

特性方程式から与えられる固有モードを用いた半無限成層地盤におけるインパルス応答の定式化

秋山伸一¹

¹正会員 工修 佐藤工業(株) 技術本部土木設計部 (〒103 中央区日本橋本町 4-12-20)

半無限成層地盤におけるインパルス応答を、特性方程式から導かれる Love 波モードとリーキングモードを用いて定式化している。インパルス応答はこれらのモードを振動数で積分することにより与えられる。波線理論によると、リーキングモードは表層内を多重反射する平面波の増幅的干渉と解釈できる。インパルス応答を構成するモードは、加振点の近傍ではリーキングモードの影響が強く、遠方では Love 波モードの影響が支配的になる。

Key Words : *impulsive response, Love wave mode, leaking mode, complex root, ray theory*

1. はじめに

社会活動が活発になるにつれ、建設される構造物も大規模・長大化している。こうした構造物の耐震設計を安全にしかも合理的に行うためには、地震時の地盤の挙動を適切に評価することが重要である。

従来の耐震設計では、入力地震動が実体波として、地盤の下から入射することを前提として検討することが多かった。ところが、表面波の影響によると見られる地震被害が数多く報告されるにつれて、表面波に対する検討も盛んに行われるようになってきている。

地震動の評価に際して、実体波と表面波は分離して扱われることがよくある。これは、実体波が非分散性波動であるのに対し、表面波は分散性波動であると捉えられるためである。しかしながら、地震動の評価を定量的に行うためには、実体波と表面波の関連を明確にした上で、両者を統一的に扱うことが望ましい。次に、このような観点から既往の研究を眺めてみる。

実体波と表面波の関連について理論的に言及した研究としては、いわゆる Lamb の問題¹⁾を取り上げることができよう。Lamb の問題によると、成層地盤のインパルス応答は実体波の影響を示す分岐点回りの積分と表面波の影響を示す (Riemann 面上葉に存在する) 極の留数の和として表されることが知られている。

ところで、Rosenbaum²⁾は海洋中を伝播する音波のインパルス応答を定式化する上で、分岐点回りの積分経路を Riemann 面下葉上にまで拡張することにより、最終的にこの積分を Riemann 面下葉上に存在する極の留数の和として表すことに成功している。この極の留数は

表面波モードと同じ固有モードの一種であるリーキングモードと解釈される。このように、この研究は実体波が表面波と同様に極の留数で表されることを理論的に明らかにした点で大きな意義を持つ。なお、Rosenbaum による上記の定式化は Aki and Richards³⁾によって再構成され、彼らのテキストの中で平易に展開されている。

Rosenbaum や Aki and Richards の定式化によると、インパルス応答は上述の固有モードの他に単調減少を示す非振動成分に関する積分も含む形式で表されることになる。彼らは、この積分の影響は少ないとした上で、インパルス応答を近似的に固有モードの重ね合わせのみで表している。これに対して、Haddon^{4),5)}は振動数と波数の両者がともに複素数で与えられるリーキングモードを適切に選択することにより、インパルス応答が厳密にリーキングモードだけで展開できることを示している。

これらの研究を通して、実体波に関連する分岐点回りの積分は Riemann 面下葉に広がる極からの寄与すなわちリーキングモードの重ね合わせで評価できることが明らかになってきた。したがって、こうした成果に基づけば、実体波を表面波と同一の視点から捉えることも可能であると言える。ただし、そのためには表面波モードとの関連を通して、リーキングモードの特性を明確にする必要があると考えられる。

また、既往の研究の大部分は海洋中を伝播する音波を対象としたものであり、弾性波動を直接の対象とした研究は少ない。さらに、Rosenbaum や Aki and Richards の定式化を見ると、振動数領域の積分を固有モードで展開した後に、最後にこれらのモードを波数で積分する形式で示されている。ところで、我々が対象とする地震工

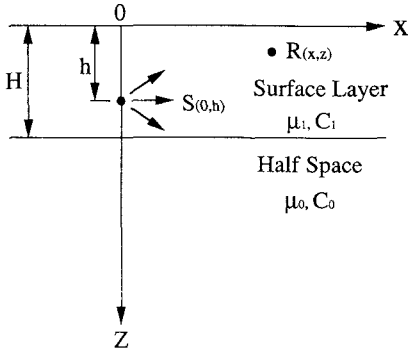


Fig.1 A two-layered model.

学の分野では振動数領域における応答を必要とする場合が多い。このようなことから、波数領域の積分を固有モードで展開した後にこれらのモードを振動数で積分できる形式で表された弾性波動場におけるインパルス応答の定式化が望まれる。

一方、Haddonの定式化では波数領域の積分を固有モードで展開した後にこれらのモードを振動数で積分する形式で示されている。ただし、複素平面上に拡張された積分経路の選び方に任意性が残されている。したがって、Haddonも触れているように、ここからリーキングモードを物理的に解釈することは現状では難しいと思われる。

以上のような観点から、本論文ではまず二次元成層弾性体のインパルス応答を、Aki and Richardsに従い、固有モードを用いて定式化する。ただしここでは波数領域の積分を固有モードで展開する点が彼らの定式化と異なる。続いてインパルス応答を構成する固有モードのうちリーキングモードの物理的な解釈についてLove波モードとの比較を通して考察する。そして最後に、数値解析から得られるリーキングモードの特性について言及する。

2. インパルス応答の基礎式

本論文ではFig.1に示す地盤モデルを伝わる面外波動を対象に議論を進める。この地盤モデルは半無限基盤と厚さ H の水平な表層で構成されている。図中の C と μ は各々、地盤のせん断波速度とせん断剛性を示す。また、記号の添字は0が基盤、1が表層の物理量を示す。なお、ここでは $C_1 < C_0$ なる関係にあるものとする。

Fig.1において、表層内の点 $S(0, h)$ に加振力 P のインパルスを与えた時の観測点 $R(x, z)$ の地盤の挙動は次式に示す波動方程式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 \left[\nabla^2 - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_0(x, z, t) &= 0 \\ \mu_1 \left[\nabla^2 - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_1(x, z, t) &= -P\delta(r)\delta(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ただし、} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, r = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

ここに、 u_0 と u_1 は基礎と表層の地盤変位を示し、 t は時間を示す。さらに、 δ はDiracのデルタ関数を表す。

境界条件は、地表面 ($z=0$) でせん断応力がゼロ、表層と基盤の境界 ($z=H$) では変位とせん断応力が連続である。

式(1)の波動方程式と境界条件を満足する解、すなわちインパルス応答は、調和振動源に対する変位応答⁶⁾を角振動数に対してFourier変換を行うことにより、次式に示す積分表示の式として与えられる。

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) &= \frac{P}{2\mu_1\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F(\omega, \xi) d\xi \\ &\quad (0 < z < h) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{2\mu_1\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{\cos \eta_1 h}{\eta_1} F'(\omega, \xi) d\xi \\ &\quad (h < z < H) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_0(x, z, t) &= \frac{P}{2\mu_1\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{\cos \eta_1 h}{\eta_1} G(\omega, \xi) d\xi \\ &\quad (H < z) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$F(\omega, \xi) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_1 (h-H) - i\mu_0 \eta_0 \sin \eta_1 (h-H)}{f(\omega, \xi)}$$

$$F'(\omega, \xi) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_1 (z-H) - i\mu_0 \eta_0 \sin \eta_1 (z-H)}{f(\omega, \xi)}$$

$$G(\omega, \xi) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_0 (z-H) - i\mu_1 \eta_1 \sin \eta_0 (z-H)}{f(\omega, \xi)}$$

$$f(\omega, \xi) = \mu_0 \eta_0 \cos \eta_1 H + i\mu_1 \eta_1 \sin \eta_1 H$$

$$\eta_0 = \sqrt{k_0^2 - \xi^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$$

$$k_0 = \omega/C_0, \quad k_1 = \omega/C_1$$

ここに、 i は虚数単位、 ω は角振動数、 ξ は水平方向の波数を示す。また、 η_0 と η_1 は基盤と表層地盤における鉛直方向の波数を示す。

ここで、式(2)~(4)の被積分関数に現れる $f(\omega, \xi)$ が次式を満足する場合を考えてみよう。

$$f(\omega, \xi) = \mu_0 \eta_0 \cos \eta_1 H + i\mu_1 \eta_1 \sin \eta_1 H = 0 \quad (5)$$

式(5)の根は上記の被積分関数の極である。ここから、式(2)~(4)の積分表示式は極における留数によって評価できることが予想される。ところで、式(5)は面外波動の特性方程式を意味する。すなわち、この方程式の根は面外波動の固有値でもある。さらに、極の寄与を

示す留数は固有モードの振幅を与えることになる。つまり、式(2)~(4)の積分表示式を極の留数で評価することはインパルス応答を固有モードで評価することにはならない。このような点に着目して、本論文では式(2)~(4)に示したインパルス応答を固有モードにより定式化する。

3. 特性方程式の根の存在条件

定式化に先立ち、式(5)に示される特性方程式の根の存在条件について整理しておく。

Ewingら⁷⁾のテキストには液体中を伝わる音波の特性方程式に対する実根の存在条件が示されている。ここではこれを参考に弾性波動の特性方程式に対する実根の存在条件を示すことから議論に入る。なお、以下では ω を実数のパラメータ、 ξ を複素数の根と仮定する。

まず鉛直方向の波数 η_0 、 η_1 を次のように設定する。

$$\eta_0 H = p_0 + iq_0, \quad \eta_1 H = p_1 + iq_1 \quad (6)$$

次に、式(6)を用いて式(5)の特性方程式を展開して行くと最終的に次式が得られる。

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{p_1^2 + q_0^2}{p_1^2 + q_1^2} \frac{q_1}{q_0} = \frac{\sinh q_1 \cosh q_1}{\cos^2 p_1 \cosh^2 q_1 + \sin^2 p_1 \sinh^2 q_1} \quad (7)$$

ここで、式(7)が成り立つための条件を調べてみると、 $q_0 < 0$ の場合には $q_1 = 0$ である時に限り式(7)が成り立つ。つまり、 $\text{Im}\eta_0 < 0$ の場合には式(5)を満たす根は $\text{Im}\eta_1 = 0$ となる。この条件を満たす根は $|k_0| \leq \xi \leq |k_1|$ の範囲内に存在する実根であり、Love波モードの固有値を意味する。以上が弾性波動に対する実根の存在条件である。

一方、式(7)において $q_0 > 0$ の場合について見てみると、左辺と右辺が常に同符号になるので、式(7)が成り立つ可能性がある。すなわち、式(7)は $\text{Im}\eta_0 > 0$ の場合に、式(5)に示した特性方程式の複素根が存在する可能性があることを示している。このように、式(7)からは実根以外に複素根の存在条件を見い出すこともできる。

4. 固有モードを用いたインパルス応答の定式化

ここでは、Aki and Richardsに従い、2章に示した積分表示式から出発して固有モードで構成されるインパルス応答を定式化する。ただし、本論文では上述のように波数領域の積分を固有モードで展開する。なお、以下の定式化では、観測点 R の深度 z が $0 < z < h$ である式(2)を対象に議論を進めることにする。

(1) Riemann面上葉における径路積分

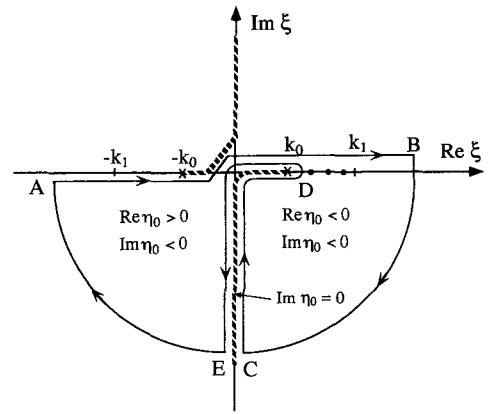


Fig.2 Integration path on the top Riemann sheet of the ξ -plane. Closed circles and crosses show poles and branch point, respectively. Branch cut is along the line of $\text{Im}\eta_0=0$.

振動数領域で固有モードを評価するためには式(2)に示した積分表示式の ξ に関する積分を極の寄与として表す必要がある。そこでまず、Fig.2に示すように実軸上の積分径路を複素平面上に拡張する。

式(2)に現れる鉛直方向波数の η_0 と η_1 は2価関数であるから、Fig.2の複素平面は2枚の葉によるRiemann面で表される。ここで、Riemann面上葉では $\text{Im}\eta_0 < 0$ 、下葉では $\text{Im}\eta_0 > 0$ と定義する。また、切断は η_0 に関する分岐点 $\xi = \pm k_0$ から $\text{Im}\eta_0 = 0$ となる線に沿って入る。さらに、前章の検討結果から、Riemann面上葉には実軸上($|k_0| \leq \xi \leq |k_1|$)にLove波モードの極が分布する。

そこで、積分径路はFig.2の矢印で示すように、上記の分岐点、切断およびLove波モードの極を避けて複素平面の下半面を囲むように取ることにする。その結果、径路ABで示される実軸上の積分は径路CDEで示される分岐点回りの積分およびLove波モードの極による寄与の和によって表される。したがって、式(2)は次式で表される。

$$u_1(x, z, t) = P_N + P_L \quad (8)$$

上式で、 P_N はRiemann面上葉に分布するLove波モードの極の寄与を示し、次式で表される。

$$P_N = -\frac{P}{\mu_1 \pi} \sum_n \text{Re} \int_{\omega_{cn}}^{\infty} e^{-i\eta x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

ただし、

$$F_1(\omega, \xi) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_1 (h-H) - i\mu_0 \eta_0 \sin \eta_1 (h-H)}{\frac{\partial}{\partial \xi} f(\omega, \xi)}$$

ここに、 ξ_n は特性方程式の根であり、Love波モードの n 次の固有値を表す。また、 ω_{cn} は n 次のLove波モー

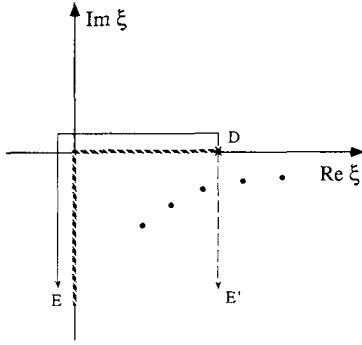


Fig.3 Integration path DE' on the lower sheet. Closed circles show poles on the lower sheet.

ドが現れる cut off frequency を示す。

一方、 P_L は径路 CDE に沿った分岐点回りの積分である。この径路上では分岐点をはさんで $Re\eta_0$ の符号が変化することに注意すると、 P_L は次式で示される。

$$P_L = -\frac{P}{2\mu_1\pi^2} Im \int_0^\infty e^{i\omega t} d\omega \int_{DE} e^{-i\kappa x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_2(\omega, \xi) d\xi \quad (10)$$

ただし、

$$F_2(\omega, \xi) = \frac{2\mu_0\mu_1\eta_0\eta_1 \cos \eta_1 h}{f(\omega, \xi) \cdot g(\omega, \xi)}$$

$$g(\omega, \xi) = \mu_0\eta_0 \cos \eta_1 H - i\mu_1\eta_1 \sin \eta_1 H$$

以上のように、インパルス応答の一部は式 (9) に示すように Love 波モードの重ね合わせで表すことができる。しかしながら、本論文で目的とするインパルス応答の全体を固有モードで表現するためには、式 (10) に示す分岐点回りの積分も固有モードで展開する必要がある。次節ではこうした問題について検討を進めることにする。

(2) 分岐点回りの積分に対する径路の変更

まず、式 (10) の積分径路 DE を、Fig.3 に示す径路 DE' に変更する。新たに設定する径路 DE' は分岐点 D ($\xi = k_0$) から出発して切断を横切り Riemann 面の下葉 ($Im\eta_0 > 0$) 側に入る点に大きな特徴がある。このように積分径路を変更すると、式 (10) は次式で表すことができる。

$$P_L = P_{B1} + P_{B2} \quad (11)$$

ここに、 P_{B1} は Riemann 面下葉上で径路 DE' の左側に存在する極の寄与を示し、 P_{B2} は径路 DE' に沿った積分を示す。

P_{B1} の評価には、式 (10) に示す被積分関数の極の存在が問題になる。この場合、極が存在するためには、 $Im\eta_0 > 0$ であるという条件の基で $f(\omega, \xi) = 0$ 、あるいは $g(\omega, \xi) = 0$ を満たす根が存在しなければならない。

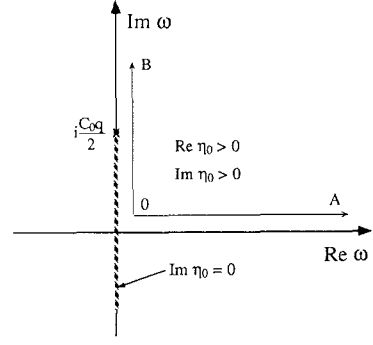


Fig.4 Integration path on the ω -plane.

しかもこれらの根が径路 DE' の左側に存在する時にはじめて P_L の一部を P_{B1} として評価することが可能になる。

先の検討結果によると、 $Im\eta_0 > 0$ の場合には $f(\omega, \xi) = 0$ を満たす根が存在する可能性がある。一方、 $g(\omega, \xi) = 0$ についても同様に根の存在条件を調べてみると、 $Im\eta_0 > 0$ の条件の基で $|k_0| \leq \xi_n \leq |k_1|$ の範囲内に実根が存在することがわかる。ただし、この根は径路 DE' の右側に位置することになる。したがって、 $g(\omega, \xi)$ に関連した極は分岐点回りの積分の評価には含まれない。

以上により、Riemann 面下葉 ($Im\eta_0 > 0$) に $f(\omega, \xi) = 0$ を満たす根が径路 DE' の左側に存在する場合、 P_L の一部を P_{B1} として固有モードで評価することが可能になる。

さらに、径路 DE' に沿った積分を表す P_{B2} についても固有モードによる展開を考えてみる。まず、Fig.3 より ξ 平面での積分区間は $k_0 \sim k_0 - i\infty$ であるので、積分変数 ξ を次式で表す。

$$\xi = k_0 - iq \quad (12)$$

続いて、式 (12) から、積分変数を ξ から q に変換する。その結果、 P_{B2} は次式で表される。

$$P_{B2} = \frac{P}{2\mu_1\pi^2} Re \int_0^\infty e^{-qz} dq \int_0^\infty e^{i(\omega t - k_0 z)} \cdot \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_2(\omega, q) d\omega \quad (13)$$

さて、固有モードによる式 (13) の評価を、ここでは ω 平面で考えることにする。そこで、 ω についての積分径路を Fig.4 に示す複素平面上に拡張する。なお、この複素平面の第 1 象限では $Re\eta_0 > 0$ 、 $Im\eta_0 > 0$ である。

Fig.4 より、径路 OA 上の積分は径路 OB 上の積分、および径路の内側に存在する極の寄与によって評価される。ところで、径路 OB 上の積分は物理的には振幅が単調に減少する非振動成分の評価を意味する。Rosenbaum や Aki and Richards によるとインパルス応答に与えるこうした積分の影響は少ないものとされている。本論文でもこの積分による影響は加振点からわずかに離

Table 1 Constants of the model.

	Surface layer	Half space
Depth H(m)	100	—
Shear wave velocity (m/sec)	500	1000
Rigidity(kN/m ²)	5.0×10 ⁵	2.0×10 ⁶

Table 2 Values of ω_{an} , ω_{bn} and ω_{cn} .

n	Frequency (Hz)		
	$\omega_{an}/2\pi$	$\omega_{bn}/2\pi$	$\omega_{cn}/2\pi$
1	0.456	1.425	2.887
2	0.411	4.644	5.774
3	0.408	7.686	8.660

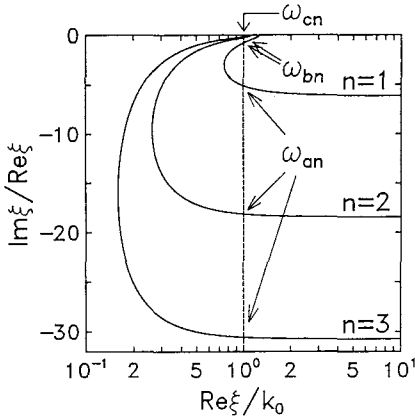


Fig.5 Locus of the complex roots on the ξ -plane.

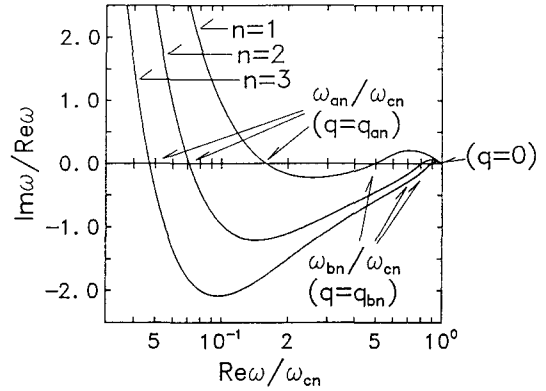


Fig.6 Locus of the complex roots on the ω -plane.

れただけで急速に減少する。以上の理由から、ここでは径路 OB 上の積分を除いた上で式 (13) の評価を行うことにする。

その結果、Fig.4 の第 1 象限に極が存在する時に限り、 P_{B2} は極からの寄与として評価される。なお、式 (13) の被積分関数の極は式 (5) の特性方程式の根で与えられる。

(3) 特性方程式の複素根の算出

上述の議論に従うと、分岐点回りの積分 P_L を構成する P_{B1} と P_{B2} は、各々与えられた条件の基で極が存在するのであれば、どちらも固有モードによる評価が可能になる。そこで、分岐点回りの積分が固有モードで表せることを確認するために、極の存在を実際に調べてみる。なお、これらの極はすべて複素根で与えられる。したがって、ここでは特性方程式の複素根を求めることにする。

複素根を求めるためには、まず 4 個の未知量 $Re\omega$, $Im\omega$, $Re\xi$, $Im\xi$ を用意することになる。一方、特性方程式は実数部と虚数部に分けて、 $Re f(\omega, \xi) = 0$, $Im f(\omega, \xi) = 0$ の 2 つの方程式が与えられる。しかし、このままでは未知量の中からパラメータをひとつ選択したところで、2 つの方程式から残りの 3 つの未知量を求めることはできない。つまり、複素根を求めるためには特性方程式の他にも条件式が必要になる⁸⁾。

式 (11) の P_{B1} を評価する場合には、実数の ω に対して ξ 平面での極の存在が問題になる。したがって、 $Re\omega$ がパラメータになり、条件式として $Im\omega = 0$ が加

わる。一方、 P_{B2} については式 (12) が条件式になるとともに、 q がパラメータになる。以上により、特性方程式とこれらの条件式から非線形連立方程式を形成することができる。ここでは Table 1 に示す物性値を用い、Newton 法を連立方程式に適用できるように拡張した Brent 法¹²⁾により上記の非線形方程式から複素根を求める。以下に結果を示す。

Fig.5 には P_{B1} に関する極である複素根の分布を示す。この図には 1~3 次モードまでについて、 ω を増加させた時の ξ 平面における根の軌跡を示している。図中の破線は径路 DE' の位置を表す。また、 ω_{an} と ω_{bn} は根が径路 DE' と交差するときの振動数を表す。なお、これらの値を ω_{cn} の値とともに Table 2 に示す。

Fig.5 によると、根は ξ 平面の第 4 象限にある。そして、 ω の増加に伴い、径路 DE' を左右に交差しながら実軸に接近して最終的に ω_{cn} で分岐点に到達する。なお、分岐点に到達した根は Riemann 面のの上葉に現れて実軸上を進む。この根は Love 波モードの極である。

Fig.5 の結果から、 ω が $\omega_{an} \sim \omega_{bn}$ の範囲内であれば極は径路 DE' の左側に位置する。すなわち、この時の極の寄与が P_{B1} として評価されることになる。

次に、 P_{B2} に関する極である複素根の分布を Fig.6 に示す。ここでは q が 0 から増加した時の ω 平面における根の軌跡を示している。Fig.6 によると、 $q=0$ で ω_{cn} に位置する根は q の増加に従って第 1 象限と第 4 象限を交互に移動しながら次第に虚軸に接近する。ここで、根が複素平面の実軸と交差する時の振動数は Table 2 に示

した ω_{an} および ω_{bn} に一致する。

この結果から、根が ω 平面の第1象限に存在するのは、 $Re\omega \leq \omega_{an}$ および $\omega_{bn} \leq Re\omega \leq \omega_{cn}$ の場合である。すなわち、 q が $0 \leq q \leq q_{bn}$ および $q_{an} \leq q$ の範囲内にある時に式 (13) に示した P_{B2} は極の寄与として評価される。

(4) 固有モードによるインパルス応答の構成

分岐点回りの積分を構成する P_{B1} と P_{B2} はどちらも固有モードによる評価が可能であることを前節で明らかにした。この結果、 P_{B1} と P_{B2} は次式で表される。

$$P_{B1} = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_{\omega_{an}}^{\omega_{bn}} e^{-i\xi n x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (14)$$

$$P_{B2} = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Im \left[\int_0^{q_{bn}} + \int_{q_{an}}^{\infty} \right] e^{-i\omega n(t-x/C_0)} \cdot \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_3(\omega_n, q) e^{-qz} dq \quad (15)$$

ただし、

$$F_3(\omega, q) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_1 (h-H) - i\mu_0 \eta_0 \sin \eta_1 (h-H)}{\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega, q)}$$

式 (15) の [] 内の積分記号は同一の被積分関数を各々の積分区間毎に積分することを示している。さらに、式

(5) の特性方程式から導かれる次の関係式を用いて、式 (15) を q から ω の積分式に変換する。

$$dq / \left[\frac{\partial f}{\partial \omega} \right] = -d\omega / \left[i \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (16)$$

式 (16) より、式 (15) は次式で表される。

$$P_{B2} = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \left[\int_0^{\omega_{an}} + \int_{\omega_{bn}}^{\omega_{cn}} \right] e^{-i\xi n x} \cdot \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (17)$$

ここで、式 (17) の ω に関する積分は、Fig.6 に示した複素平面上での根の軌跡に沿って実行しなければならない点に注意する必要がある。

以上より、式 (14) と式 (17) をまとめると、式 (11) に示す P_L は結局、次式で表される。

$$P_L = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_0^{\omega_{cn}} e^{-i\xi n x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (18)$$

式 (18) は、分岐点回りの積分が cutoff frequency よりも低い振動数のモードで評価されることを示している。このモードは特性方程式の複素根から与えられる。

さらに、式 (18) に式 (9) を加えることにより、式 (8) に示したインパルス応答はすべて固有モードだけで評価されることになる。ここまでは、式 (2) の積分表示式を対象に定式化を進めてきたが、式 (3), (4) についても同様の展開が可能である。その結果、式 (2) ~ (4) に示したインパルス応答は次式にまとめられる。

$$u_1(x, z, t) = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_0^{\infty} e^{-i\xi n x} \frac{\cos \eta_1 z}{\eta_1} F_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (0 \leq z \leq H) \quad (19)$$

$$u_0(x, z, t) = -\frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_0^{\infty} e^{-i\xi n x} \frac{\cos \eta_1 h}{\eta_1} G_1(\omega, \xi_n) e^{i\omega t} d\omega \quad (H \leq z) \quad (20)$$

ただし、

$$G_1(\omega, \xi) = \frac{\mu_1 \eta_1 \cos \eta_0 (z-H) - i\mu_1 \eta_1 \sin \eta_0 (z-H)}{\frac{\partial}{\partial \xi} f(\omega, \xi)}$$

さらに、上式の被積分関数に現れる ξ に関する微分演算を解析的に行うことにより、インパルス応答は最終的に次式で表される。

$$u_1(x, z, t) = \frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_0^{\infty} A(\omega, \xi_n) \cos \eta_1 z \cdot e^{i\omega t - 1\xi n x} d\omega \quad (0 \leq z \leq H) \quad (21)$$

$$u_0(x, z, t) = \frac{P}{\mu_1\pi} \sum_{\pi} Re \int_0^{\infty} A(\omega, \xi_n) \cos \eta_1 H \cdot e^{i\omega t - 1\xi n x - i\eta_0(z-H)} d\omega \quad (H \leq z) \quad (22)$$

ただし、

$$A(\omega, \xi_n) = \frac{\cos \eta_1 h}{\xi_n} \left[\frac{\mu_0 \mu_1}{\eta_0} \cdot \frac{\eta_1^2 - \eta_0^2}{\mu_1^2 \eta_1^2 - \mu_0^2 \eta_0^2} + iH \right]^{-1}$$

上式において、 $A(\omega, \xi_n)$ は固有モードの振幅特性を表す。

式 (21)~(22) から、インパルス応答は固有モードを振動数で積分することによって与えられる。ただし、上式の積分は、先に示したように $0 \sim \omega_{an}$, $\omega_{bn} \sim \omega_{cn}$ で径路が実軸から複素平面内に取られることになる。これと同様のことは Aki and Richards の定式化にも見られる。すなわち、彼らの定式化によると、固有モードを波数で積分する際に、径路の一部が複素平面に取られる。したがって、固有モードを用いてインパルス応答を定式化するためには、振動数あるいは波数の一方を実数に限定した展開は難しく、一部の区間で振動数と波数の双方を複素数に拡張する必要がある。

5. 複素根から導かれるモードについての基礎的考察

前章までの議論によると、インパルス応答は特性方程式の実根と複素根から与えられるモードによって構成されている。実根から与えられるモードは Love 波であり、その性質については良く知られている。一方、複素根から与えられるモードは、振動数や波数が複素数で表され

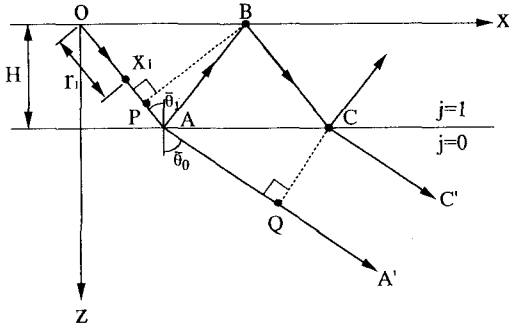


Fig.7 Multiple reflection and refraction in the two-layered model.

るために、Love 波と比べると取り扱いが複雑になる。そこで、Tazime⁹⁾, Alsoop¹⁰⁾, Watson¹¹⁾らは、問題を単純にするために振動数と波数のうちの一方を実数と限定した上で、複素根から与えられるモードについて考察している。しかし、先に示したように、インパルス応答を構成するモードの中には、波数と振動数がともに複素数で与えられるものも含まれている。したがって、このようなモードの性質についても調べる必要があろう。

ところで、Riemann 面の上葉と下葉に分布する実根と複素根は分岐点が両者の接点となっている。この点に着目すると、複素根で与えられるモードは Love 波モードと関連があることが予想される。

このような観点から、ここでは、Love 波モードとの比較を通して、振動数と波数がともに複素数で表されるモードの基本的な性質について考察する。

(1) 波数と振動数が複素数で表される波動の伝播特性
固有モードに関する議論に先立ち、Fig.7 に示す波線図に従って、波数と振動数が複素数で表される波動の伝播特性について考察する。

はじめに、Fig.7 に示した波線の水平方向と鉛直方向の波数を次式で定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= k_j \sin \theta_j \\ \eta_j &= k_j \cos \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに、 $k_j = \omega / C_j$ ($j=0, 1$)

式 (23) における θ_j と ω を次式に示す複素数に拡張する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_j &= \alpha_j - i\beta_j \quad (j=0, 1) \\ \omega &= \Omega \cdot \exp(i\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) により、式 (23) の波数は次式に展開される。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \bar{K}_j \sin \bar{\theta}_j + i\hat{K}_j \sin \hat{\theta}_j \\ \eta_j &= \bar{K}_j \cos \bar{\theta}_j + i\hat{K}_j \cos \hat{\theta}_j \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、

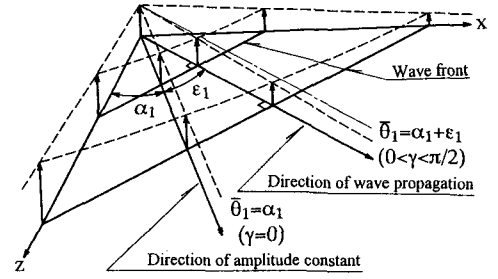


Fig.8 Characteristic of wave propagation. Both frequency and wavenumber are complex values.

$$\bar{K}_j = K_j \sqrt{\cosh^2 \beta_j \cos^2 \gamma + \sinh^2 \beta_j \sin^2 \gamma}$$

$$\hat{K}_j = K_j \sqrt{\cosh^2 \beta_j \sin^2 \gamma + \sinh^2 \beta_j \cos^2 \gamma}$$

$$K_j = \Omega / C_j$$

$$\bar{\theta}_j = \alpha_j + \varepsilon_j$$

$$\hat{\theta}_j = \alpha_j - \zeta_j$$

$$\tan \varepsilon_j = \tan \gamma \tanh \beta_j$$

$$\tan \zeta_j = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \tanh \beta_j \quad (j=0, 1)$$

次に、波線 OA に沿って進む波動 u_{0A} を次式で与える。

$$u_{0A} = A_0 \exp(i\omega t - i\xi x - i\eta_j z) \quad (26)$$

式 (25), (26) より、点 O を出発した波が点 X_1 に到達する時の応答 u_{z1} は、最終的に次式で表される。

$$u_{z1} = A_0 \exp \left(\frac{-r_1 \sinh^2 \beta_1 \tan \gamma}{\sqrt{\cosh^2 \beta_1 \sin^2 \gamma + \sinh^2 \beta_1 \cos^2 \gamma}} \right) \quad (27)$$

式 (27) より、 ω が実数 ($\gamma=0$) の場合、点 X_1 で観測される波動の振幅は点 O を出発する波動の振幅に等しい。一方、 ω が複素数 ($0 < \gamma < \pi/2$) の場合には、点 X_1 での波動の振幅は点 O の波動の振幅に比べて減少する。

以上の結果をまとめると、波動の伝播特性は概念的に Fig.8 に示される。Fig.8 より、 ω が実数の場合には時間の経過によって伝播方向に振幅の変化は生じない。この性質は Tazime⁹⁾ や Alsoop¹⁰⁾ によっても示されている。しかしながら、 ω が複素数で与えられる場合には、 ω の虚数部で表される減衰性の影響により、時間の経過とともに振幅が減少する。ただし、この場合には振幅が一定となる方向 α_1 が波動の伝播方向 $\bar{\theta}_1$ とは別に存在する。

さらに、式 (27) を導く過程から、波線 OA に沿って伝播する波動の速度は次式で与えられる。

$$C'_1 = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cosh^2 \beta_1 \cos^2 \gamma + \sinh^2 \beta_1 \sin^2 \gamma}} \cdot C_1 \quad (28)$$

式 (28) から明らかなように、伝播方向の速度 C'_1 は β_1

および γ によって変化する。振動数と波数が実数で表される波動であるならば、この速度は地盤の S 波速度に一致する。したがって、この性質もまた上述の性質と同様に、複素数で与えられた波数を有する波動の大きな特徴のひとつであると言える。なお、**Fig.7** に示す波線 AA' 上を伝わる波動についても上と同様に議論が行える。

(2) 波線理論に基づく解釈

波線理論によると、Love 波は表層内を全反射する SH 波の増幅的干渉と解釈される。その増幅的干渉とは、例えば、**Fig.7** において波線 OA に沿って進む平面波の点 P における波面と波線 BC に沿って進む平面波の点 B における波面が同位相で干渉し合うことを指す。

ところで、複素根から与えられるモードも Love 波と同じ特性方程式から導かれるものである。したがって、このモードも Love 波と同様に波線理論による解釈が可能であると考えられる。そこで、波線理論の立場から、複素根から与えられるモードの性質についての考察を試みる。

前節の検討に従うと、点 P の応答 u_P と点 B の応答 u_B は次式で与えられる。

$$u_P = A_0 \exp(2i\bar{K}_1 H \cos \bar{\theta}_1) \exp(-2\phi_P R_A) \quad (29)$$

$$u_B = \frac{-\mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1}{\mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1} A_0 \exp(-2\phi_B R_A) \quad (30)$$

ただし、

$$\phi_P = \bar{K}_1 \tan \gamma - \bar{K}_1 \sin^2 \bar{\theta}_1 \cos(\bar{\theta}_1 - \hat{\theta}_1)$$

$$\phi_B = \bar{K}_1 \tan \gamma - \bar{K}_1 \cos(\bar{\theta}_1 - \hat{\theta}_1)$$

ここに、 R_A は **Fig.7** に示す点 OA 間の距離を表す。さて、ここでは特性方程式を満たす波動を対象としているから、式 (5) より次の関係を示すことができる。

$$\frac{-\mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1}{\mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1} = \exp(2i\eta_1 H) \quad (31)$$

式 (31) を用いると、 u_P と u_B は次式で関係づけられる。

$$T = \frac{u_B}{u_P} = \exp[-2\bar{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1 \sin(\bar{\theta}_1 - \hat{\theta}_1)] \quad (32)$$

上式に示すように、点 P の応答と点 B の応答の比を表す T は実数で与えられる。つまり、式 (32) は u_B と u_P が同位相の応答であることを示している。したがって、点 B の波面と点 P の波面が同位相で重なり合う増幅的干渉が生じる。つまり、波線理論の立場から見れば、複素根から与えられるモードも Love 波モードと同様に増幅的干渉によって生じる波動であると言える。

上と同じ検討を基盤内の透過波について行くと、点 Q の応答 u_Q と点 C の応答 u_C の比 T' は次式で表される。

$$T' = \frac{u_C}{u_Q}$$

$$= \exp\left(-2\bar{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1 \frac{\cos \bar{\theta}_0 \sin \hat{\theta}_1}{\cos \bar{\theta}_1 \sin \bar{\theta}_0} \sin(\bar{\theta}_0 - \hat{\theta}_0)\right) \quad (33)$$

ここでもまた、先と同様に、点 C と点 Q の波面の間で増幅的干渉が生まれる。

式 (32)、(33) に示した T と T' は ω が実数 ($\gamma=0$) で与えられる場合に等しくなり、次式で示される。

$$T = T' = \exp(-2\bar{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1) \quad (34)$$

式 (34) に示した T には $T \leq 1$ という性質がある。つまり、 u_B は必ず u_P よりも小さく、 u_C も u_Q より小さい。このような現象の起こる理由は、点 O からの入射波の振幅に対して点 A で発生する反射波の振幅が必ず小さくなるためである。そして点 A からは入射波の一部が透過波として基盤内に伝わる。その結果、表層内を多重反射する波動は次第に減衰する。

こうした性質は全反射 SH 波とみなされる Love 波モードにはなく、複素根から与えられるモードの持つ大きな特徴である。さらに、入射波のエネルギーの一部が基盤内に放射されることから、複素根から与えられるモードはリーキングモードとして捉えることができる。つまり、前章で定式化したインパルス応答は Love 波モードとリーキングモードにより構成されることを意味する。

6. インパルス応答を構成する固有モードの特性

ここでは、**Table 1** に示す条件から求められる複素根 (**Fig.5, 6**) と実根を用いて、リーキングモードと Love 波モードの伝播方向、伝播速度、応答比および振幅を求める。さらに、これらの結果から、インパルス応答を構成する固有モードの特性について考察を加える。

(1) 固有モードの伝播方向

式 (25) から固有モードの伝播方向 $\bar{\theta}_0$ 、 $\bar{\theta}_1$ を求めると、**Fig.9** に示す結果が得られる。**Fig.9** には 0 次から 3 次モードまでの結果を示している。図の横軸は振動数の実数部を、縦軸は角度を示す。

はじめに、基盤におけるモードの伝播方向から見ると、cutoff frequency よりも振動数の低いリーキングモードの伝播方向は $0^\circ \sim 90^\circ$ の間にある。したがって、基盤内では斜め下向きに伝播する。この結果は、表層付近の波動のエネルギーが基盤の深部に伝わるというリーキングモードの性質を示している。一方、Love 波モードの伝播方向は常に水平である。つまり、このモードのエネルギーはリーキングモードとは異なり、水平方向に伝わる。

次に、表層における伝播方向を見ると、Love 波モードは SH 波の臨界角である 30° よりも大きな角度で伝播する。したがって、Love 波は全反射 SH 波であること

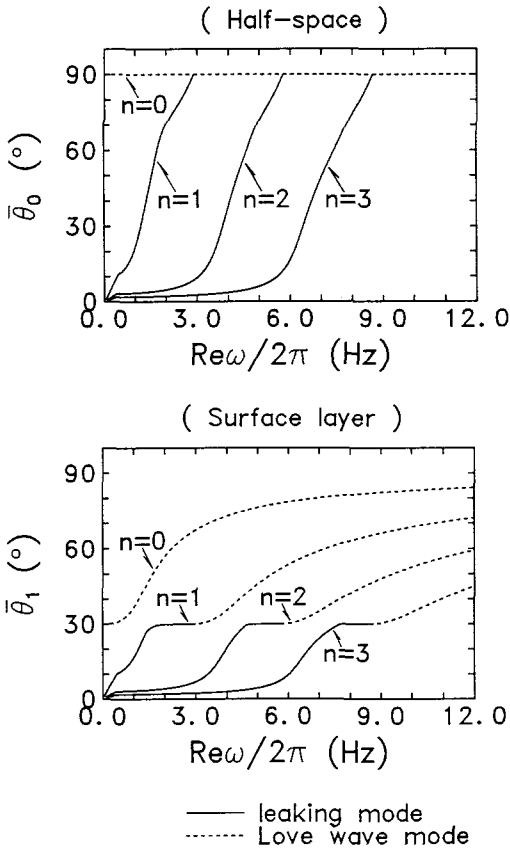


Fig.9 Propagation direction of the modes.

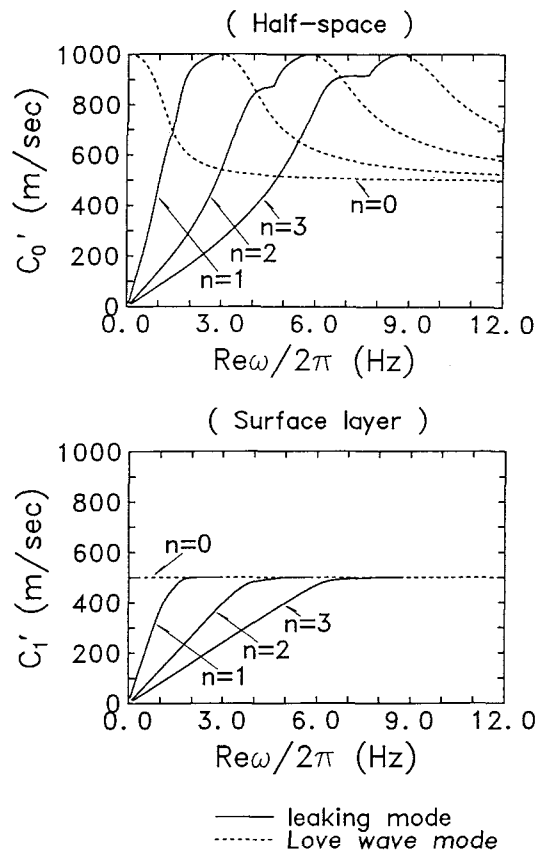


Fig.10 Velocity along the propagation direction.

が確かめられる。一方リーキングモードの場合は臨界角よりも小さな角度で伝播する。ここで、実体波は表層内を臨界角を越えないで伝播する波動として捉えと、Fig.9を実体波とリーキングモードの関連性の一端を示す結果として見る事ができる。

なお、0次モードにはリーキングモードは含まれず、すべてLove波モードである。したがって、このモードは基盤では水平方向に、また表層では臨界角よりも大きな角度で伝播することを付け加えておく。

(2) 固有モードの伝播速度

式(28)に基づいて求めた伝播速度 C_0 , C_1 をFig.10に示す。Fig.10によると、基盤での伝播速度は振動数によって変化することがLove波モードとリーキングモードにおいて見られる。こうした現象が起こる理由は、上述のようにLove波モードとリーキングモードが複素数で表される波数を有するためである。また、この結果は波動の分散性がLove波モードと同様に、リーキングモードにもあることを示している。ただし、Love波モードの伝播速度は表層のせん断波速度 C_1 と基盤のせん断

波速度 C_0 の間で変化するのに対して、リーキングモードの場合にはゼロから C_0 までの間で変化する。

一方、表層における伝播速度を見ると、リーキングモードはゼロから表層のせん断波速度 C_1 までの間で変化するが、Love波モードは振動数に拘らず、常に C_1 に一致している。これは、先の検討から、表層を伝わるLove波モードの波数が実数で与えられることに起因する。

(3) 固有モードの応答比

式(32), (33)より、増幅的干渉を引き起こす入射波と反射波の比 T および T' を求める。Fig.11には3次モードまでについての応答比 T , T' を示す。

Fig.11によると、Love波モードの場合には $T(T')$ が常に1になる。これは、Love波モードが表層地盤における波動のエネルギーを半無限基盤に放射することなく、常に一定の振幅を保ちながら水平方向に伝播するためである。一方、リーキングモードの場合には、 $T(T')$ が1よりも小さい。この結果は、リーキングモードが波動のエネルギーを表層地盤から半無限基盤に放射しながら

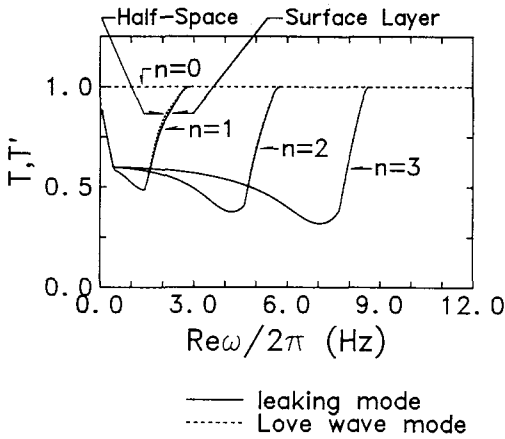


Fig.11 Response ratio of the modes.

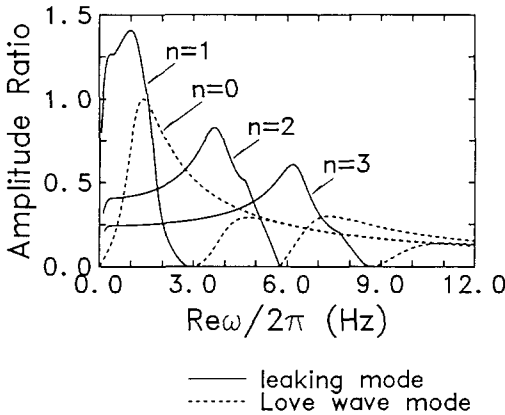


Fig.12 Amplitude of the modes.

ら多重反射を繰り返すために、水平方向には減衰しながら伝播することを示している。

さらに、リーキングモードの振動数が実数で与えられる区間では、先に示したように、 $T=T'$ となる。一方、振動数が複素数で与えられる区間では T と T' に差が生じる。ただし、その差は余り大きくはなく、高次モードになるにつれて急速に縮まる。

以上の結果から、リーキングモードは多重反射の過程で振幅を減少させながら水平方向に伝播する。したがって、インパルス応答に及ぼす固有モードの影響を見ると、リーキングモードは加振点から比較的近い地点の応答に影響を与えるが、加振点からある程度離れた地点では、リーキングモードの影響は見られず、Love波モードの影響のみが残るものと考えられる。

(4) 固有モードの振幅

式 (21), (22) に示した $A(\omega, \xi_n)$ からモードの振幅を求める。Fig.12にはこれらの振幅を0次モードの

振幅の最大値で規準化した振幅比を示す。

Fig.12より、cutoff frequencyで振幅はゼロになり、左側のリーキングモードと右側のLove波モードにおいて振幅のピークを形成している。Love波モードの振幅のピークは0次において最も大きく、高次モードになるにつれてピークが小さくなる。一方、リーキングモードの場合も振幅のピークは次数の最も小さい1次モードが最大で、次数が高くなるにつれてピークの値が小さくなる。さらに、同じ次数でリーキングモードとLove波モードの振幅のピークを比較すると、どの場合もLove波モードよりもリーキングモードの方がピークが高い。

以上のように、リーキングモードの振幅は全体的にみてLove波モードの振幅よりも大きい。ところが、Fig.11に示した応答比を考慮すると、たとえリーキングモードの振幅は大きくとも、加振源から離れればその影響も次第に低下するものと考えられる。一方、Love波モードは振幅を一定に保ちながら水平方向に伝播するために、Fig.12に示す振幅の影響が水平方向に無限遠方まで及ぶことになる。したがって、インパルス応答に与える固有モードの影響を見ると、加振点の近傍ではリーキングモードの影響が強く現れるのに対して、遠方ではLove波モードの影響が支配的になるものと考えられる。

7. 結 論

本論文では、半無限成層地盤における面外波動のインパルス応答を特性方程式から与えられる固有モードを用いて定式化した。さらに、インパルス応答を構成する固有モードの性質について考察を加えた。これらの結果は次のようにまとめられる。

- (1) 振動数と波数の2重積分で表示される成層地盤のインパルス応答は、波数積分をLove波モードとリーキングモードで展開した後に、これらのモードを振動数で積分する形で定式化することができる。
- (2) 振動数が実数で与えられ波数が複素数で表される波動は振幅を一定に保ちながら伝播方向に伝わるのに対し、振動数と波数がともに複素数で与えられる波動は時間の経過に伴い、振幅を減少させながら伝わる。
- (3) 波線理論によると、リーキングモードはLove波モードと同様に表層内を多重反射する平面波の増幅的干渉として解釈することができる。ただし、リーキングモードはLove波モードとは異なり、多重反射によって振幅が減少する。これは波動のエネルギーが表層地盤から半無限基盤に放射されるためである。
- (4) Love波モードは臨界角よりも大きな角度で表層地盤内を全反射するのに対して、リーキングモードは臨界角よりも小さな角度で反射を繰り返す。リーキング

モードのこうした性質は実体波との関連性の一端を示すものであると考えられる。

(5) リーキングモードには Love 波モードと同様に分散性がある。これはリーキングモードが複素数で表される波数を有することに起因する。

(6) インパルス応答を構成する固有モードの影響を見ると、加振点の近傍ではリーキングモードの影響が強くなるのに対し、遠方では Love 波モードの影響が支配的になる。

謝辞：本研究をまとめるにあたり、早稲田大学理工学部宮原玄教授から数多くの貴重な助言を頂きました。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店，1978.
- 2) Rosenbaum, J.H. : The Long-Time Response of a Layered Elastic Medium to Explosive Sound, *J. Geophys. Res.*, 65, pp.1577-1613, 1960.
- 3) Aki, K., P.G. Richards : Quantitative Seismology, Theory and Method, 1, W.H. Freeman and Company, 1980.
- 4) Haddon, R.A.W. : Exact Evaluation of an Explosive Source Using Leaking Modes, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.76, No.6 pp.1755-1775, 1986.
- 5) Haddon, R.A.W. : A Simple Method for Green's Function for SH Motion in a Layered Elastic Medium Using Leaking Modes, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 88, pp.379-392, 1987.
- 6) Sato, Y. : Study on Surface Waves VI. Generation of Love- and Other Type of SH-Waves, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 30, pp.101-120, 1952.
- 7) Ewing, W.M., W.S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.
- 8) 田治米鏡二：特性方程式の複素根，地震，2，18，pp.133-141, 1965.
- 9) Tazime, K. : Complex Roots in the Characteristic Equation for Love-Type Waves in a Layer over a Half Space, *J. Fac. Sci., Hokkaido Univ.*, VII, 1, 4, pp.283-300, 1960.
- 10) Alsop, L.E. : The Leaky-Mode Period Equation-A Plane-Wave Approach, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.60, No.6, pp.1989-1998, 1970.
- 11) Watson, T.H. : A Real Frequency, Complex Wave Number Analysis of Leaking Modes, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.62, No.1, pp.369-384, 1972.
- 12) 大野豊，磯田和男：新版数値計算ハンドブック，オーム社，1990.

(1994.6.27 受付)

FORMULATION OF IMPULSIVE RESPONSE OF AN ELASTIC LAYERED HALF SPACE USING THE EIGENMODES GIVEN BY THE CHARACTERISTIC EQUATION

Shinichi AKIYAMA

Impulsive response in an elastic layer overlying an elastic half space is formulated using Love wave modes and leaking modes. These modes are integrated with respect to frequency. From a viewpoint of the ray theory, it can be explained that the leaking modes are generated by the constructive interference of the plane wave propagating in the layer. Effect of the leaking modes are predominantly large near the source point. At a large distance from the source point, on the other hand, effect of Love wave modes only remain, because the leaking modes attenuate rapidly.