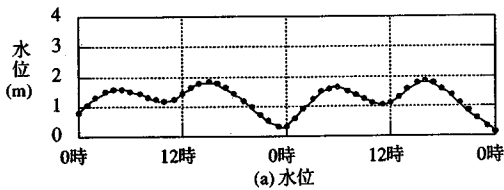


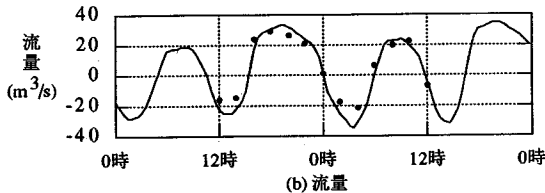
図-12 計算対象区間のBOD縦断分布の例

表-1 支川の α , Q_{i0} とBOD濃度

支川	α	Q_{i0}	BOD(mg/l)
1	0.02	0.10	10
2	0.02	0.20	30
3	0.14	0.00	50
4	0.12	0.00	100
5	0.28	0.00	30



(a) 水位



(b) 流量

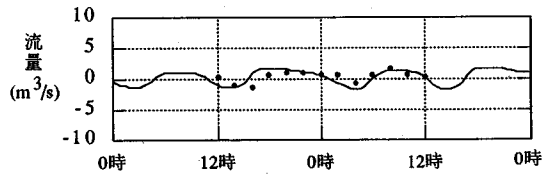
図-13 流れの計算値と測定値の比較 (地点C)
(—計算値, ・測定値)

流れの計算の境界条件は上流端および下流端とも水位の観測値を与えた。計算対象区間には、5つの支川が合流するので、境界条件として支川の流量を与えることが必要であるが、支川の流量は、常時は観測されていないので、次式で与えた。

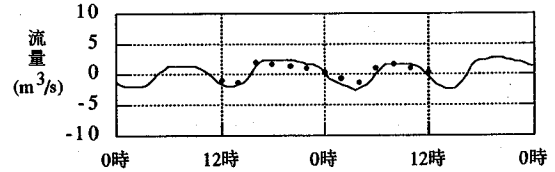
$$Q_i = \alpha Q + Q_{i0}, \quad q = Q_i / B_i \quad (5.1)$$

ここで、 Q_i は支川の流量、 Q は支川合流部の直下流の断面の本川の流量、 α および Q_{i0} は係数、 q は支川の単位幅当りの流量、 B_i は支川の河幅である。 α および Q_{i0} の値は、支川の流量の測定値と式(5.1)による計算値が一致するように定めた(表-1)。なお、式(5.1)は、支川合流部下流の本川流量 Q の一部は支川からの流量 Q_i で構成されることを考えて、 $Q_i = \alpha Q$ として支川流量を表示することを試みたが、この関係では支川の観測流量と合わせることができない場合があったため、式(5.1)のような関係を用いることにした。

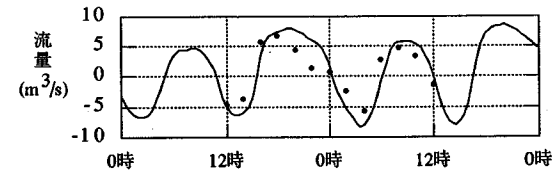
流れの計算の初期条件は、2.(2)b)で述べた方法



(a) 支川3



(b) 支川4



(c) 支川5

図-14 支川流量の計算値と測定値の比較
(—計算値, ・測定値)

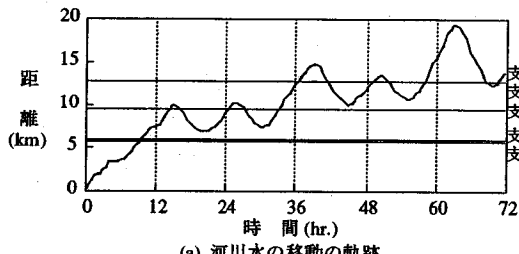
により与えた。ただし、予備計算の時間は20時間とした。

流れの計算は、河道のManningの粗度係数 n を0.025、式(5.1)の係数 α と Q_{i0} を支川ごとに表-1に示す値とし、計算時間間隔 Δt は1,800 sec、計算断面間隔 Δx は支川合流部を除いては、ほぼ100 mとし、重み係数 θ は通常この種の計算で用いられる0.55として行った。計算結果の一例として図-11の地点Cにおける水位と流量の計算値と測定値を比較した結果を図-13に示す。他の計算例についても図-13に示した結果と同じような結果が得られており^{5)~7)}、流れの数値計算法は妥当なものと考えられる。なお、支川の流量について式(5.1)による計算値と測定値を比較すると、図-14のようになる。図-14によると、支川の流量は式(5.1)によりほぼ与えられることがわかる。

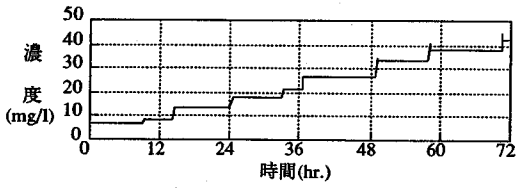
水質の計算はBOD濃度を対象として行った。河川感潮部の水質の計算では、境界条件として順流時に上流端および支川の濃度、逆流時に下流端の濃度を与えることが必要である。

上流端は順流部にあり、濃度の変化は小さいので、測定値の平均的な値である6 mg/lを上流端の濃度の境界条件として与えた。

支川の濃度は順流時に与えることが必要であるが、濃度の観測は通常は行われていないので、順流時の支川からの流入水は逆流時に支川を遡上した水が順流時に本川に戻り、本川からの逆流水が流出し終えた後は支川の水



(a) 河川水の移動の軌跡



(b) 河川水の移流と合流によるBOD濃度の変化

図—15 河川水の流下に伴う BOD 濃度の変化

が本川に流出するものと考え、順流時の支川の濃度を与えた。なお、各支川の BOD 濃度は、観測値の平均的な値を参考にして、表—1 に示すような値を与えた。

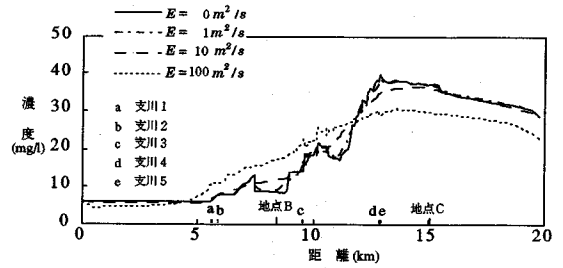
下流端では境界条件として、逆流時に濃度を与えることが必要であるが、濃度の観測は通常は行われていないので、下流端では順流時に流下した水が逆流時に遡上するものとして、逆流時の下流端の濃度を与えた。

水質の計算の初期条件としては、各計算断面の濃度を与えることが必要であるが、ここでは、各計算断面の初期濃度を適当に仮定した。

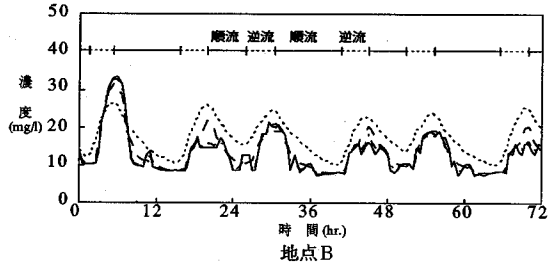
水質の計算は計算時間間隔 Δt は 1,800 sec, 計算断面間隔 Δx は、支川合流部を除いては、ほぼ 100 m として行った。

汚濁負荷の大きい支川の合流による河川感潮部の水質汚濁過程を把握するために、移流だけを考慮して、上流端を出発した河川水が支川の合流によってどのように汚濁されていくかを調べるために行った計算結果を示すと、図—15 のようになる。

図—15 (a) によると、河川感潮部では、河川水は潮汐的作用により流下と遡上を繰り返すことがわかり、図—15 (b) によると、汚濁負荷の大きい支川の合流点を順流状態で流下するごとに支川からの汚濁水の流入を受け、BOD 濃度が大きくなるのがわかる。例えば、図—15 の場合は支川 3 の合流点を順流状態で 3 回通過するが、最初に支川 3 の合流点に到達した時点の濃度は 8.6 mg/l であるが、支川 3 の合流点を順流状態で通過するごとに濃度は 13.7, 18.1, 21.4 と増加する。また、支川 4, 5 の合流点を順流状態で 4 回通過するが、最初に支川 4, 5 の合流点に到達した時点の濃度は 21.4 mg/l であるが、支川 4, 5 の合流点を順流状態で通過するごとに濃度は 26.7, 33.5, 38.3, 42.0 と増加する。



(a) BOD濃度の縦断変化



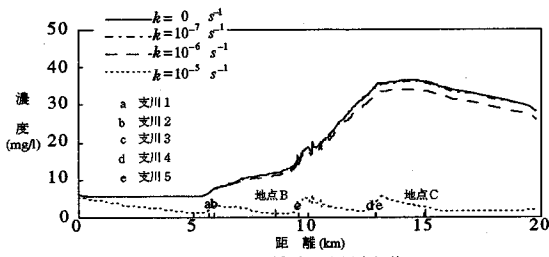
(b) BOD濃度の時間変化

図—16 BOD 濃度の計算結果におよぼす分散係数の影響

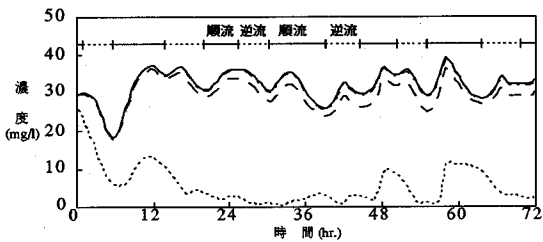
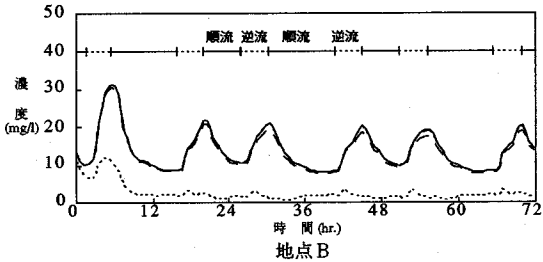
これが汚濁負荷の大きい支川が合流する場合の河川感潮部の水質汚濁の基本的なメカニズムであると考えられる。なお、図—15 (b) によると、移流の計算は数値拡散を生じずに行われていることがわかる。

図—15 の計算では、移流だけを考えたが、河川における物質濃度は移流の他に分散や減衰などの影響を受ける。本論文で提案した水質の数値計算法では、分散の影響は分散係数で、減衰の影響は減衰係数で表示されるが、これらの係数の特性は明らかでないので、ここでは分散係数および減衰係数の値を仮定し、これらの係数が水質の数値計算結果におよぼす影響について検討する。

減衰がない場合 (減衰係数 $k=0$) について、分散係数 E を 0, 1, 10, 100 m^2/s の一定とした場合について水質計算し、ある時刻における濃度の縦断変化および地点 B, C における濃度の時間変化を示すと、図—16 のようになる。図—16 (a) によると、支川の合流により Y 川の水質が汚濁されている状況がわかる。図—16 (b) によると、地点 B では逆流時に支川 3 からの汚濁水が遡上することにより濃度が大きくなり、地点 C では逆流時に水質の良い他河川 (BOD 濃度 5 mg/l) からの水が遡



(a) BOD濃度の縦断変化



(b) BOD濃度の時間変化

図—17 BOD濃度の計算結果におよぼす減衰係数の影響

上することにより濃度が小さくなるなど、各地点の濃度は潮位変化に応じて変化することがわかる。また、図—16によると、分散係数が $10 \text{ m}^2/\text{s}$ 以下のときは分散係数の影響はあまり受けないが、 $100 \text{ m}^2/\text{s}$ になると、分散の影響により濃度の計算結果がかなり変わることがわかる。

つぎに、分散係数 E の値を $10 \text{ m}^2/\text{s}$ とし、減衰係数 k を $0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ の一定とした場合について水質計算をし、ある時刻における濃度の縦断変化および地点 B, C における濃度の時間変化を示すと、図—17 のようになる。図—17によると、減衰係数 k が 10^{-6} s^{-1} 程度のときは濃度の計算結果は減衰係数の影響をあまり受けないが、減衰係数が 10^{-5} s^{-1} になると、減衰係数の影響を受け、濃度の計算値がかなり小さくなることがわ

かる。

6. 結 論

河川における水質の数値計算法を提案し、汚濁負荷の大きい支川の合流により水質が汚濁されている河川感潮部の水質計算に適用し、河川感潮部の水質汚濁過程について考察した例を示した。

本論文で提案した河川における水質の数値計算法は、特性曲線法に基づくもので、河川水とともに移動しながら物質濃度の変化を追跡するもので、水質方程式の数値計算で問題になる数値拡散を生じない計算法であるが、水質に関する十分な測定データが得られなかったために、この数値計算法の妥当性を検証することはできなかった。また、水質方程式に含まれるパラメータである分散係数および減衰係数は水質の計算結果に重要な影響をおよぼすことを示したが、分散係数および減衰係数の特性を明らかにすることはできなかった。水質観測を行い、測定データを収集し、数値計算法の妥当性を検証するとともに、分散係数および減衰係数の特性を明らかにすることが今後の課題である。

最後に、本研究の遂行にあたり貴重な資料を提供して下さいました関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) Fletcher, C.A.J. : *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol.1, Springer-Verlag, pp.286-288, 1991.
- 2) Holly F.M. and Preissmann, A. : *Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions*, *Proc. ASCE*, No. HY 11, pp.1159-1277, Nov., 1977.
- 3) 小松利光：環境水理学における拡散問題，土木学会水理委員会，1990年度水工学に関する夏期研修会講義集 A コース，pp.A-3-1-25, 1990.
- 4) Anderson, M.G and Burt, T.P. : *Hydrological Forecasting*, John Wiley & Sons, pp.437-503, 1985.
- 5) 鮭川 登，大工原毅，石井 孝：隅田川の流れにおよぼす水門操作の影響，土木学会第 45 回年次学術講演会講演概要集第 2 部，pp.198-199, 1990.
- 6) 鮭川 登，酒井浩二，長峰春夫：河川感潮部の水質と流れの解析，土木学会第 46 回年次学術講演会講演概要集第 2 部，pp.494-495, 1991.
- 7) 片山能輔，鮭川 登，貝瀬弘樹：河川感潮部における浄化水導水時の流れの数値計算，土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集第 2 部，pp.490-491, 1993.

(1994. 5. 30 受付)

NUMERICAL SOLUTION OF WATER QUALITY EQUATION FOR RIVERS

Noboru SUKEGAWA, Yoshisuke KATAYAMA, Kengo AKIMOTO
and Hiroshi NEMOTO

Numerical method of the solution of water quality equation for rivers is proposed on the basis of the method of characteristics. The movement of water in non-tidal or tidal rivers is simulated by solving the continuity equation and momentum equation for unsteady flows by the implicit finite difference method. Then, water quality changes are simulated along the trace of the movement of water by solving the water quality equation. The results of simulation of water quality are presented to understand the pollution process in tidal rivers.