

**投稿論文(和文報告)**

**TECHNICAL  
REPORT**

# 変動疲労荷重を受けるコンクリートのマイナー数の評価と破壊確率に関する基礎的考察

吉川弘道<sup>1</sup>・中林秀和<sup>2</sup>・山内洋志<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒158 世田谷区玉堤 1-28-1)

<sup>2</sup>武蔵工業大学 (現 大林組㈱)

<sup>3</sup>正会員 日本舗道㈱

一定振幅荷重および変動荷重下にあるコンクリートの疲労強度は、大きなばらつきをもつことが知られ、限界状態設計法における大きな障害となっている。本論は、まず作用応力の頻度分布と  $S-N$  線図が与えられたときの一般化マイナー数の定式化を出発点とし、これを確率量として取り扱うことを提案した。次に、総作用回数を正規分布、疲労寿命を対数正規分布としたときの疲労破壊の出現率をモンテカルロシミュレーションによって求めた。さらに、疲労破壊するときの一般化マイナー数に対する確率統計学的諸量 (期待値、中央値、標準偏差または分散) をシミュレーションおよび解析の両面から検討するとともに、一部既往実験との対比を行った。

**Key Words :** *fatigue strength, variable cyclic load, generalized Miner's number, probability of failure, normal/log normal probability distribution, Monte Carlo simulation*

## 1. まえがき

コンクリートの疲労破壊は、現行の限界状態設計法における、検討すべき限界状態の一つであり、コンクリート構造物の耐久性を考える際の重要な要素となる<sup>1),2)</sup>。しかし、コンクリートの疲労強度は大きなばらつきを示すことがよく知られ、これはコンクリート部材の疲労耐力に大きな不確実性を与えるものである<sup>3),4)</sup>。さらに、変動繰返し荷重を受ける場合に多用される線形被害則 (いわゆる Miner-Palmgren rule) についても、大きな変動を示すことが指摘され、疲労破壊時のマイナー数の設定が多く議論されている<sup>5)</sup>。加えて、作用回数そのものも無視し得ない確率変数となることが多い。このような疲労問題に関係する種々のレベルにおける変動性や不確実性が存在することは、完成されたコンクリート構造物の疲労寿命に変動の程度が不明な、言わば“不確かな不確実性”を包含することを示唆するもので、設計作業における危惧すべき障害である。従って、変動荷重下におけるコンクリート材料の疲労強度を推定する合理的な方法、もしくはばらつきを受認し、破壊確率によって評価する方法<sup>6)</sup>などを確立することが急務であると考えている。このため、例えば、阪田ら<sup>5)</sup>、Leeuwenら<sup>6)</sup>による実験が、疲労寿命のばらつきとマイナー数のばらつきの問題について貴重なデータを与えている。

そこで、本研究は、まず、変動荷重下にあるコンクリートを対象とし、このときの累積損傷量を一般化マイナー

数として定式化することから出発する。そして、総作用回数が正規分布、一定振幅荷重に対する疲労強度が対数正規分布で表される確率変数と仮定し、このときの破壊確率をモンテカルロシミュレーションによって求めるものである。さらに、疲労破壊するときのマイナー数に対する、期待値 (平均値) と分散をシミュレーションおよび解析から考察するとともに、一部実験結果との対比も試みた。とくに、混同しがちな中央値と期待値 (平均値) の区別についても整理を行った。

本論におけるシミュレーション結果および考察は、疲労限界状態に対する新しい設計法の提案に直接つながるものではないが、そのための基礎的資料と考え方を付与し得ると考えている。

## 2. 一般化マイナー数の算定と破壊確率

ここでは、材料の  $S-N$  線図ならびに荷重  $S$  の頻度分布  $f_s(S)$  が与えられたときの一般化マイナー数を定義するとともに疲労破壊に関する生起確率について考える。

### (1) 線形被害則の適用と破壊確率の算定法

荷重  $S$  の頻度分布  $f_s(S)$  曲線上でのある微小応力負荷区間  $S \sim S+dS$  間の作用回数  $n(S, t)$  は、ある  $t$  年次の年間総作用回数  $g(t)$  を用いて次のように表される (図 1 参照)。

$$n(S, t) = g(t) f_s(S) dS \quad (1)$$

この負荷レベルに相当する破壊回数は、負荷  $S$  に依存し、 $N(S)$  のように記述する。よって1年間の  $n(S)$  回の疲労荷重によって増加する損傷量は、線形被害則を仮定すると次のようなマイナー数の増分  $dM$  によって表すことができる。

$$dM(S, t) = \frac{n(S, t)}{N(S)} = \frac{g(t)f_s(S)dS}{N(S)} \quad (2)$$

ここで、負荷応力を最小値から最大値 ( $S_{\min} \sim S_{\max}$ ) まで積分すると、次式のようなマイナー数が得られる。

$$M = \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} dM(S, t) = \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{g(t)f_s(S)dS}{N(S)} \quad (3)$$

ここで、 $S_{\min}$  および  $S_{\max}$  は応力下限と応力上限を表すもので、 $S_{\max}$  は想定される最大負荷応力を表わし、 $S_{\min}$  は事実上の疲労限 (threshold) と考える。さらに、 $t$  年間の累積損傷量は、次式のように記述することができる。

$$M = \int_0^t \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} g(t) \frac{f_s(S)}{N(S)} dS dt = G \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{f_s(S)}{N(S)} dS \quad (4)$$

上式では、 $g(t)$  が他の変数に対して独立であると考え、 $t$  年次までの総作用回数を  $G(t) = \int_0^t g(t) dt$  とした。また、マイナー数の増分が疲労荷重の履歴に依存する場合には、上記の多重積分を時間歴  $t$  に従って処理する必要があるが、本論では単純化のため、両変数が独立であると仮定する。このことによって、時間歴  $t$  の概念はなくなり、全て総作用回数  $G$  によるものとして考えることができる。本論では、上式(4)を一般化マイナー数と呼び、本論の基本量となる。これを適当に離散化すれば、後述の式(11)のように従来のマイナー数に帰着する。

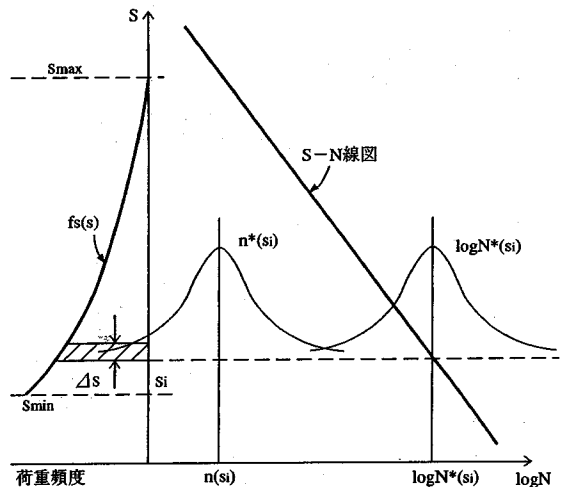
また、式(4)のような帰結は線形被害則の成立 (マイナー則) を前提としていることを再度付記する。これは、現行示方書<sup>2)</sup>ではその適用を認めているものの<sup>2)</sup>、一般には必ずしも容認されず (例えば、文献11))、さらに検討が必要である。

次に、疲労寿命  $N(S)$  および総作用回数  $G$  が確率変数であると考え、これらを  $N^*(S)$ 、 $G^*$  と記述する。このため、マイナー数  $M$  も確率変数  $M^*$  となり、式(4)は次のように書換えられる。

$$M^* = G^* \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{f_s(S)}{N^*(S)} dS \quad (5)$$

ここで、本論における性能関数  $Z$  を以下のように定義し、モンテカルロシミュレーションを採用する。

$$Z(M^*) = M^* - 1 \quad (6)$$



図一 荷重頻度分布関数  $f_s(S)$  と  $S-N$  線図および  $n(S_i)$  と  $N(S_i)$  の確率分布

$Z(M^*) \geq 0$  — fail (破壊)

$Z(M^*) < 0$  — safe (非破壊)

そして、この試行を  $L$  回行い ( $M^*$  を  $L$  回発生させ)、そのうち、破壊を起こした回数 ( $Z \geq 0$  になったときの回数) を  $K$  とすると、破壊率  $P_f$  は、以下のように表すことができる。

$$P_f = K/L \quad (7)$$

一方、式(4)を確定的に考え、この時の一般化マイナー数を  $M_0$  とすると、これは以下の積分を実行すればよい。

$$M_0 = G_0 \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{f_s(S)}{N_0(S)} dS \quad (8)$$

したがって、このマイナー数  $M_0$  は形式上の値として定義される。(本論文では、上添字\*を確率量、下添字0を確定量として用いている。)

すなわち、確率量として与えられる  $M^*$  によって性能関数が定義されるのに対して、 $M_0$  は、言わば見掛け上のマイナー数と見なすことができる。これは、真の値  $M^*$  を用いると、定義により、厳密に  $M^*=1$  にて疲労破壊するが、見かけ上の値  $M_0$  では、ばらつきがあるため、必ずしも、 $M_0=1$  にて疲労破壊とはならず、 $M_0 \geq 1$  で疲労破壊しないこともあり、 $M_0 < 1$  で疲労破壊することもある。設計レベルではこの  $M_0$  を取り扱わなければならないことに注意する必要がある。

## (2) モンテカルロシミュレーション

ここで、 $G^*$ 、 $N^*(S)$  の2変数を確率変数とし、モンテカルロシミュレーションによって式(6)を多数回演算し、式(7)より破壊確率  $P_f$  を求めるものである。

以下、その数値計算の手順を示す。

まず、応力負荷  $S$  の積分範囲  $S_{\min} \sim S_{\max}$  を  $k$  等分すると、微小増分  $\Delta S$  は、次のように表される。

$$\Delta S = |S_{\min} - S_{\max}| / k \quad (9)$$

また、ある  $i$  番目の応力負荷  $S_i$  における  $S_i \sim S_i + \Delta S$  間の作用回数 (図-1) は、次式により得られる。

$$n^*(S_i) = G^* f_s(S_i) \Delta S \quad (10)$$

従って、全応力負荷  $S_{\min} \sim S_{\max}$  における一般化マイナー数は、先に定式化したマイナー数 (式(5)) により、次式のように離散化量として書き直すことができる。

$$M^* = \sum_{i=1}^k \frac{n^*(S_i)}{N^*(S_i)} \quad (11)$$

また、本論では、 $G^*$  が正規分布、 $N^*$  が対数正規分布 ( $\log N^*$  が正規分布) に従う確率変数であると仮定する。そこで、シミュレーション手法として、正規乱数による処理を行った。すなわち、両確率変数は、

$$\begin{aligned} G^* &= G_0 + \sigma_f \cdot u \\ &= G_0(1 + V_f \cdot u) \end{aligned} \quad (12)$$

$G_0$ : 作用回数の平均値

$\sigma_f$ :  $G^*$  の標準偏差

$u$ : 正規乱数

$V_f$ : 作用回数の変動係数

$$\log N^* = (1 + V_N \cdot v) \log N_0 \quad (13)$$

$N_0$ : 疲労寿命の平均値

$\sigma_N$ :  $\log N^*$  の標準偏差

$v$ : 正規乱数

$V_N$ : 疲労寿命の変動係数

なる操作で与えられる。そして、コンピューター上で生成した一様乱数から、中心極限定理を用いて正規乱数に変換し、一連の数値処理を行い、破壊するか否かのシミュレーションを実行するものである。

### (3) 変動応力負荷 $S$ と疲労特性のモデル化

$S-N$  線図を記述するための応力負荷パラメータ  $S$  として、上限応力、応力振幅あるいはその両者が用いられるが、ここでは上限応力を考える。さらに  $S$  の分布は、頻度関数  $f_s(S)$  によって表され、上限応力比の最大値、最小値をそれぞれ新たに  $S_{\max}$ 、 $S_{\min}$  とする (従って、 $S_{\max}$ 、 $S_{\min}$  は、疲労荷重一振幅のいわゆる最大、最小応力を表すものではないことに注意する必要がある。)

そして、 $f_s(S)$  は、例えば、指数分布に従うと仮定すると、その分布関数は次式で表される<sup>5)</sup>。

$$f_s(S) = C \cdot \exp\{-C(S - S_{\min})\} \quad (14)$$

ただし、これは次式を満足するものとする。

$$\int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f_s(S) dS = 1 \quad (15)$$

また、係数  $C$  は、上限応力比が大きくなるにつれてその生起確率が小さくなる程度を表し、本論では、阪田ら<sup>5)</sup>の検討結果をそのまま用い、 $C=3/10$ 、 $4/10$ 、 $5/10$  の3者

表-1 試行回数  $L$  の検討

No	C	$V_f$	$V_N$	$G_0$	$P_f$
1	3/10	20%	20%	13000	52.4%
2	4/10	20%	20%	24000	48.3%
3	5/10	20%	20%	39000	48.3%

( $L$ =最大 100000,  $k=30$ )

について考えるものとする。

また、疲労破壊に至るまでの作用回数  $N$  と応力負荷  $S$  は、確率変数と考えるので、その平均値を特に  $N_0$  および  $S$  とすると、これはよく用いられるような  $S-N_0$  線図として表すことができる。すなわち、

$$S = \gamma_1 - \gamma_2 \cdot \log N_0 \quad (16)$$

ここで、 $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  は定数であり、阪田ら<sup>5)</sup>による実験式を採用した。

さらに、ある応力負荷  $S$  における疲労寿命  $N$  のばらつきが、 $\log N$  上での正規分布、すなわち、対数正規分布  $f(\log N)$  に従うと仮定するもので、その確率密度関数は、以下のように表される。

$$f(\log N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma[\log N]} \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\log N - E[\log N]}{\sigma[\log N]} \right\}^2\right] \quad (17)$$

$E[\log N]$ :  $\log N$  の期待値

$\sigma[\log N]$ :  $\log N$  の標準偏差

## 3. 破壊確率に関するシミュレーション

### (1) シミュレーション精度に関する検討

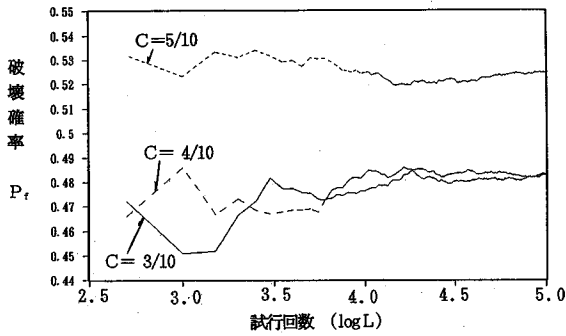
ここでは、破壊確率に関する数値シミュレーションを実行する時に必要となる、試行回数と荷重頻度分布の分割数についての検討を行う。これらは、所要の計算精度と計算時間との兼ね合いを勘案して決定するものである。

#### a) 試行回数 $L$ の検討

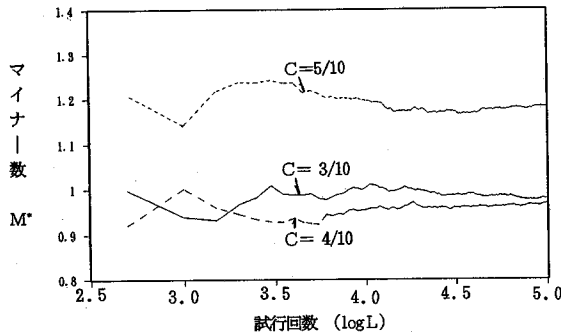
モンテカルロ法における適正な試行回数  $L$  を決定するため、表-1に示す、荷重頻度分布係数  $C$  を変えた3とおりについてシミュレーションを行った。また、総作用回数と疲労寿命の変動係数、 $V_f$ 、 $V_N$  は、それぞれ20%とし、総作用回数の平均値  $G_0$  は、破壊確率  $P_f$  が約50%となるように決定した。

シミュレーション結果を図-2(a)、(b)に示す。図-2(a)は破壊確率  $P_f$  の収束状況、図-2(b)はマイナー数  $M^*$  の収束状況をそれぞれ示している。また、収束状況をさらに見極め易くするために、図-3(a)、(b)のように、変化率  $R$  によって表現した。これらは、縦軸を以下に定義した変化率という形式で表現したものである。

$$R(P_f) = \frac{|P_{fL+1} - P_{fL}|}{1/2(P_{f\max} + P_{f\min})} \quad (18)$$



(a) 試行回数  $L$  に対する破壊確率  $P_f$  の収束状況



(b) 試行回数  $L$  に対するマイナー数  $M^*$  の収束状況

図一 総試行回数  $L$  に関する収束状況の検討

$$R(M) = \frac{|M_{L+1} - M_L|}{1/2(M_{\max} + M_{\min})} \quad (19)$$

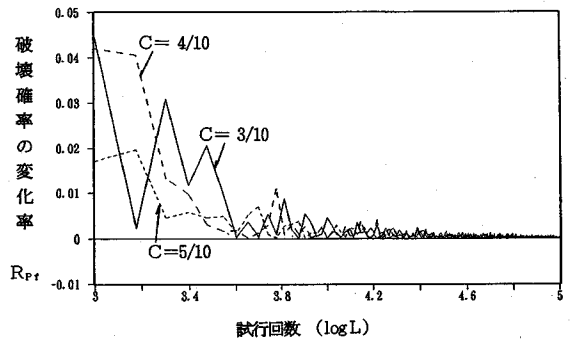
図一 2, 3 より判断されるように、 $P_f$ ,  $M^*$ とも  $10^5$  (100000 回) で十分に収束しており、これは破壊確率が小さいとき、あるいは大きいときなど、いずれの場合も同様な結果を得た。

**b) 荷重頻度分割数  $k$  の検討**

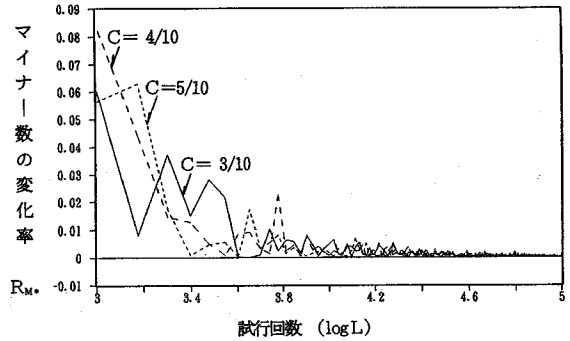
次に、荷重頻度分割数  $k$  による計算精度を確認するために、 $k=5 \sim 40$  まで変化させ、数値シミュレーションを実施した。(ただし、 $V_f=20\%$ ,  $V_N=20\%$ とした。)

シミュレーション結果を図一 4 (a), (b)に示す。(a)は、荷重頻度分割数  $k$  による収束値の変化状況を、(b)は、荷重頻度分割数  $k$  による破壊確率の変化状況を示している。両図より、 $k$  の増加とともに  $P_f$  はある値に収束し、その収束精度は  $k=30$  で十分であると判断される。

よって、本問題におけるモンテカルロシミュレーションの最適値として、 $L=10^5$ ,  $k=30$  と決定し、次の数値シミュレーションを実施する。また、荷重頻度分布係数  $C$  については、荷重の大きさとその頻度が、疲労寿命に及ぼす影響を検討するために、3水準 ( $C=3/10, 4/10, 5/10$ ) を採用している。

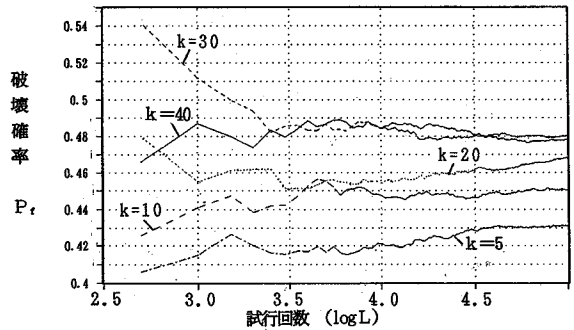


(a) 試行回数  $L$  に対する破壊確率  $P_f$  の収束状況

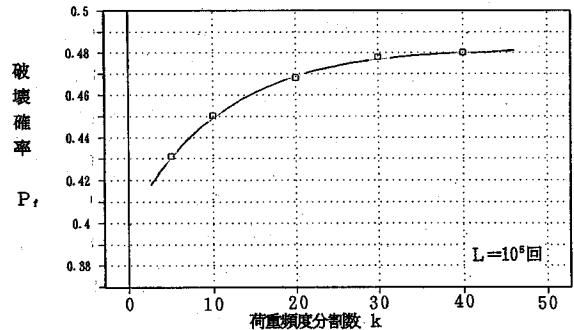


(b) 試行回数  $L$  に対するマイナー数  $M^*$  の収束状況

図一 3 総試行回数  $L$  に関する収束状況 (変化率による検討)



(a) 荷重頻度分割数  $k$  による収束値の変化



(b) 荷重頻度分割数  $k$  による破壊確率  $P_f$  の変化

図一 4 荷重頻度分割数  $k$  に関する検討

表-2 モンテカルロシミュレーションにおける条件パラメーター

頻度分布の形状		C	5/10, 4/10, 3/10
作用回数の変動係数		$V_f$	0, 5, 10, 15, 20 (%)
疲労寿命	変動係数	$V_N$	0, 5, 10, 15, 20 (%)
	標準偏差 $\sigma[\log N]$		0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8
共通条件			$L=10^8$ 回 $k=30$ $S_{max}=84.5\%$ $S_{min}=69.5\%$ $S=99.186-5.756\cdot\log N^{50}$ $G_0=5\cdot 10^2\sim 1.8\cdot 10^6$ 回までの間の9点(条件によって異なる)

(2) シミュレーションの実施

さて、前節で考察した前準備のもと、表-2のような数値シミュレーションに対する条件パラメーターを設定した。

これは、あるケースの条件(例えば、 $C=0.5$ ,  $V_f=0.2$ ,  $V_N=0.2$ )について、総作用回数の平均値  $G_0$  を9通りに変化させ、それぞれの場合の破壊確率を算出するものである。すなわち、 $G_0$  を変化させると  $M_0$ ,  $P_f$  も変化するので、 $G_0$  を入力値として、出力値として得られる  $M_0$  と  $P_f$  とを比較するものである。なお、総作用回数のばらつきは変動係数のみで表現されるが、疲労寿命については変動係数もしくは標準偏差を仮定し、各々に対してシミュレーションを実行した。

次に破壊確率  $P_f$  を、正規変量  $\tau$  に変換し、例えば図-5(a), (b)のように整理することにより一般化マイナー数  $M_0$  (確定値) と破壊確率  $P_f$  との関係の考察することができる。

ここで、破壊確率  $P_f$  を正規変量  $\tau$  に変換することを考える。正規変量  $\tau$  は正規分布曲線の対称軸からの距離を表し、以下のように定義される。

$$\tau = \text{erf}^{-1}(P_f - 0.5) \quad (20)$$

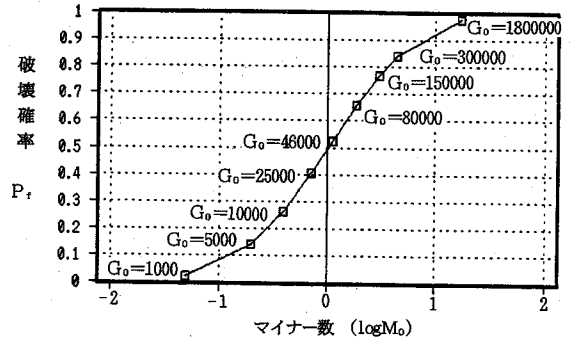
$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad (21)$$

$\text{erf}(z)$  は、平均値0、標準偏差1の標準正規分布 ( $N(0, 1)$ ) の  $0\sim z$  までの面積を与える関数、 $\text{erf}^{-1}(\cdot)$  は、その逆変換を表す。例えば、図-5(b)では、正規変量  $\tau$  と  $\log M_0$  が直線関係にあることから、 $M_0$  が対数正規分布することが判断され、かつ、そのときの期待値および標準偏差を読みとることができる。この場合、同図より、直線の回帰式

$$\tau = 1.1871 \cdot \log M_0 + 0.0053 \quad (22)$$

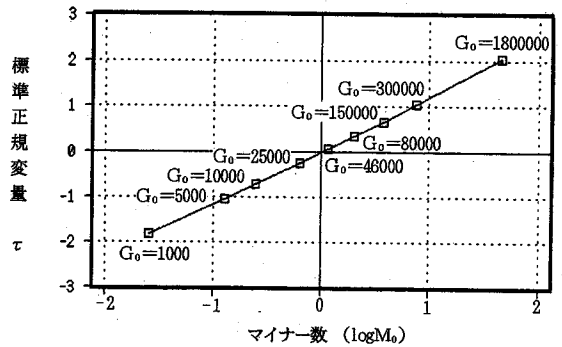
を得ることができ、これは期待値  $E[\log M_0] = -0.0045$  ( $\bar{M}_0 = 10^{E[\log M_0]} = 0.9897$ )、標準偏差  $\sigma[\log M_0] = 0.8424$  となる。

$C=5/10 \quad V_N=0.2 \quad V_f=0.2$



(a) 破壊確率  $P_f$  とマイナー数  $\log M_0$  の関係

$C=5/10 \quad V_N=0.2 \quad V_f=0.2$



(b) 標準正規変量  $\tau$  とマイナー数  $\log M_0$  の関係

図-5 一般化マイナー数  $M_0$  と破壊確率  $P_f$  とその標準正規変量  $\tau$  との関係 ( $C=5/10$ ,  $V_N=0.2$ ,  $V_f=0.2$  の場合)

すなわち、式(22)に、 $\tau=0$  ( $P_f=50\%$ ) を代入して求めたマイナー数  $\log M_0$  は  $M_0$  に対する対数軸上の平均値かつ中央値であり、これを実数に変換した  $\bar{M}_0 = 10^{E[\log M_0]}$  は、 $M_0$  の中央値を示す。

4. シミュレーション結果のまとめと考察

(1) シミュレーション結果のまとめと図化

前述3. に記したシミュレーション結果に対する解析結果をまとめ、表-3(a), (b)および表-4に一覧するとともに、図-6, 7にまとめた。

このようなシミュレーション結果から、次のことがわかった。

- ①疲労破壊に対する一般化マイナー数  $M_0$  は、対数軸上で正規分布し、荷重の変動係数、係数  $C$ 、疲労寿命の変動係数にほとんど関係なく、その平均値は、 $E[\log M_0] = 0$  (従って、 $\bar{M}_0 = 10^{E[\log M_0]} = 1$ ) となった。ただし、わずかではあるが、係数  $C$  および  $V_N$  によ

表-3 (a)  $V_N \sim V_f \sim \bar{M}_0$  の関係  
(上段:  $C=3/10$  中段:  $C=4/10$  下段:  $C=5/10$ )

		作用回数の変動係数 $V_f$				
		0%	5%	10%	15%	20%
疲労寿命の変動係数 $V_N$	0%	*****	1.0000	1.0001	1.0001	1.0002
		*****	1.0000	1.0000	1.0001	1.0004
		*****	1.0000	1.0005	1.0003	0.9999
	5%	0.9998	0.9999	1.0000	1.0001	0.9999
		0.9995	0.9990	1.0003	0.9999	1.0004
		0.9992	0.9993	0.9987	0.9993	0.9994
	10%	0.9960	0.9968	0.9970	0.9965	0.9968
		0.9990	0.9999	0.9984	0.9973	0.9961
		0.9945	0.9958	0.9943	0.9930	0.9951
	15%	0.9953	0.9949	0.9942	0.9961	0.9939
		0.9946	0.9937	0.9958	0.9938	0.9956
		0.9932	0.9940	0.9933	0.9949	0.9919
20%	0.9933	0.9926	0.9942	0.9929	0.9932	
	0.9931	0.9967	0.9923	0.9929	0.9944	
	0.9849	0.9857	0.9856	0.9858	0.9897	

表-3 (b)  $V_N \sim V_f \sim \sigma[\log M_0]$  の関係  
(上段:  $C=3/10$  中段:  $C=4/10$  下段:  $C=5/10$ )

		作用回数の変動係数 $V_f$				
		0%	5%	10%	15%	20%
疲労寿命の変動係数 $V_N$	0%	*****	0.0043	0.0086	0.0130	0.0174
		*****	0.0040	0.0079	0.0120	0.0158
		*****	0.0044	0.0087	0.0131	0.0174
	5%	0.1794	0.1796	0.1796	0.1780	0.1808
		0.1952	0.1951	0.1955	0.1955	0.1959
		0.2118	0.2118	0.2118	0.2124	0.2125
	10%	0.3599	0.3598	0.3602	0.3597	0.3602
		0.3920	0.3924	0.3923	0.3900	0.3909
		0.4216	0.4227	0.4219	0.4222	0.4225
	15%	0.5416	0.5414	0.5416	0.5415	0.5404
		0.5897	0.5891	0.5899	0.5887	0.5902
		0.6313	0.6322	0.6314	0.6325	0.6330
20%	0.7242	0.7239	0.7246	0.7245	0.7248	
	0.7832	0.7854	0.7834	0.7845	0.7828	
	0.8408	0.8405	0.8402	0.8401	0.8424	

る影響が認められ、 $C$  が大きいほど、 $V_N$  が大きいほど  $\bar{M}_0$  が小さくなった。

- ②マイナー数  $M_0$  の標準偏差  $\sigma[\log M_0]$  は、疲労寿命の変動係数  $V_N$  (もしくは標準偏差  $\sigma[\log N]$ ) が大きいほど増加し、図-7 (a), (b) のように表すことができる。とくに (b) では、 $\sigma[\log N] \approx \sigma[\log M_0]$  であることがわかり、これは、一定振幅に対する解析解(例えば、Leeuwen & Siemes<sup>6)</sup>) を、変動応力場に対して拡張し得ることを意味する。

表-4  $\sigma[\log N]$  をパラメーターとしたときのシミュレーション

		$\sigma[\log N]$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$C=3/10$ $V_f=0$	E [logM]	*****	0.0003	-0.0095	0.0000	0.0000	0.0000
	$\sigma$ [logM]	*****	0.2004	0.4158	0.6019	0.8037	
$C=3/10$ $V_f=0.2$	E [logM]	0.0001	-0.0002	-0.0040	-0.0005	-0.0010	
	$\sigma$ [logM]	0.0174	0.2013	0.4012	0.6019	0.8021	
$C=4/10$ $V_f=0$	E [logM]	*****	0.0003	0.0001	0.0011	-0.0001	
	$\sigma$ [logM]	*****	0.1992	0.4010	0.5988	0.8029	
$C=4/10$ $V_f=0.2$	E [logM]	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	-0.0007	
	$\sigma$ [logM]	0.0158	0.2004	0.4003	0.5988	0.8024	
$C=5/10$ $V_f=0$	E [logM]	*****	0.0004	0.0011	-0.0006	0.0001	
	$\sigma$ [logM]	*****	0.1998	0.3983	0.6011	0.7997	
$C=5/10$ $V_f=0.2$	E [logM]	0.0000	0.0004	0.0014	0.0013	0.0001	
	$\sigma$ [logM]	0.0174	0.2005	0.3991	0.5984	0.7993	

これに対して、変動係数  $V_N$  をパラメーターとした場合、応力振幅  $S$  が大きくなるほど、疲労寿命の標準偏差が大きくなり、図-7 (a) のように、分布係数  $C$  の影響を受けることになる。従って、大小異なる応力振幅を受ける場合、その使用材料に対して、変動係数一定とするか、標準偏差一定とするか、検討する必要がある。

- ③作用回数の変動係数  $V_f$  についての違いはほとんど認められなかった。その理由として、線形被害則を採用するとともに用いた  $S \sim N$  曲線が、 $\log N$  に対して線形式であったことが考えられる。(従って、 $V_f$  による差異については、以降、とくに言及しない。)

## (2) 疲労破壊の生起確率

ここで、一般化マイナー数  $M_0$  の平均値と標準偏差を同定することができたので、疲労破壊の生起確率を試算してみたい。図-8 は、破壊確率が  $P_f=1\%$ 、 $5\%$  としたときのマイナー数  $M_0$  の値を示したものである。ただし、横軸として、(a) は変動係数、(b) は標準偏差をパラメーターとして表している。(基準となる  $S-N$  線図については、前出の表-2 のものを用いた。)

これによって、例えば、対象とする荷重頻度分布係数  $C$  と、コンクリートの疲労寿命の変動係数 (もしくは標準偏差) を既知量として、設計上要求される安全率もしくは破壊確率から、マイナー数の設計値を設定することができる。例えば、 $P_f=5\%$  とした場合、 $\sigma[\log N]=0.2$  のとき  $M_0=0.47$ 、 $\sigma[\log N]=0.4$  のとき  $M_0=0.22$  となる。これは、変動荷重を受ける場合の疲労設計に対する参考資料として、有用となろう。

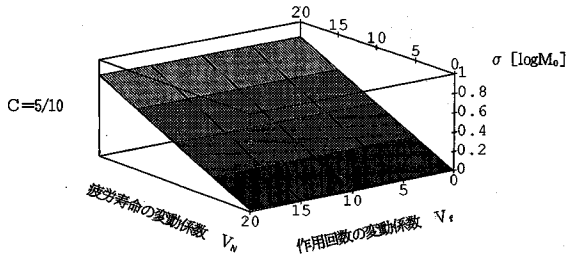
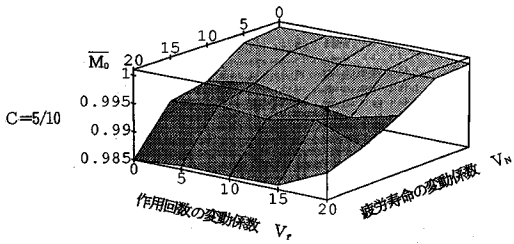
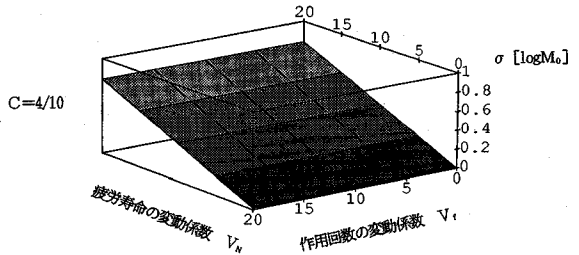
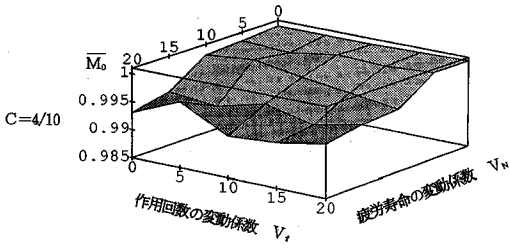
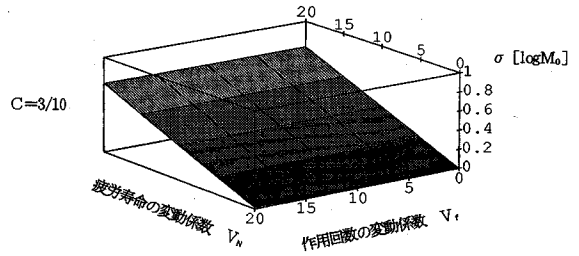
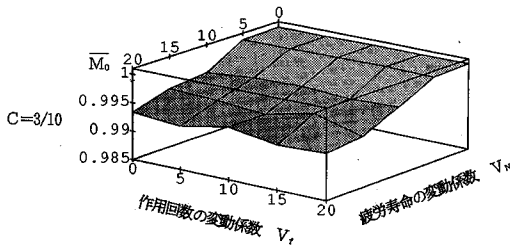


図-6 (a)  $V_N \sim V_f \sim \bar{M}_0$  の関係

図-6 (b)  $V_N \sim V_f \sim \sigma[\log M_0]$  の関係

### 5. 一般化マイナー数の期待値と分散に関する考察

ここでは、一般化マイナー数に対する中央値 (median) と期待値 (expectation) または平均値 (mean) を区別し、確率統計学上の定義に従って、解析を試みる。非正規分布の場合、両者は異なるので、設計レベルでどちらを基準とするかについては注意を要する。

中央値は、出現確率を50%とするもので、前節において  $\bar{M}_0$  として算出したものに他ならない。一方、期待値は、一般に  $X$  の確率密度関数  $f_x(x)$  に対して、

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad (23)$$

のように定義され、これを本節にて考察する。

#### (1) 疲労寿命 $N^*$ の期待値と分散

まず、マイナー数を取り扱う前に、疲労寿命  $N^*$  の期待

値と分散を求める。 $N^*$  は、対数量  $\log N$  に対して正規分布し、その期待値と標準偏差を  $E[\log N]$ ,  $\sigma[\log N]$  とすると、その確率密度関数  $f(\log N)$  は、式(17)を再記して

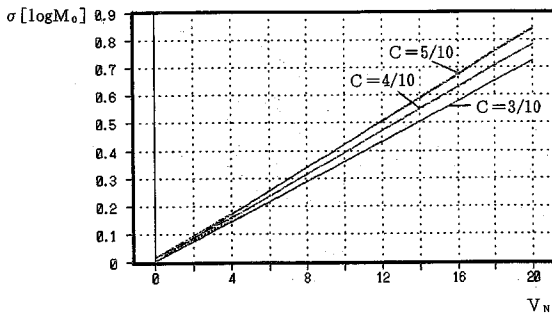
$$f(\log N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma[\log N]} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log N - E[\log N]}{\sigma[\log N]}\right)^2\right] \quad (24)$$

と書ける。また、 $N = \exp(\ln 10 \cdot \log N)$  となることを考慮して、式(23)の定義に従って、 $E[N]$  を次のように求解できる。

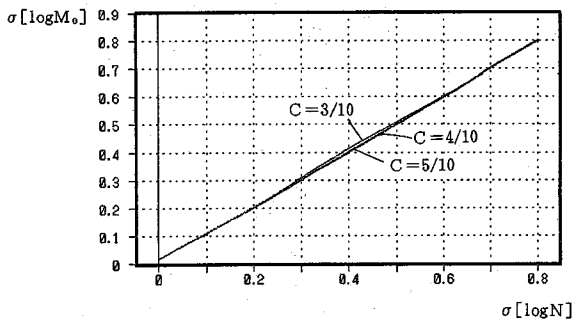
$$\begin{aligned} E[N] &= \exp((\ln 10 \cdot E[\log N]) \\ &\quad + 0.5(\ln 10 \cdot \sigma[\log N])^2) \\ &= 10^{(E[\log N] + 0.5 \cdot \ln 10 \cdot \sigma^2[\log N])} \end{aligned} \quad (25)$$

一方、分散については、 $Var[N] = E[N^2] - \{E[N]\}^2$  から、 $Var[N] = \{E[N]\}^2 \cdot \{10^{\ln 10 \cdot \sigma^2[\log N]} - 1\}$  のように表すことができる。





図一七 (a) 疲労寿命の変動係数  $V_N$  とマイナー数の標準偏差  $\sigma[\log M_0]$  の関係



図一七 (b) 疲労寿命の標準偏差  $\sigma[\log N]$  とマイナー数の標準偏差  $\sigma[\log M_0]$  の関係

## (2) マイナー数 $M_0$ の期待値と分散

マイナー数が確率量となるのは、 $N^*$  の中央値  $m[N]$  を用い、

$$M^* = N^* / m[N] \quad (27)$$

のように、一定振幅の場合であっても、疲労寿命が確率分布をもつことに起因する(ここでは、中央値を  $m[\cdot]$  のように表現する。) また、 $N^*$  が対数正規分布することから、

$$(N^* \text{ の中央値}) = m[N] = 10^{E[\log N]} \quad (28)$$

のように記述できるので、 $M^*$  の期待値  $E[M]$  は次式のように表せる。

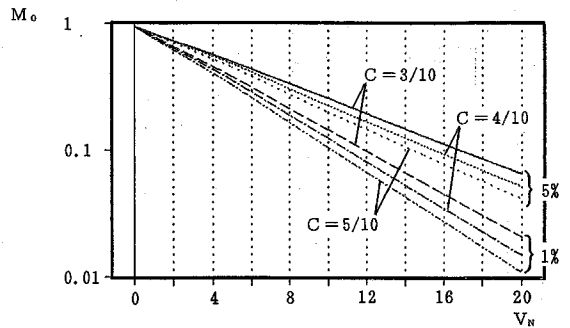
$$E[M] = E\left[\frac{N^*}{10^{E[\log N]}}\right] = \frac{E[N]}{10^{E[\log N]}} \quad (29)$$

従って、前式(25)を用いれば、

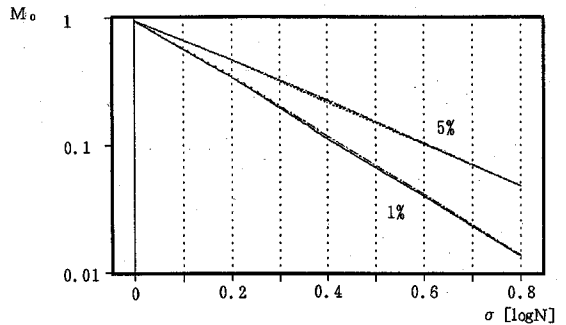
$$\begin{aligned} E[M] &= E[N] / 10^{E[\log N]} \\ &= 10^{E[\log N] + 0.5 \cdot \ln 10 \cdot \sigma^2[\log N] - E[\log N]} \\ &= 10^{0.5 \cdot \ln 10 \cdot \sigma^2[\log N]} \end{aligned} \quad (30)$$

のように定式化できる。

これは、マイナー数の期待値が、 $\log N$  の標準偏差の大小に影響を受け、ばらつきがない ( $\sigma[\log N]=0$ ) のとき、 $E[M]=1$  に帰着することを示している(図一七(a))。こ



(a) 変動係数をパラメーターとしたとき



(b) 標準偏差をパラメーターとしたとき

図一八 疲労破壊に対する危険率1%と5%のときのマイナー数

のような結果は、Leeuwenら<sup>6)</sup>によっても既に求解されている。さらに、分散  $Var[M]$  については、 $Var[M] = E[M^2] - \{E[M]\}^2$  を整理して、

$$Var[M] = \{E[M]\}^2 \cdot \{10^{\ln 10 \cdot \sigma^2[\log N]} - 1\} \quad (31)$$

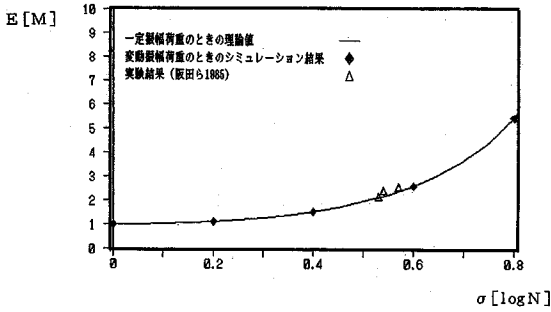
のように求めることができる。また、このときの変動係数を  $V_M = \sqrt{Var[M]} / E[M]$  のように定義すると、これは、

$$V_M = \{10^{\ln 10 \cdot \sigma^2[\log N]} - 1\}^{1/2} \quad (32)$$

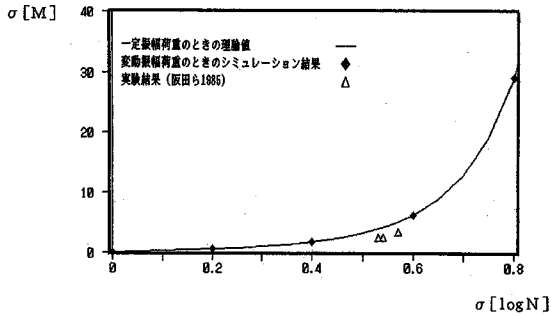
のように表現することができ、この場合も  $\log N$  の標準偏差の関数となっていることがわかる。

## (3) 変動疲労荷重の場合との比較

以上までの解析結果は、繰返し荷重として一定振幅を前提としたまものであるが、これを本論で取り扱っている変動疲労荷重の場合に対比することを試みる。そこで、図一七(a)に、式(30)で与えられるマイナー数の期待値  $E[M]$  に対する解析解を図示するとともに、変動荷重によるシミュレーション結果 ( $\sigma[\log N]=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ) をプロットした。同図より明らかなように、 $E[M]=1$  ( $\sigma[\log N]=0$  のとき) を出発点とし、 $\sigma[\log N]$  が大きいほど、 $E[M]$  は増加しており、また、変動疲労荷重の



(a)  $E[M] \sim \sigma[\log N]$  の関係



(b)  $\sigma[M] \sim \sigma[\log N]$  の関係

図-9 一般化マイナー数の期待値と標準偏差に対する検討

場合とよく一致していることがわかる。(このように、両ケースが合致していることは、 $E[M]$  が変動疲労荷重の場合でも解析的あるいは近似的に求解し得ることを示唆するもので、今後の課題としたい。)ただし、図-7, 8 (a), (b) の指摘のように、変動係数  $V_N$  で表すと、両ケースは合致せず、変動荷重の場合であっても分布形状によって異なる。また、同図中に既往の実験結果 (阪田ら<sup>5)</sup>) を併記したが、解析解とほぼ合致していることがわかる。

同様にマイナー数の標準偏差  $\sigma[M]$  についても考察し、図-9 (b) にまとめた。同図では、一定振幅における解析解 (式(31))、変動荷重の時のシミュレーション結果を照合するとともに、3例の実験結果をプロットした。

以上のように、一定振幅荷重と変動荷重の場合のマイナー数に対する中央値、期待値、標準偏差 (または分散) が、モンテカルロシミュレーションおよび解析的手法によって明確になったといえる。

本論は、このような考察によって、ただちに、より合理的な疲労限界状態設計法の提案を行うものではないが、その下地となる基礎的で現実的な検討資料を提示できたと考え。従って、例えば、安全性指標による Level II の解析<sup>7)</sup> を行うための、線形被害則の一般化と確率統計学的諸量の下準備は整ったと考える。

Appendix: 付表-1 主要統計量に関する記号の定義

		期待値 (平均値)	中央値	標準偏差	変動係数
疲労寿命 $N^*$	$\log N$	$E[\log N]$	$m[\log N]$ $= E[\log N]$	$\sigma[\log N]$	$V_N$
	$N$	$E[N]$	$m[N]$ $= 10^{E[\log N]}$	$\sigma[N]$	*****
マイナー数 $M^*$	$\log M$	$E[\log M]$	$m[\log M]$ $= E[\log M]$	$\sigma[\log M]$	$V_M$
	$M$	$E[M]$	$m[M]$ $= 10^{E[\log M]}$	$\sigma[M]$	*****
作用回数 $G^*$		$G_0$	$G_0$	*****	$V_G$

## 6. まとめ

本論における考察をまとめ、次のように要約する。

- ①作用する疲労荷重の頻度分布が与えられたときの累積損傷量を、一般化マイナー数として定式化し、これを総作用回数と疲労寿命を確率変数としたときの場合に拡張した。これは、従来の一定振幅荷重に対する線形被害則が、より一般的な変動荷重場および確率過程における取扱いを可能にするものである。
- ②このような定式化に基づき、モンテカルロシミュレーションを実行し、いくつかの有用な知見を得るとともに、主要統計量 (期待値、中央値、標準偏差) を求めた。そして、疲労寿命が対数正規分布する場合、一般化マイナー数も対数正規分布し、中央値はほぼ 1 となった。疲労寿命の変動係数  $V_N$  はシミュレーション結果に大きな影響を与えるが、総作用回数のばらつきの程度 (変動係数  $V_G$ ) による差異はほとんど認められなかった。
- ③マイナー数の期待値と標準偏差の両者が、疲労寿命の対数値に対する標準偏差 ( $\sigma[\log N]$ ) の増加関数として表されることを示し、一定振幅の場合、変動荷重の場合を照合するとともに、既往実験との比較も行った。
- ④このような変動荷重場におけるマイナー数の確率統計学的諸量に対する考察は、現行の疲労限界状態設計法の改変を直ちに提案できるものではないが、整合性のとれた基本理論を呈示し、信頼性理論の導入の可能性を模索するものである。疲労限界状態は、他の限界状態に比べて、変動性が際だって大きいことが特徴であり、より合理的な (例えば、準確率論的な) 安全性照査の確立が急務であると考え。

## 参考文献

- 1) 石橋, 児島, 阪田, 松下: コンクリート構造物の耐久性

- シリーズ「疲労」, 技報堂出版, 1987.
- 2) 土木学会: コンクリート構造の限界状態設計法指針(案)「7. 疲労」, コンクリート・ライブラリー第52号, pp. 285-300, 1983.
  - 3) 松下博通, 徳光善治: 生存確率を考慮したコンクリートの圧縮疲労強度に関する研究, 土木学会論文報告集 No. 284, pp.127-138, 1979.
  - 4) 平城弘一, 鬼頭宏明, 八田吉弘, 松井繁之: コンクリートの疲労試験データの統計的処理, 土木学会第48回年次学術講演会講演概要集(第5部) V 353, pp.732-733, 1993.
  - 5) 阪田憲次, 矢村潔, 西林新蔵: ラングム荷重を受けるコンクリートの疲労特性に関する研究, 第7回コンクリート工学年次講演会論文集 pp.317-320, 1985.
  - 6) Leeuwen, J.V. and Siemes, A.J.M.: Miner's Rule with Respect to Plain Concrete, *Heron*, Vol. 24, No. 1, 1979.
  - 7) 星谷勝, 石井清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986.
  - 8) Ang A.H.S.・Tang W.H. 著, 伊藤學・亀田弘行訳: 土木・建築のための確率・統計の基礎, 丸善株式会社, 1988.
  - 9) 中林秀和: 変動疲労荷重を受けるコンクリートのマイナー数の評価と破壊確率に関する基礎的研究, 武蔵工業大学平成5年度卒業論文, 1994.3.
  - 10) 山内洋志, 大井祥之, 吉川弘道: 疲労荷重による累積損傷を受ける構造体の信頼性理論, 土木学会第47回年次学術講演会(第1部) I-523, 1992.9.
  - 11) 松下博通, 玉井裕行: コンクリートの疲労寿命に及ぼす前繰返し応力の影響, 第3回コンクリート工学年次講演会講演論文集 pp.117-120, 1981.

(1994.3.29 受付)

## GENERALIZED MINER'S NUMBER AND PROBABILITY OF FATIGUE FAILURE OF CONCRETE SUBJECTED TO VARIABLE CYCLIC LOADS

Hiromichi YOSHIKAWA, Hidekazu NAKABAYASHI  
and Hiroshi YAMAUCHI

It has been acknowledged that fatigue lives of concrete exhibit wide scattering, which should be properly taken into consideration in the limit state design. This paper proposes a generalized Miner's number for concrete under variable cyclic loads, assuming the total number of repeated loads and fatigue strength of concrete are random variables. The Monte Carlo simulation is carried out to obtain the probability of fatigue failure in relation of the generalized Miner's number. Median, expectation and standard variation of generalized Miner's number at failure are examined through numerical simulation and analytical formulation with experimental results.