

# 等曲げを受ける弾性矩形板に生じる二次座屈現象の解明

中沢 正利<sup>1</sup>・池田 清宏<sup>2</sup>・和知 聡<sup>3</sup>・倉西 茂<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東北大学工学部講師 土木工学科 (〒980-77 宮城県仙台市青葉区)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D. 東北大学工学部助教授 土木工学科

<sup>3</sup>正会員 修士(工学) 日本鋼管(株) 橋梁建設部

<sup>4</sup>正会員 工博 関東学院大学工学部教授 土木工学科

本論文では、等曲げを受ける弾性矩形板に生じる多段階の分岐や飛び移り等の複雑な不安定現象に着目した後座屈解析を行ない、二次座屈現象を体系的に記述する。剛性方程式の接線係数行列の行列式に基づいた分岐点や分岐径路の分類、あるいは群論的表現に基づいてブロック対角化された接線剛性行列の小行列を用いた分類を示す。さらに漸近則やモンテカルロシミュレーションにより、初期不整が板のたわみに及ぼす影響を定量的に評価する。この結果、非常に複雑な後座屈挙動の仕組みを解明すると共に、これらが必然の積み重ねから成り立っていることを明らかにし、数値的にも示すことができた。

**Key Words :** *instability, secondary buckling, bifurcation-point classification, numerical identification, block diagonalization technique, path tracing, rectangular plate*

## 1. まえがき

初期たわみの無い弾性平板が荷重を受けると、一般に安定対称分岐することはよく知られた事実であるが、その分岐座屈後の挙動については、高次非線形問題となる故にあまり深く追求されてはいない。また、一般に板は後座屈領域でも荷重に対する余剰抵抗力を有しており、座屈後にも安定に単調増加する荷重-変位関係を呈すると考えられてきた。

弾性平板の有限変位問題に関しては、Levy<sup>1)</sup>が面内圧縮と面外圧力を受ける単純支持平板に対して von Kármán の基礎方程式を解いている。Coan<sup>2)</sup>は、単純支持板に対する微小な初期曲率の影響を考慮した Marguerre の支配方程式を解き、Levy の解を拡張した。八巻<sup>3)</sup>もまた Marguerre の式を解いたが、2種類の荷重条件と4種類の支持条件を組み合わせると計8種類の異なる境界条件を統一的に扱うことにより、Levy および Coan の解を含む多くのバリエーションを解くことを可能とした。またこれらの解析的研究により、矩形板の後座屈挙動は比較的複雑であることが一般に知られるようになったが、これは主に板の二次元的特性に起因し、板の面外変形に対して高次変形モードの連成作用が少なからず寄与するためである。

面内一様圧縮を受ける矩形板の後座屈挙動に関する実

験的あるいは解析的研究、例えば Bauer and Reiss<sup>4)</sup>, Sharman ら<sup>5)</sup>による実験、その他<sup>6)~8)</sup>, Supple<sup>9)~11)</sup>によれば、初期座屈後に板は突然飛び移り現象を起こして、異なる変形モードのつり合い状態へと移行することが明らかになっている。この現象は板の二次不安定あるいは二次座屈と呼ばれている。Nakamura and Uetani<sup>12)</sup>は座屈モードの連成効果を導入した多自由度モードにより二次座屈挙動の理論的研究を押し進め、不安定および安定対称二次分岐点の存在を明らかにするとともに、変形状の突然の変化を含む飛び移り座屈挙動を示した。近年、Maaskant and Roorda<sup>13)</sup>は二軸圧縮を受ける単純支持板の後座屈挙動を調べて、荷重の連成が二次分岐に関連するモードジャンプ現象を引き起こすことを述べ、いくつかの荷重条件に対する座屈モード間の連成特性を検討している。

しかし、圧縮以外の荷重を受ける弾性板の後座屈挙動において、これまで不安定現象の存在を指摘したものはほとんど無い。藤井、大村ら<sup>14)</sup>は、純曲げを受ける曲線桁の一パネルの弾性 FEM 解析において、収束解を得るために相当の繰り返し回数が必要となるような数値的に不安定な点の存在を指摘した。これは後座屈領域での二次不安定現象であると思われるが、この種の不安定メカニズムはこれまでほとんど解明されていない。

これに対し、近年著者ら<sup>15)~17)</sup>は弾性平板が等曲げを

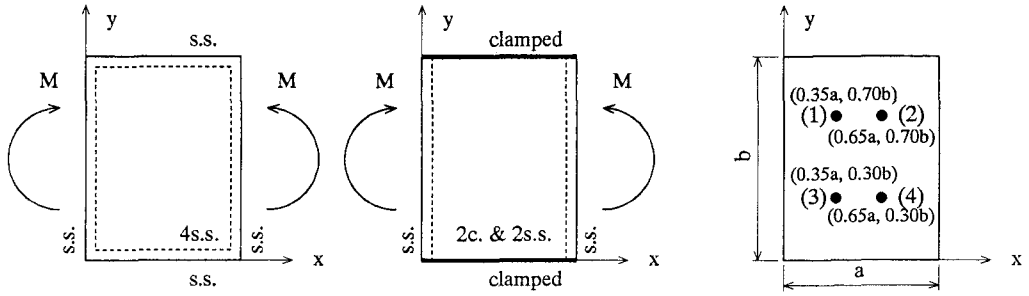


図-1 平板の境界条件とたわみ評価点

受ける場合の後座屈挙動解析を行った結果でも、飛び移り座屈あるいは分岐座屈と思われる不安定現象を見出し、さらに不等曲げとせん断を受ける場合にも同様な現象が発生することを示した。また、著者らは群論的分岐理論により、等曲げを受ける単純支持板の分岐階層構造の仕組みを明らかにした<sup>18)</sup>。

文献18)が分岐の理論的背景に重点を置いたのに対し、この論文では数値解析的な側面と二次座屈現象の仕組みに力点を置く。本研究では荷重制御法および変位制御法の両数値解析手法を併用してつり合い曲線を求め、このつり合い曲線の勾配としての接線係数行列の行列式を判定するという比較的簡単な操作<sup>19)~21)</sup>により座屈点の数値的分類を行なう。さらに、群論的分岐理論により求めた板の分岐構造<sup>18)</sup>をもとに、分岐経路及び分岐点のより詳細な分類を行なう。

また板の後座屈挙動では荷重が安定に増加する場合が多いために、たわみの大きさを如何に評価するかということが工学上問題となる場合がある。この論文では各種の数値解析手法<sup>19)~21)</sup>及び分岐理論の成果<sup>22)~24)</sup>をもとに板の後座屈挙動の解析手法およびたわみの評価法を提案するものである。安定対称分岐点近傍におけるたわみの漸近評価式<sup>23),24)</sup>をもとに、たわみが比較的小さい場合の評価を行なう。また初期不整をモンテカルロシミュレーションにより与えた場合の後座屈解析を行ない、たわみが大きい場合の評価を行なう。このように非常に複雑である板の後座屈挙動を確実に追跡する数値解析手法の確立もまた重要な問題であると言えよう。

## 2. 基礎方程式の誘導

まず平板の後座屈挙動については板の有限変形理論に基づいて考えるが、初期たわみを考慮した von Kármán-Marguerre の非線形偏微分方程式は、板厚と同程度のオーダーの有限変形を生じる板の曲げに関して適用すべき式であることに留意する必要がある。

本研究で対象とするモデルは、図-1に示すような四

辺単純支持および相対二辺回転固定、他二辺単純支持境界条件の弾性矩形板である。また荷重は、一方向に面内純曲げモーメントが作用するものとして、基礎方程式を定式化する。

### (1) 大たわみ方程式

Kármán-Marguerre の大たわみ方程式は、面外たわみ  $w(x, y)$ 、初期たわみ  $w_0(x, y)$  および応力関数  $F(x, y)$  によって、

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right], \quad (1a)$$

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left[ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right] - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \right\} \quad (1b)$$

と与えられる<sup>17)</sup>。ここで、 $t$  および  $D \equiv Et^3/12(1 - \nu^2)$  はそれぞれ板の厚さおよび曲げ剛性である。また、 $E$  は弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。級数展開における微分操作の対称性を確保するため、方程式の表記を幾分変えてある。面内応力成分  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  および  $\tau_{xy}(x, y)$  は Airy の応力関数  $F(x, y)$  と次のような関係がある。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

この応力関数  $F$  は荷重条件を満足するように決定されなければならない。板がパネル両端で等曲げモーメント  $M$  を受ける問題を考えると、合応力で与えられる力学的境界条件は、

$$M = -t \int_0^b \sigma_x(x, y) \left( y - \frac{b}{2} \right) dy, \quad \text{for } x = 0, a, \quad (3a)$$

$$\int_0^b \sigma_x dy = 0, \quad \text{for } x = 0, a, \quad (3b)$$

$$\int_0^a \sigma_y dx = 0, \quad \text{for } y = 0, b, \quad (3c)$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \text{for } x = 0, a \text{ and } y = 0, b \quad (3d)$$

と表わされる。式(3)の境界条件は式(1b)の斉次解である以下の Airy 応力関数  $F_0(y)$  によって満足される<sup>15)</sup>。

$$F_0(y) = -\frac{y^2(2y-3b)}{b^3t}M \quad (4)$$

## (2) 単純支持矩形板の場合

単純支持境界条件に対する板の面外たわみ形は、

$$w_0 = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (5a)$$

$$w = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5b)$$

と表わされ、ここで  $a_{mn}$  は初期たわみを表わす既知量、 $b_{mn}$  は初期たわみ状態からの付加たわみ量で未知数となる。 $m$  と  $n$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向への波形の半波数を示す。応力関数  $F(x, y)$  の一般解は前述の斉次解  $F_0$  に式(5)の関係を考慮した(1b)式の特解を加え、

$$F(x, y) = F_0(y) + Et^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{pq} \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2q\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

として得られる。式(5)および(6)を式(1b)に代入し、 $a_{mn}$  と  $b_{mn}$  により  $\phi_{pq}$  の陽な表現を得る。

$$\frac{8(p^2 + 4\alpha^2 q^2)^2}{\alpha^2} \phi_{pq} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{mn} b_{ij} + b_{mn} a_{ij} + b_{mn} b_{ij}) \cdot [2mni j \pm (m^2 j^2 + n^2 i^2)] \quad (7)$$

$$- : \begin{cases} p = m + i & \text{and } q = (n + j)/2 \\ \text{or} \\ p = |m - i| & \text{and } q = |n - j|/2 \end{cases}$$

$$+ : \begin{cases} p = |m - i| & \text{and } q = (n + j)/2 \\ \text{or} \\ p = m + i & \text{and } q = |n - j|/2 \end{cases}$$

ここで  $p$  と  $q$  は正の整数であり、 $\alpha$  は板の縦横比(辺長比); すなわち  $\alpha \equiv a/b$  である。解かれるべき最終式は式(5)および(6)を式(1a)に直接代入して得られるが、直接解法は極めて困難であることが予想されるため、Galerkin 法を適用して、

$$f_{rs}(b_{mn}, \lambda) \equiv \int_0^a \int_0^b \left\{ \nabla^4 w - \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \cdot \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) dx dy = 0, \quad r, s, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

と近似する。ただし、式(5)より  $w$  は  $b_{mn}$  の関数である。また、これをまとめて、

$$f_{rs}(b_{mn}, \lambda) = f_{rs}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mn}, \dots, b_{uv}, \lambda) = 0, \quad r, m = 1, \dots, u, \quad s, n = 1, \dots, v \quad (9)$$

ここで、 $\lambda (\equiv M/D)$  は作用モーメントを表わす荷重項であり、 $u, v$  は式(5)で示される面外たわみにおいて計算に用いる最大モード数である。式(5)と(6)を式(8)に代入して積分すると最終的に  $b_{mn}$  に関する連立3次代数方程式となる。式(9)の解として得られた  $b_{mn}$  の値を(5b)式に代入することにより、後座屈領域での面外たわみ  $w(x, y)$  が求められる。

## (3) 相対二辺回転固定、他二辺単純支持された矩形板の場合

面外たわみの変位関数は森脇・奈良ら<sup>25)</sup>と同一のものを仮定して、

$$w_0 = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \left\{ \cos\left[\frac{(n-1)\pi y}{b}\right] - \cos\left[\frac{(n+1)\pi y}{b}\right] \right\}, \quad (10a)$$

$$w = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \left\{ \cos\left[\frac{(n-1)\pi y}{b}\right] - \cos\left[\frac{(n+1)\pi y}{b}\right] \right\} \quad (10b)$$

とする。この場合、応力関数  $F$  の一般解は、式(3)の境界条件を考慮して

$$F(x, y) = F_0(y) + Et^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{pq} \cos\left(\frac{2p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2q\pi y}{b}\right) \quad (11)$$

と表わせる。式(10)と(11)を(1b)式に代入すると、(7)式と同様に  $\phi_{pq}$  の陽な表現が得られる。式(8)と同様に Galerkin 法を適用し、式(9)を

$$f_{rs}(b_{mn}, \lambda) \equiv \int_0^a \int_0^b \left\{ \nabla^4 w - \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right] \right\} \cdot \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \left\{ \cos\left[\frac{(s-1)\pi y}{b}\right] - \cos\left[\frac{(s+1)\pi y}{b}\right] \right\} dx dy = 0, \quad r, m = 1, \dots, u, \quad s, n = 1, \dots, v \quad (12)$$

と近似する。式(10)と(11)を(12)式に代入すれば、やはり  $b_{mn}$  に関する3次代数方程式に帰着する。本解析法は面外変位のみに着目したものであるが、座屈後の面内変位の境界条件等については15)の参考文献などを参照されたい。

### 3. Newton-Raphson 法による数値計算

前章で示した非線形方程式 (9) を摂動法の一次, すなわち Newton-Raphson 法により解く.

#### (1) 荷重制御型解析手法

つり合い曲線上の既知の点  $(b_{mn}^0, \lambda^0)$  とその点からの増分  $(\Delta b_{mn}, \Delta \lambda)$  だけ進んだ同じつり合い曲線上のある点  $(b_{mn}, \lambda) = (b_{mn}^0 + \Delta b_{mn}, \lambda^0 + \Delta \lambda)$  を求めることを考える. 式 (9) を Taylor 展開し, 二次以上の高次項を無視すると,

$$[f_{rs, b_{mn}}^0] \{\Delta b_{mn}\} + \{f_{rs, \lambda}^0\} \Delta \lambda = \{0\} \quad (13)$$

と線形式を得る. ここで,

$$[f_{rs, b_{mn}}^0] \equiv \sum_{m=1}^u \sum_{n=1}^v \left. \frac{\partial f_{rs}}{\partial b_{mn}} \right|_0, \quad \{f_{rs, \lambda}^0\} \equiv \left. \frac{\partial f_{rs}}{\partial \lambda} \right|_0$$

である. 荷重増分  $\Delta \lambda = \Delta \bar{\lambda}$  を与える場合には, 未知量は  $\{\Delta b_{mn}\}$  のみであるから,

$$\begin{aligned} \{\Delta b_{mn}\} &= -[f_{rs, b_{mn}}^0]^{-1} \{f_{rs, \lambda}^0\} \Delta \bar{\lambda} \\ &= -[f_{rs, b_{mn}}^0]^{-1} \{f_{rs}^0(b_{mn}^0, \lambda^0 + \Delta \bar{\lambda})\} \end{aligned} \quad (14)$$

と得られる. よって, 第  $t+1$  次近似値  $\{b_{mn}^{t+1}\}$  ( $t = 0, 1, \dots$ ) は,

$$\begin{aligned} \{b_{mn}^{t+1}\} &= \{b_{mn}^t\} + \{\Delta b_{mn}^t\} \\ &= \{b_{mn}^t\} - [f_{rs, b_{mn}}^t]^{-1} \{f_{rs}^t\} \end{aligned} \quad (15)$$

と表わせる. ここで,

$$\begin{aligned} \{f_{rs}^t\} &= \{f_{rs}(b_{11}^t, b_{12}^t, \dots, b_{mn}^t, \dots, b_{uv}^t, \lambda^0 + \Delta \bar{\lambda})\}, \\ \lambda^0 + \Delta \bar{\lambda} &= \text{const.} \end{aligned}$$

である. 収束後の接線剛性行列の行列式を,

$$|K_b| \equiv |f_{rs, b_{mn}}^t|_{\text{converged}} \quad (16)$$

と定義する.

#### (2) 変位制御型解析方法

変位制御型解析の場合には, 未知量は制御を行なうある変位量  $b_{kl}$  を除いた  $\{b_{mn}\}$  と  $\Delta \lambda$  となり, つまり自由度の総数は荷重制御の場合と同じである. この点を考慮して Taylor 展開後の式 (13) の並べ換えを行なう. 与えるものはある変位増分  $\Delta b_{kl}$  であるから, 既知量  $\Delta \bar{b}_{kl}$  と未知量  $\Delta \lambda$  とを入れ換えれば,

$$[\lambda f_{rs, b_{mn}}^0] \{\Delta^\lambda b_{mn}\} + \{f_{rs, b_{kl}}^0\} \Delta \bar{b}_{kl} = \{0\} \quad (17)$$

となる. ここで, 未知量  $\{\Delta^\lambda b_{mn}\}$  は

$$\begin{aligned} \{\Delta^\lambda b_{mn}\} &= \{\Delta b_{11}, \Delta b_{12}, \dots, \Delta \lambda, \dots, \Delta b_{uv}\}^T \\ &= -[\lambda f_{rs, b_{mn}}^0]^{-1} \{f_{rs, b_{kl}}^0\} \Delta \bar{b}_{kl} \\ &= -[\lambda f_{rs, b_{mn}}^0]^{-1} \{f_{rs}^0(b_{mn}^0, b_{kl}^0 + \Delta \bar{b}_{kl}, \lambda^0)\} \end{aligned} \quad (18)$$

と表わせる. ここに  $\{\ }^T$  は転置を表わす. 故に, 第  $t+1$  次近似値 ( $t = 0, 1, \dots$ ) は,

$$\{\lambda b_{mn}^{t+1}\} = \{\lambda b_{mn}^t\} - [\lambda f_{rs, b_{mn}}^t]^{-1} \{f_{rs}^t\} \quad (19)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \{f_{rs}^t\} &= \{f_{rs}(b_{11}^t, b_{12}^t, \dots, b_{kl}^0 + \Delta \bar{b}_{kl}, \dots, b_{uv}^t, \lambda^t)\}, \\ b_{kl}^0 + \Delta \bar{b}_{kl} &= \text{const.} \end{aligned}$$

である. 収束した後の接線係数行列の行列式を,

$$|K_\lambda| \equiv |\lambda f_{rs, b_{mn}}^t|_{\text{converged}} \quad (20)$$

とする.

### 4. 特異点の分類法

#### (1) $|K_b|$ と $|K_\lambda|$ を用いる方法

式 (9) を解く際に得られるつり合い曲線の特異点の分類は, 荷重制御型解析法を適用した場合の接線剛性行列  $[K_b]$ , および変位制御型解析法を適用した場合の接線係数行列  $[K_\lambda]$  の行列式の値をモニターするという簡単な操作により行なうことができる. ここでは, 式 (16), (20) で定義される行列式  $|K_b|$  および  $|K_\lambda|$  が特異になるか否かによって解の唯一性を考察し, つり合い曲線上的の特異点を分類する<sup>19)~21)</sup>. ただし, 退化していない単純特異点のみを対象とする. 荷重が単調に増加または減少するつり合い径路では, ある荷重レベルに対しては唯一の変位が, またある変位に対しては唯一の荷重が対応し, 解の唯一性がどちらに対しても成立するので,  $|K_b| \neq 0, |K_\lambda| \neq 0$  を満足する.

##### a) 極限点

荷重の極限点では, それより大きな荷重レベルではつり合い曲線が存在せず, 極限点より小さな荷重レベルでは解が 2 つ存在し, とともに解の唯一性が成立しない. 一方, 同じつり合い曲線でも, ある変位量に対応する荷重レベルはただ 1 つ存在し, 解の唯一性が満足されるので,  $|K_b| = 0, |K_\lambda| \neq 0$  である.

##### b) 分岐点

分岐点では, ある変位量および荷重レベルのどちらに対しても解の唯一性が成立しなくなる. つまり, 両解析法における接線行列の行列式が,  $|K_b| = |K_\lambda| = 0$  と特異になる.

以上, ここで述べた特異点の種類と 2 種類の接線係数行列  $[K_b], [K_\lambda]$  の行列式の関係を表-1にまとめる.

#### (2) $|K_b|$ と $[K_b]$ の固有ベクトルを用いる方法

$[K_b]$  の固有ベクトルを  $\{e\}$  とすると, つり合い点は

$$\begin{cases} |K_b| = 0 & \text{特異点} \\ \begin{cases} \{f_{rs, \lambda}\}^T \{e\} = 0 & \text{分岐点} \\ \neq 0 & \text{極限点} \end{cases} \\ \neq 0 & \text{通常点} \end{cases} \quad (21)$$

表-1 特異点の分類

	$ K_b $	$ K_\lambda $
つり合い点	$\neq 0$	$\neq 0$
極限点	$= 0$	$\neq 0$
分岐点	$= 0$	$= 0$

と分類できる<sup>26)</sup>。

## 5. つり合い径路の追跡と特異点の分類結果

### (1) 四辺単純支持矩形板の場合

荷重制御法によって求めた四辺単純弾性矩形板のつり合い曲線を図-2に示す。なお、この図に示されているつり合い径路の解は本来板の表裏に対応して正負の対称性を持っているが、本質的には同一の解であるため、ここではその一方のみを表示していることに注意されたい。ここで、簡単のため最小屈座モードが1半波となるようにこの平板の縦横比を $\alpha=0.8$ とした。また幅厚比を $\beta=200$ としたが、結果自体は $\beta$ に依存しない無次元量で表示してある。

図中の実線は接線剛性行列の行列式が正值であるつり合い点を、破線は負値をとるつり合い点を示している。縦軸に作用曲げモーメント  $M$  を板の曲げ剛性  $D$  で無次元化した  $M/D$  を、横軸には面外たわみ  $w$  を板厚  $t$  で無次元化した  $w/t$  とした。面外たわみ  $w$  の評価点は図-1に示す板の(1)点(0.35a,0.70b)である。ここで図-2に示すつり合い径路の名称  $m$  は、分岐点における分岐モードが  $m$  次の  $\sin$  波に等しい<sup>18)</sup>ことに着目し、そのつり合い径路でのモード  $b_{mn}$  の中で最も卓越しているモードの  $m$  の値を指している。つまり  $x$  方向への正弦波の  $m$  半波成分が主要なモードである。本解析では数値計算の効率上の理由から、モード次数の最大値として  $u, v=6$  までしか考慮していないが、変形が大きい場合にはより高次項までとる必要があると思われる。

分岐モード  $m=1$  の径路は初期分岐点である A 点から出発し、荷重の増加に伴って面外たわみは滑らかに増加する。この際、この径路におけるモード成分は  $m=1,3,5$  である。しかし、荷重レベル  $M/D=100$  付近で(1)点の面外たわみはピークを示し、その後は減少する。その後の B 点では2次屈座現象であると思われる不安定現象が生じ、D 点へとジャンプする。この D 点は B 点までのモードとは異なる  $m=3$  単独モードの径路上のつり合い点であり、かつその径路と完全に合流している。また、B 点からジャンプするその他のつり合い径路として、C 点へと至るケースも確認されている。この C

点は D 点とはたわみの方向が異なる径路上の点であるが、 $m=1,3,5$  のモード成分からなり、B 点以前と同様なモード成分となっている。

このように B 点が  $m=1$  の径路の極限点であるとすれば、B 点以降の不安定なつり合い径路が存在するであろうと予想される。しかしこの荷重制御解析法では B 点以降の径路を追跡できないため、D 点へのジャンプが Newton-Raphson 法の収束演算により生じた偶発的なものであるのか、物理的な必然性を持つものであるのか、この時点では不明である。

分岐モード  $m=2$  の径路は分岐点 E から派生してモード  $m=2, 6$  の成分を持つが、荷重増加につれてたわみは単調増加する。さらに  $m=3$  単独モードの径路でも、同様にたわみが単調増加するのみである。ここで、 $w/t=0$  の軸は自明な解であり、A, E, G, J, K 点がこの径路上の点として求まる。実際にこれらの不安定点の中で、図のように A, E, G 点からの分岐解を求めた。

次に変位制御法による数値計算結果を図-3に示す。変位制御法では、つり合い点での荷重制御型剛性行列の行列式および固有値をも同時に得ることができるので、つり合い径路上の行列式の走査を、極めて簡単にかつシステムチェックに行なうことができる。

前図と同様に、あるつり合い点での接線係数行列の行列式の正負を区別してプロットしている。この場合、荷重制御法では求めることのできなかった B 点以後のつり合い径路が得られ、B 点は極限点であることが判明した。B 点以降は荷重の減少に伴って変位も減少し、 $w/t=0$  を横切って符号の異なる H 点へと至る径路が追跡できた。この径路 B-H では、その途中の L 点を臨界点として行列式が正值から負値へと変化し、またその点まで  $m=1$  モードが主要であったものが、L 点以降徐々に変化し、H 点に至っては  $m=3$  モードのみが支配している。よってこの L-H 径路は1次モードから3次モードへの遷移径路であることが判明した。

また、分岐点のうち I 点と F 点からの分岐解を求めてみた。これらの点から分岐する径路では全てのモードが混在したつり合い形状となり、よって系の対称性が全く失われた状態に移行することとなる。なお、この変位制御解析法では、自明解に対応する  $w/t=0$  の軸上では行列式がゼロとなりつり合い点を求めることができないため、荷重制御型解析法にスイッチする必要がある。

図-2,3 の両図を照合し表-1に従って特異点を分類する。まず、極限点としては B 点とその条件を満たしていることが明確に示される。分岐点である条件を満足する点は初期分岐点である点 A, E, G を除いて ( $|K_\lambda|$  による判定ができないため)、2次分岐点である点 F, H, I の3点となる。また、L 点も両解析方法での接線係数行列の行列式の符号が変化する点であり、その点からの分岐径

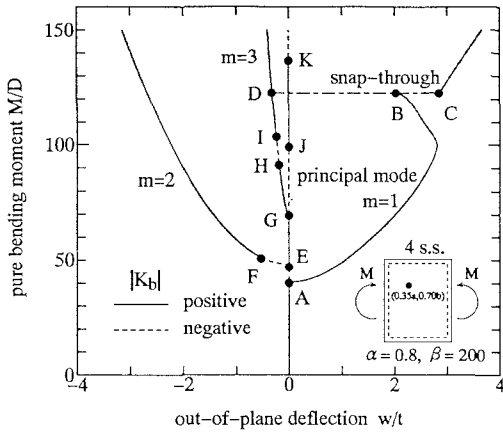


図-2 荷重制御法により求めたつり合い径路 (4s.s.) および  $|K_b|$  の符号

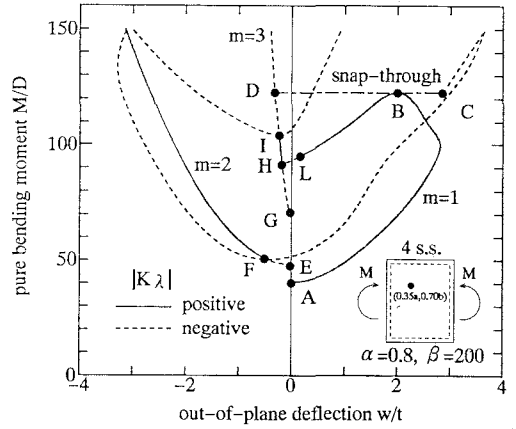


図-3 変位制御法により求めたつり合い曲線 (4s.s.) および  $|K_\lambda|$  の符号

路は本解析では求められていないが、一つの変岐点であると考えられる。

以上のように、面内曲げモーメントを受ける四辺単純支持矩形板のつり合い曲線とその特異点を分類できたが、これらの結果は行列式の正負のみの議論でしかなく、そのつり合い径路の安定性の判断材料としては十分ではない。その径路が安定であるための条件は、(1) 接線剛性行列の行列式が正値であること、(2) 接線剛性行列の固有値全てが正値であること、と記述できる。前者はエネルギー曲面が下に凸であることの必要条件であり、後者は必要十分条件である。固有値全ての正値条件を満たす安定なつり合い径路を実線で再度示したものが図-4である。図中の実線は安定な径路を、破線は不安定な径路を示している。

径路 E-G, G-H, J-K は、各々負の固有値が偶数個存在する径路であるために、図-2のように一見正値として表わされる。しかし、この固有値全ての正値条件を満足する安定なつり合い径路は、0-A-B, F+, I-D+ の3径路のみである。ここで+はその特異点より荷重レベルが高い延長上の径路を意味する。以上の結果より、初期不整が十分に小さい系において実際に起こり得るつり合い径路は唯一 0-A-B-D+ であることが分かる。

## (2) 相対二辺回転固定、他二辺単純支持矩形板の場合

相対二辺回転固定、他二辺単純支持板の場合、荷重制御および変位制御法の両数値計算法によって求められるつり合い曲線に大きな差はない。そのつり合い曲線を図-5,6にそれぞれ示す。ここでは図-1のたわみ評価点のうち(0.35a, 0.70b)の(1)点、(0.65a, 0.70b)の(2)点に注目して説明を加える。

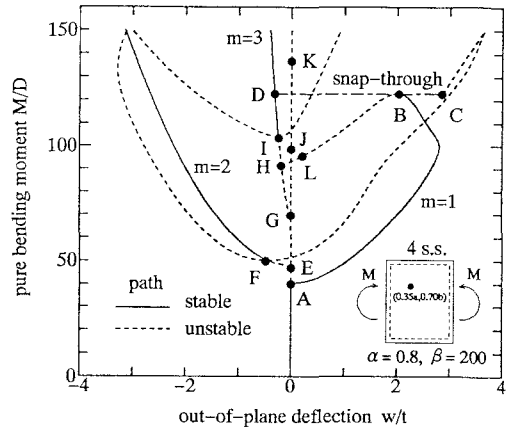


図-4 つり合い径路の安定性 (4s.s.)

荷重レベル  $M/D=60$  近傍の A 点で初期分岐が生じ、その後の変形モードは主要モードを  $m=1$  とした  $m=1, 3, 5$  である。その後荷重レベルの増加とともに変位は単調増加し、荷重レベルが  $M/D=90$  を越えた B 点で、分岐座屈とみられる 2 次座屈が生ずる。それ以降の荷重レベルでは (1) 点での変位は単調に増加し、(2) 点の変位は減少する方向へと変化している。また、2 次分岐点までは奇数次の  $m=1, 3, 5$  モードであったものが、それに偶数次のモードが加わり全てのモードが混在して系の対称性が崩れる。つまり、 $y$  軸に関して対称であったものが非対称の変形になっている。引張側の (3), (4) 点でも非対称な変形となるので、G 点は B 点に対応した 2 次分岐点である。また、径路 A-B を延長した不安定な径路 B-D+ も見つかっている。さらに、初期座屈の高次

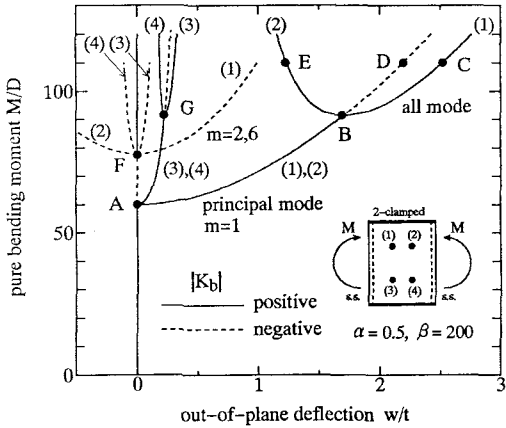


図-5 荷重制御法により求めたつり合い曲線 (2c.&2s.s.)

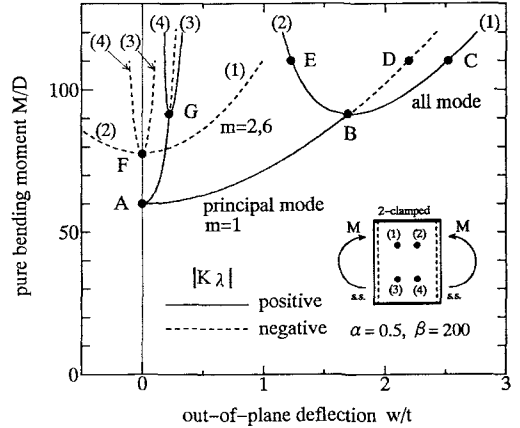


図-6 変位制御法により求めたつり合い曲線 (2c.&2s.s.)

分岐点 F 点とそこからの分岐経路も確認されている。

これら 2 図から接線剛性行列の行列式の正負を考慮し表-1 に従えば、分岐点であるものは B, G 点および  $w/t=0$  の軸上の A, F 点となる。次に径路の安定性を考察すれば、接線剛性行列の正值条件および全固有値の正定値条件を満たす、安定で実際に起こりうる径路は図-7 に示すように A-B-C+ もしくは A-B-E+ である。

## 6. 群論的分岐理論

### (1) ブロック対角化原理の適用

前章 3. で述べた四辺単純支持板の場合の接線剛性行列  $[f_{rs,lmn}]$  をブロック対角化する。これら接線剛性行列を  $[J_\ell]$  で示し、下添字  $\ell$  は径路  $m=\ell$  の接線剛性行列であることを表わす。各接線剛性行列は、構造系の対称性の情報を含んだ座標変換行列  $H^{(18)}$  により

$$[\tilde{J}_1] = H^T [J_1] H = \begin{bmatrix} [\tilde{J}_1^{(315)}] & 0 \\ 0 & [\tilde{J}_1^{(426)}] \end{bmatrix}, \quad (22a)$$

$$[\tilde{J}_2] = H^T [J_2] H = \begin{bmatrix} [\tilde{J}_2^{(315)}] & 0 \\ 0 & [\tilde{J}_2^{(4)}] \\ & [\tilde{J}_2^{(26)}] \end{bmatrix}, \quad (22b)$$

$$[\tilde{J}_3] = H^T [J_3] H = \begin{bmatrix} [\tilde{J}_3^{(3)}] & & 0 \\ & [\tilde{J}_3^{(15)}] & \\ 0 & & [\tilde{J}_3^{(42)}] \\ & & & [\tilde{J}_3^{(6)}] \end{bmatrix} \quad (22c)$$

のようにブロック対角化される。この解析では板の固有関数が Fourier 級数であるために、並べ換えのみの操作

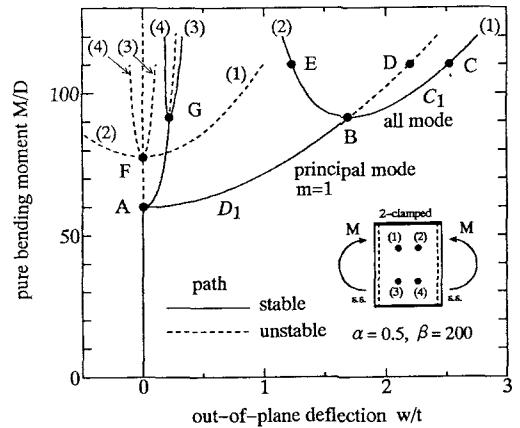


図-7 つり合い径路の安定性 (2c.&2s.s.)

を行なう座標変換によってブロック対角化される。ここで、右辺の  $[\cdot]$  内の  $[\tilde{J}_m^{(ij\cdots)}]$  はモード  $i, j, \dots$  を成分とした対角ブロックであることを示している。

ブロック対角化原理を適用することにより、このようなスパースな行列とすることができると同時に、主径路に対応する密なブロックのみを用いることにより主径路が追跡できる。分岐はすべてその主径路のモードと分岐モードとの mode interaction によるブロックの合併とみなすことができる。この主径路を表わすブロックは径路  $m=1, 2, 3$  に対してそれぞれ  $[\tilde{J}_1^{(315)}]$ ,  $[\tilde{J}_2^{(26)}]$ ,  $[\tilde{J}_3^{(3)}]$  となる。

ブロック対角化後の剛性行列を構成しているブロックは、上述のような主径路だけでなく分岐解をも表わしている。一般に、主径路を表わすブロックが特異となる点は荷重の極限点を表わし、そのブロックの行列式がゼロ

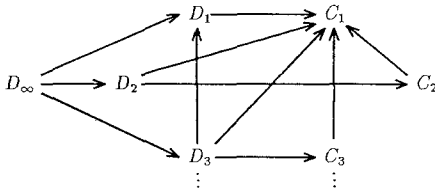


図-8  $D_{\infty}$ -不変な系の分岐階層構造のダイアグラム

となる点で分岐解が生じ、その分岐解はその特異となるブロックに対応する群の対称性を持つ<sup>27)</sup>。

まず、式(22a)~(22c)に示された剛性行列に対応して、各ブロックがどのような対称群に属しているかを示すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \sum (\tilde{J}_1^{(315)}) &= D_1, \quad \sum (\tilde{J}_1^{(426)}) = C_1, \\ \sum (\tilde{J}_2^{(315)}) &= C_1, \quad \sum (\tilde{J}_2^{(4)}) = C_2, \quad \sum (\tilde{J}_2^{(26)}) = D_2, \\ \sum (\tilde{J}_3^{(3)}) &= D_3, \quad \sum (\tilde{J}_3^{(15)}) = D_1, \\ \sum (\tilde{J}_3^{(42)}) &= C_1, \quad \sum (\tilde{J}_3^{(6)}) = C_3 \end{aligned} \quad (23)$$

ここに $\sum(\cdot)$ は括弧内の行列に対応する対称性を表わす群である。また、二面体群 $D_m$ は $m$ 本の軸対称を持つ群、回転群 $C_n$ は角 $2n/\pi$ に対する回転対称性を持つ群を意味する。

さらに本解析で用いている単純支持および二辺回転固定板モデルについて、分岐の仕組みがその境界条件により退化した後での分岐ダイアグラムを図-8に示す。ここで、 $D_{\infty}$ は円の対称性を表わす群を意味すると共に $w=0$ という自明解の対称性を表わし、 $D_{\infty}$ から矢印の方向に分岐解が進むという分岐の道案内を示している。

図中の矢印は、例えば $A \rightarrow B$ では $A$ 不変な解から $B$ 不変な解が分岐することを表わしている。しかし実際の物理現象では、 $B$ 不変な解が主経路である $A$ 不変な解に戻ることも時としてあり得る。また、これらの分岐プロセスは全て単純分岐となることが分かっている<sup>18)</sup>。

## (2) 群論的分岐理論に基づく分岐点の分類

これらブロック対角化行列の各ブロックの行列式の正負を、各経路について示したものが図-9である。前述のようにこの図中の実線は安定な経路を、破線は不安定な経路を示している。

$w/t=0$ の軸は自明な解であり、この軸から分岐する $m=1,2,3$ の分岐経路は対称性 $D_1, D_2, D_3$ を持つ。同様な考察から、5章(1)で述べた分岐座屈点 $J, K$ 点からの分岐解は $D_4, D_5$ の対称性をもつ経路であると考えられる。これらの座屈点 $J, K$ 点からの分岐経路上における分岐点近傍でのモードは、それぞれ4,5次であると考えられる。

$m=2$ の経路ではその対角ブロックは、 $D_2, C_2, C_1$ の対称性をそれぞれ持っている。このパスでの主経路を表わすのは $D_2$ であり、2,6次モードの対称性をもつブロック $[\tilde{J}_2^{(26)}]$ により構成されている。分岐解を表わすブロック $C_1$ の行列式が $F$ 点でゼロすなわち特異となり、その分岐解 $C_1$ が枝分れしている。このようにどのブロックが特異になるかを調べることにより、特異点を分類できる。

また、 $m=3$ の主経路は $D_3$ 対称性を持つブロックであるが、 $H, I$ 点で行列式の符号が変化するブロックがある。この経路でのブロックの対称性は $D_3, D_1, C_3, C_1$ であるが、 $I$ 点より $C_1$ 不変な解が分岐しているのが、図より分かるであろう。また、 $H$ 点より $D_1$ 不変な解が枝別れし、 $m=1$ の主経路とつながっている。

$m=1$ の経路ではまず、自明解 $w/t=0$ 軸からの分岐が $A$ 点で生じている。この経路での対角ブロック行列はそれぞれ $D_1, C_1$ の対称性を持ち、その中で $D_1$ が主経路を、 $C_1$ が分岐解を表わしている。 $B$ 点以後は $B \rightarrow D+$ の遷移経路、 $B-H$ の下降経路が存在する。経路 $A-B-L$ においては $B$ 点で主経路を表わすブロック $[\tilde{J}_1^{(315)}]$ の行列式の符号が正から負へと変換し、 $B-L$ 経路ではまた正に復帰する。

このように主経路を表わすブロックが特異となることは、その点に分岐解ではなく極限点であることを意味し、 $B-H$ の下降経路の存在が予見できることにもなる。また、この $B-H$ 経路上には分岐点 $L$ が存在し、本解析では求められていないが、この点から枝分れする経路はやはり $C_1$ 対称性を持つことが分かる。さらに、 $B \rightarrow C+$ では分岐解を表わす $C_1$ ブロックも同時に特異となり、結果として $D_1$ 対称性を保持した複雑な挙動を示すこととなる。次に図-7に示す分岐解も、 $D_{\infty} \rightarrow D_1 \rightarrow C_1$ という分岐過程であることが理解できる。

このように、ブロック対角化を行えば主経路を表わすブロックのみによって主経路を容易に追跡することができる。群論によってあらかじめその構造系の分岐階層構造を知り、それに基づいた分岐ダイアグラムを得ておけば、ブロック対角化されたブロックについての数値計算により、分岐の仕組みを踏まえた分岐解析を行なうことができる。つまり、分岐ダイアグラムはその系の分岐階層構造を正確に表現する道標とも言える。よって、非常に複雑に見える弾性平板の後座屈挙動でも、その分岐の仕組みは図-8に示されるような分岐ダイアグラムによってすでに明確に表現されていることになる。ただし、分岐がいつ起こるか、どちらの分岐がより早く起こるかということは構造例ごとの個別論となるので、実際の数値計算をする以外に知る方法はない。



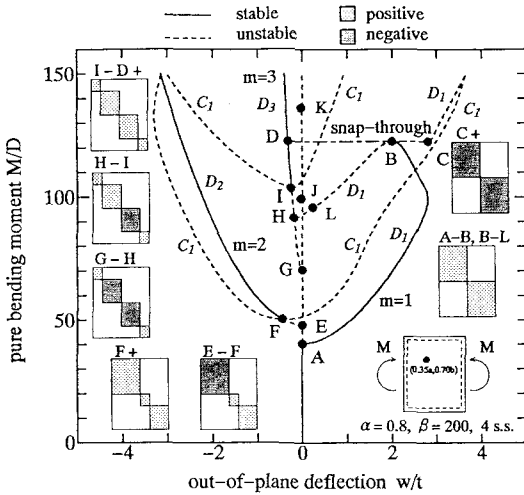
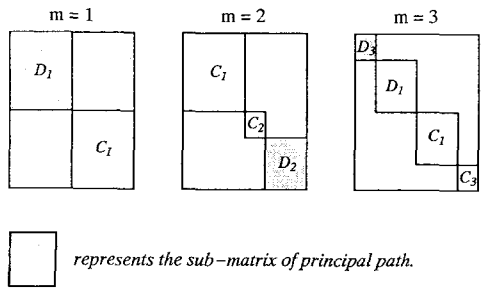


図-9 つり合い曲線およびブロック対角化行列の各ブロックの行列式  $|j|$



### 7. 初期不整の影響

この章では板の後座屈挙動に初期不整が及ぼす影響を種々の視点から調べる。

#### (1) 安定対称分岐点の初期不整感度則

初期不整の影響の定量的評価法としては、Koiter<sup>28)</sup>の2/3乗則が有名であるが、図-9のAのような安定対称分岐点に対しては、物理的に意味が無い解に対する情報しか与えない。そこで、安定対称分岐点に対しても適用可能な著者等が提案する感度則<sup>23),24)</sup>により初期不整の影響を定量的に評価することとする。

安定対称分岐点の例として、図-1と同じモデルの四辺単純支持板の弾性後座屈解析<sup>24)</sup>を行なう。この板の面外たわみとして直角2方向に振幅  $a_{11} = \epsilon < 0.4$  の1半波の初期不整を与え、板厚で無次元化された変位  $\bar{w} \equiv (w + w_0)/t$  の着目点を  $(0.5a, 0.7b)$  とする。図-10に初期不整  $\epsilon$  の値を種々変えた場合の荷重-変位曲線を示す。この曲線は、分岐点の近傍では十分小さい初期不整に対して漸近的に分岐方程式

$$\bar{w}\bar{f} + p\bar{w}^3 + q\epsilon + \text{高次項} = 0 \quad (24)$$

により近似できる<sup>22),23)</sup>。ここに  $\bar{f} \equiv \Delta M/D$  は分岐荷重からの荷重の増分値を表し、 $p$  と  $q$  はある定数である。図-10中に併記した、分岐点からおろした放物線

$$\bar{f} = -g\bar{w}^2 \quad (25)$$

( $g = 40.25, 40.25 \times 4$ ) と式(24)で近似される荷重-変位曲線の交点における変位の値  $\hat{w} \equiv \bar{w}|_{\bar{f} = -g\bar{w}^2}$  は

$$\hat{w} = K^{1/3} \epsilon^{1/3} + O(\epsilon) \quad (26)$$

という1/3乗則に従い、初期不整感度が非常に高い(初期不整の小さな変化に対し大きく変動する)。ここで

$$K = \frac{q}{g-p} \quad (27)$$

である。このように放物線(25)上で変位を評価することは一見奇異に感じられるかもしれないが、 $g=0$  とおけば  $\bar{f}=0$ 、すなわち完全系の座屈荷重における変位を評価できるので問題はない。図-10の計算結果に基づいて求めた、交点における変位  $\hat{w}$  と初期不整の1/3乗との関係を図-11に示す。両者には正確に直線関係が成立っており、漸近式(26)に従っている。図-10に分岐方程式(24)による近似値を記号(x)により併記した。この近似値は図中に実線で示した解析値と非常によく一致している。このように安定対称分岐点近傍の初期不整の影響は定量的に評価できるものである。

次に複数の初期不整変数  $(d_1, \dots, d_p)$  が各々平均ゼロのある正規分布に従う場合の  $\hat{w}$  の確率変動を調べてみる。文献29)より、式(26)の変数  $K$  は初期不整変数の関数として、

$$K = \sum_{i=1}^p c_i d_i \quad (28)$$

と表される。ここに  $c_i$  はある定数である。「正規分布の和は正規分布である」ことから、変数  $K$  は平均ゼロ、ある分散  $\sigma$  の正規分布に従うことが分る。式(26)の左辺の変数  $\hat{w}$  の確率密度関数  $f_{\hat{w}}(\hat{w})$  は変数  $K$  の確率密度関数を変数変換することにより

$$f_{\hat{w}}(\hat{w}) = f_K(K) \frac{dK}{d\hat{w}} = \frac{3\hat{w}^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\hat{w}^6}{2\sigma^2}\right), \quad (-\infty < \hat{w} < \infty) \quad (29)$$

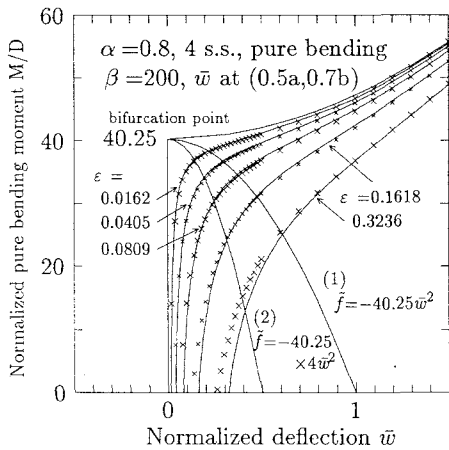


図-10 安定対称分岐点近傍のつり合い径路とその漸近近似値との関係(分岐点からの放物線は(25)式)

と求まる( $\hat{\sigma} = \sigma \epsilon$ )。前述の初期不整変数( $d_1, \dots, d_p$ )が各々平均ゼロのある正規分布に従うという仮定は、中心極限定理により比較的妥当な近似であるので、式(29)は $\hat{w}$ の確率分布の良好な近似を与えるものと思われる。

### (2) 変位の極大・極小点の初期不整感度則

ある変位と荷重パラメータは本質的に等価な独立変数であるので、変位の極大・極小点は荷重の極大・極小点と同等な取り扱いができる。荷重の極大・極小点に関する既往の研究<sup>29)</sup>から、変位の極大・極小点は初期不整の1乗に比例する初期不整感度を持ち、初期不整感度が低いこと、初期不整変数が各々平均ゼロのある正規分布に従う場合には、点の変位の極大・極小点の値はある正規分布に従うことが分かっている。

### (3) 初期不整のモンテカルロシミュレーション

初期たわみモード $a_{mn}$ の振幅として平均0、分散1の正規乱数を用いたモンテカルロシミュレーションを行ない、初期不整の影響を定量的に調べた。初期不整パターンとして5種類を考え、その大きさも振幅 $a_{mn}$ の1/100, 2/100, 5/100, 1/10の4ケースを与えた。その結果として得られたつり合い曲線のうちの代表例を図-12に示す。

初期不整の影響により、つり合い径路は種々に変わるが、 $m=1,2,3$ のいずれかの径路の近傍に生じ、特に初期不整が小さい場合には、 $m=1$ の径路の2次座屈荷重付近でやはり飛び移ることが数値例からも確認された。この場合の他の径路への移行(branch switching)や飛び移りの仕組みは、下記の3ケースに大別される。

1) 主径路から径路A-Bに移行し、Bから径路D~に

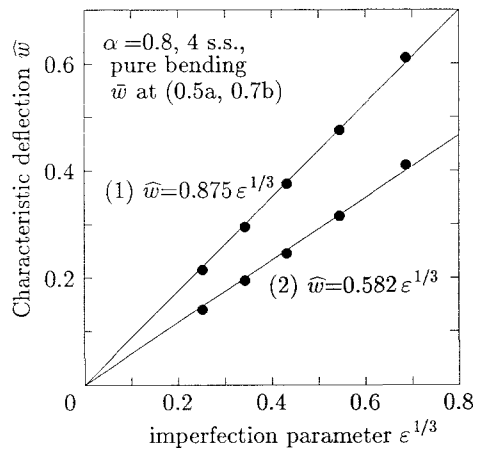


図-11  $\hat{w}$  と  $\epsilon^{1/3}$  の関係

飛び移る。

- 2) 主径路から径路A-Bに移行し、遊離径路C~に飛び移る。
- 3) 主径路から径路E-Fに移行する。

このモンテカルロシミュレーションの結果によると、1)のケースが最も良く発生し、他の2ケースは比較的稀であることが判明した。ケース2)では遊離解に飛び移っているが、このことは原点(荷重ゼロ、変位ゼロの点)につながる径路を丹念に調べて行くという現行の分岐解析の限界を示すものであり、遊離解を直接探索し得る手法<sup>30)</sup>の開発の必要性を物語るものである。

これらの3ケースを各径路の対称群を用いて表わすと、それぞれ

$$\begin{aligned} D_\infty &\Rightarrow D_1 \Rightarrow D_3 \\ D_\infty &\Rightarrow D_1 \Rightarrow D_1 \\ D_\infty &\Rightarrow D_2 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここに $\Rightarrow$ は他の径路への移行か飛び移りを表わす。各ケースともに図-8に示す分岐ダイヤグラムに従っている。他の径路への移行の際にこの仕組みに従うのは当然であるが、飛び移りの際にもこの分岐ダイヤグラムに従うのは面白い性質であり、その一般性の検証は今後の課題である。

安定対称分岐点Aの近傍では、初期不整の変動に伴う変位の変動は大きく、変位の極大点の近傍では変位の変動は比較的小さく、本章(1),(2)節で導入した漸近則の妥当性を物語っている。ただし漸近則は分岐点や変位の極大点近傍の局所的な性質は近似できても、どの径路からどの径路へと飛び移って行くかという大局的な性質は近似できない。このことはこの節で行ったような大局的な挙動のモンテカルロシミュレーションの重要性を示すものである。板のたわみの大きさを評価するに際し、比

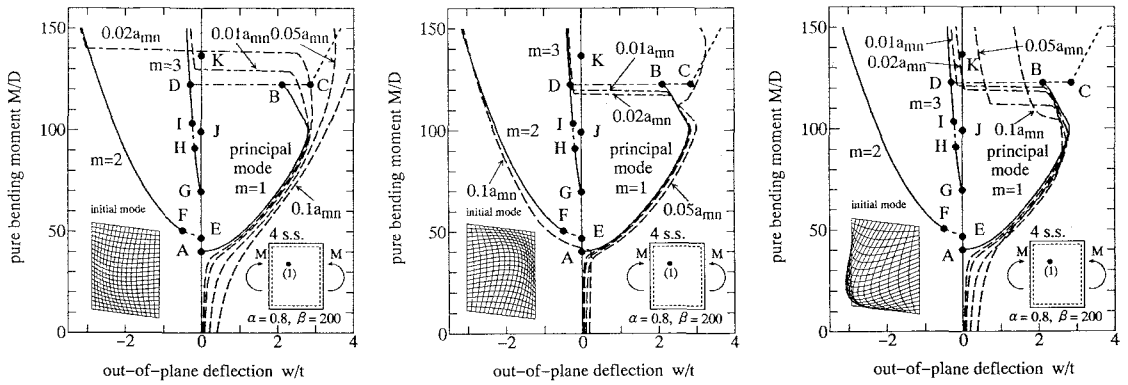


図-12 モンテカルロ法により与えた初期不整とつり合い径路の関係

較的たわみが小さい範囲では漸近則が有効であり、ある程度以上大きい場合には径路の移行や飛び移りを考慮可能とするため、本論文で行ったような後座屈解析が必要であると言える。

## 8. 結論

四辺単純支持および相対二辺回転固定、他二辺単純支持の弾性平板に対し後座屈挙動解析を行った。得られたつり合い曲線上の不安定点(分岐点および極限点)の分類やたわみの評価を行ない、以下の結論を得た。

- 1) 四辺単純支持矩形板の初期座屈後、径路  $m=1$  から径路  $m=3$  への飛び移り座屈点が存在することを確認すると共に、他の多くの分岐点も存在することを示した。また相対二辺回転固定、他二辺単純支持矩形板の特異点は分岐点であることを検証し、弾性矩形板の後座屈挙動を明らかにした。
- 2) 極限点以降の連続したつり合い径路を追跡するため、本研究では荷重制御および変位制御法の両数値計算法を併用し、つり合い径路の全容を求めた。この手法を用いることにより、2次分岐点からの分岐径路をも求めることができた。
- 3) 矩形板の後座屈挙動解析に群論的分岐理論を適用した。接続剛性行列にブロック対角化原理を適用して得られる対角ブロックのみを用いることにより、つり合い曲線の主径路が求められること、また分岐の仕組みはまさに分岐ダイアグラムに従うことを数値的に確認し、この手法の有用性を検証した。
- 4) モンテカルロシミュレーションにより初期不整の影響を調べ、遊離径路への飛び移りや初期不整の変化

による解のモードの変化(mode switching)が存在することを示し、後座屈解析の重要性を示した。

- 5) 板の後座屈挙動は2次座屈や飛び移りを含む複雑な現象であり、その解明には各種の解析手法を組み合わせさせた複眼的な方法論が必要である。

## 参考文献

- 1) Levy, S.: Bending of rectangular plates with large deflections, *NACA, Technical Notes*, No.846, 1942.
- 2) Coan, J.M.: Large deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, *J. Appl. Mech.*, Vol.18, pp.143-151, 1951.
- 3) Yamaki, N.: Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol.26, pp.407-414, 1959.
- 4) Bauer, L. and Reiss, E.L.: Nonlinear buckling of rectangular plates, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol.13, No.3, pp.603-626, 1965.
- 5) Sharman, P.W. and Humpherson, J.: An experimental and theoretical investigation of simply-supported thin plates subjected to lateral load and uniaxial compression. *Aeronaut. J., Roy. Aeronaut. Soc.*, Vol.72, pp.431-436, 1968.
- 6) Chilver, A.H.: Coupled modes of elastic buckling. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.15-28, 1967.
- 7) Uemura, M. and Byon O-II: Secondary buckling of a flat plate under uniaxial compression Part 1: Theoretical analysis of simply supported flat plate. *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.12, pp.355-370, 1977.
- 8) Uemura, M. and Byon O-II: Secondary buckling of a flat plate under uniaxial compression Part 2: Analysis

- of clamped plate by F.E.M. and comparison with experiments. *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.13, pp.1-14, 1978.
- 9) Supple, W.J.: Coupled branching configurations in the elastic buckling of symmetric structural systems. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.9, pp.97-112, 1967.
  - 10) Supple, W.J.: On the change in buckle pattern in elastic structures. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp.737-745, 1968.
  - 11) Supple, W.J.: Changes of wave-form of plates in the post-buckling range, *Int. J. Solids Structures*, Vol.6, pp.1243-1258, 1970.
  - 12) Nakamura, T. and Uetani, K.: The secondary buckling and post-secondary-buckling behaviours of rectangular plates, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.21, pp.265-286, 1979.
  - 13) Maaskant, R. and Roorda, J.: Mode jumping in biaxially compressed plates, *Int. J. Solids Structures*, Vol.29, No.10, pp.1209-1219, 1992.
  - 14) 藤井 堅, 大村 裕: 初期たわみを有する曲線桁腹板パネルの面内曲げによる弾性非線形挙動, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.117-126, 1989.
  - 15) Nakazawa, M., Iwakuma, T. and Kuranishi, S.: Elastic buckling strength and post-buckling behavior of a panel under unequal bending and shear, *Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE*, Vol.8, No.1, pp.11s-20s, 1991.
  - 16) 中沢正利: 弾性薄肉平板の座屈後不安定挙動, 宇宙構造物シンポジウム (第8回), pp.161-166, 1992.
  - 17) Nakazawa, M., Iwakuma, T., Kuranishi, S. and Hidaka, M.: Instability phenomena of a rectangular elastic plate under bending and shear, *Int. J. Solids Structures*, Vol.30, No.20, pp.2729-2741, 1993.
  - 18) 池田清宏, 中沢正利, 和知 聡: 長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化, 土木学会論文集, 第507号 /I-30, pp.65-75, 1995.1.
  - 19) 半谷裕彦, 川股重也: 固有値問題としての分岐および移座屈, 日本建築学会学術講演梗概集, pp.1021-1022, 1971.11.
  - 20) Hangai, Y. and Kawamata, S.: Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, *Report of the Institute of Industrial Science*, The University of Tokyo, Vol.22, No.5, Jan., 1973.
  - 21) 日本鋼構造協会, 成岡昌夫, 中村恒善共編: 骨組構造解析法要覧, 培風館, pp.91-117, 1976.
  - 22) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
  - 23) Ikeda, K. and Goto, S.: Imperfection sensitivity for size effect of granular materials, *Soils and Foundations*, Vol.33, No.2, pp.157-170, 1993.
  - 24) 池田清宏, 岩熊哲夫, 中沢正利, 後藤 聡, 堀 宗朗: 初期不整感度則による分岐特性の漸近近似法, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.407-418, 1993.
  - 25) 森脇良一, 奈良 敬: 面内組合せ荷重を受ける鋼桁腹板の座屈強度, 構造工学論文集, Vol.35A, pp.127-134, 1989.
  - 26) 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析 一般逆行列とその応用, 培風館, pp.141-149, 1991.
  - 27) Ikeda, K. and Murota, K.: Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.86, No.2, pp.215-243, 1991.
  - 28) Koiter, W.T.: On the stability of elastic equilibrium, *Ph.D. Dissertation*, Delft, Holland, 1945. (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).
  - 29) Ikeda, K. and Murota, K.: Statistics of normally distributed initial imperfections, *Int. J. Solids Structures*, Vol.30, No.18, pp.2445-2467, 1993.
  - 30) 藤井文夫, 北川竜三: 弾性分岐問題における分岐方向の予測について, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.323-332, 1993.

(1994. 9.12 受付)

## NUMERICAL IDENTIFICATION OF SECONDARY BUCKLING PHENOMENA OF ELASTIC RECTANGULAR PLATE UNDER PURE BENDING

Masatoshi NAKAZAWA, Kiyohiro IKEDA, Satoshi WACHI  
and Shigeru KURANISHI

In this paper, the secondary buckling phenomena of the elastic rectangular plate subject to the pure bending moment are investigated. The bifurcation points are classified numerically based on the determinant of tangential stiffness matrix and of its diagonal blocks obtained by means of the group-theoretic bifurcation theory. By using the sub-matrices within the whole block-diagonalized one, the informations of the instability points and equilibrium paths after bifurcation are easily obtained. The quantitative influence of the initial imperfections are investigated based on the asymptotic laws and the Monte Carlo simulations.