

# 変動荷重を受けるトラス構造物のエネルギー原理に基づく弾塑性履歴挙動の解析法に関する研究

大久保禎二<sup>1</sup>・和多田康男<sup>2</sup>・西村一隆<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 正会員 工博 愛媛大学教授 工学部土木海洋工学科 (〒790 松山市文京町3番)

<sup>2</sup> 正会員 博士 (工学) 宇部興産 (株) (〒755 宇部市大字小串字沖の山1980番地)

<sup>3</sup> 山口県庁 (〒753 山口市滝町1番1号)

本論文では、変動荷重を受けるトラス構造物の弾塑性履歴挙動を、エネルギー原理に基づき構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより能率的に解析できる新しい方法を提案している。各変動荷重に対する全コンプリメンタリーエネルギーを、先行荷重により生じている応力度およびひずみの点を原点として計算し、これを変動荷重のみを考慮した力の釣合条件式のもとで最小化することにより、増分荷重および減少荷重に対して正確に解析し得ることを変位法による解と比較することにより明らかにするとともに、複雑な荷重履歴を受けるトラス構造物の解析例により、本論文で提案した解析法により、変位法と比較して極めて単純かつ能率的にいかなる非線形応力度-ひずみ関係を有する材料よりなるトラス構造物の弾塑性履歴挙動の解析をも正確に行えることを明らかにしている。

**Key Words** : *minimum complementary energy principle, elastic-plastic hysteresis analysis, truss structures, fluctuating loads, sequential quadratic programming*

## 1. ま え が き

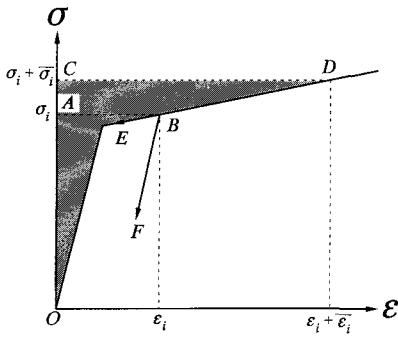
構造物が変動荷重を受ける場合の材料の非線形性を考慮した弾塑性履歴挙動の解析法としては、これまでに主として変位法の荷重増分法に基礎をおく解析法が種々提案されている<sup>1)</sup>。これらの方法においては、変動荷重の全過程を数多くの荷重段階に分割し、分割された各荷重ごとに非線形材料の応力度-ひずみ関係を用いて解くことにより構造物の弾塑性履歴挙動を解析している。この場合、変位法に基づく解析法においては、各部材の応力状態に応じて部材剛性マトリックスを修正する必要があり、非線形の応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる構造物の弾塑性履歴挙動を解析するためには多くの計算時間を必要とすることになる。特に鋼などの材料においては、ひずみ硬化等により実際の応力度-ひずみ関係が複雑なものとなり、またコンクリートなどでは応力度-ひずみ関係が曲線で表わされ、このような複雑な応力度-ひずみ関係を有する材料の場合には、上記の荷重増分法を用いて数多く繰り返される変動荷重の全過程を解析するためには膨大な計算時間が必要となる。

ところで、著者等はこれまでに固定荷重を受ける骨組構造物の材料非線形解析問題に関して、骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを、各可動節点における力の釣合条件のもとで逐次二次計画法 (SQP) を用い

て最小化することにより、複雑な応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる骨組構造物の解析をも、荷重を分割することなく極めて能率的かつ正確に解を求めることのできる方法を提案している<sup>2)-5)</sup>。本研究では、この解析法をさらに発展させ、任意の非線形な応力度-ひずみ関係を有する材料からなるトラス構造物が風荷重、雪荷重、車輛荷重、クレーン荷重などにより変動荷重を受ける場合の弾塑性履歴挙動の解析を、変位法に基づく荷重増分法と比較して極めて単純な解析アルゴリズムで、より能率的に解析することのできる方法を提案するものである。

本研究では、まず最小コンプリメンタリーエネルギーの原理<sup>6)</sup>に関して次の仮定を設定する。すなわち、「トラス構造物が先行荷重によりすでに各部材に応力度およびひずみが生じている場合、新たに載荷される増分荷重あるいは減少荷重に対して、各部材ごとに使用材料の応力度-ひずみ曲線上の先行荷重により生じている応力度およびひずみの点を原点とする応力度-ひずみ曲線を考え、この応力度-ひずみ曲線を用いて増分荷重あるいは減少荷重に対して最小コンプリメンタリーエネルギーの原理が成り立つものとする」。

つぎに、上記の仮定のもとで、増分荷重あるいは減少荷重による各部材の応力度を、文献2)ですでに確立しているトラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー



図一 材料の非線形応力-ひずみ挙動およびコンプリメンタリーエネルギー密度

最小化のアルゴリズムを用いて、各可動節点における力の釣合条件のもとで構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化し、増分荷重あるいは減少荷重に対する各部材の応力度およびひずみの増分量あるいは減少量を求める方法を提案するものである。

さらに、本研究で提案しているトラス構造物の変動荷重に対する弾塑性履歴挙動の解析法の妥当性を検討するため、トラス構造物が増分荷重のみを受ける場合、および複数個の増分荷重および減少荷重を受け各部材が弾塑性履歴挙動をする場合について解析を行うとともに、変位法による解析結果との比較を行い、本論文で提案している方法により、変動荷重を受けるトラス構造物の弾塑性履歴挙動の解析がきわめて能率的かつ容易に行えることを明らかにしている。

ただし、本研究では、トラスの弾塑性履歴挙動の解析にあたって、実際のトラス構造物において節点を剛節とすることにより生ずるトラス部材の二次応力の影響、大きなひずみ領域における部材の座屈現象、幾何学的非線形性が解析結果に及ぼす影響、材料のクリープによる影響などについては考慮していない。したがって、本論文で提案している弾塑性解析法を実際の構造物に適用するにあたっては上記の諸条件をも考慮する必要がある。

## 2. 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に関する一仮定

著者等が文献2)および3)で提案している最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の材料非線形解析法によれば、トラス構造物の各部材の軸力  $N$  は全ての可動節点における力の釣合条件のもとで構造物の全コンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_c(N)$  を最小化することにより求めることができる。

いま、トラス構造物に荷重  $P$  が作用している場合、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理により各部材

に作用する軸力  $N$  を求めるために必要とする各部材のコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta$  は、使用材料の応力度-ひずみ曲線を用いて各部材に生ずる応力度  $\sigma (= N/A)$  と、それに対応するひずみ  $\epsilon$  より、図一の  $OAB$  の面積として求められる。ここに  $A$  は各部材の断面積である。また、増分荷重  $\bar{P}$  が作用し  $P + \bar{P}$  となった場合でも、荷重を  $P$  と  $\bar{P}$  に分割する必要はなく、 $P + \bar{P}$  により各部材に生ずる応力度  $\sigma + \bar{\sigma}$  および  $\epsilon + \bar{\epsilon}$  より、図一に示す  $OCD$  の面積  $\beta'$  をコンプリメンタリーエネルギー密度として、全ての可動節点における力の釣合条件のもとで構造物全体のコンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより各部材の真の部材力を求めることができる。このように、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく非線形解析法においては、荷重が増加する場合には、荷重を分割する必要はなく、全ての荷重の総計を最終的な荷重として考慮し、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを釣合条件式のもとで最小化することにより真の部材力が求められる。またこのことは、この解析法の大きな長所の1つである。

しかし、部材の応力度が弾性域を越え塑性領域にある状態で荷重が減少する場合、鋼材等の構造用材料においては、応力度-ひずみの挙動は図一の  $BE$  に沿ってではなく  $BF$  に沿って減少する<sup>たとえは1),7)</sup>。したがって、荷重が減少する場合の各部材に生ずる軸力は上で述べた解析法により求めることができない。

そこで本研究では、増分荷重あるいは減少荷重  $\bar{P}$  により生ずる各部材の軸力の変動量  $\bar{N}$  の解析法を開発するにあたって、まず次のような仮定を設定した。すなわち、「トラス構造物がすでに先行荷重  $P$  により先行応力度  $\sigma_p$  および先行ひずみ  $\epsilon_p$  を受けている場合、新たに載荷される増分荷重  $+\bar{P}$  に対して図二に示す点  $B(\sigma_p, \epsilon_p)$  を原点とし、 $BED$  をコンプリメンタリーエネルギー密度  $\bar{\beta}$ 、また減少荷重  $-\bar{P}$  に対しては図三に示す点  $B$  を原点とし、同じく  $BED$  をコンプリメンタリーエネルギー密度  $\bar{\beta}$  として考慮しても、変動荷重  $\bar{P}$  に対して最小コンプリメンタリーエネルギーの原理が成り立つ」との仮定を設定した。

上記の仮定が成り立つものとするれば、変動荷重  $\bar{P}$  によるトラス構造物の各部材の軸力の変動量  $\bar{N}$  は、各可動節点における  $\bar{P}$  のみを考慮した力の釣合条件のもとで、先に述べた各部材のコンプリメンタリーエネルギー密度  $\bar{\beta}$  を用いて、トラス構造物の  $\bar{P}$  による全コンプリメンタリーエネルギー  $\bar{\Pi}_c(\bar{N})$  を最小化することにより求めることができる。

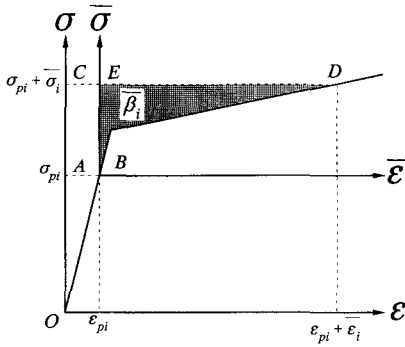


図-2 増分荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度

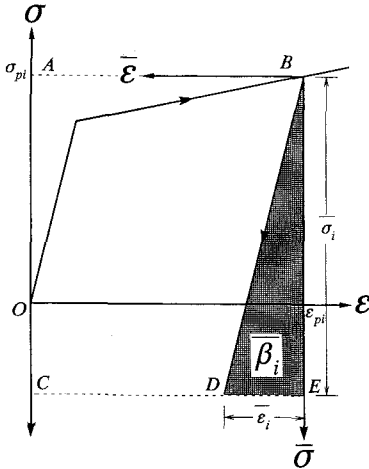


図-3 減少荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度

### 3. $\bar{P}$ による軸力の変化量 $\bar{N}$ の材料非線形解析法の定式化

2. で述べた仮定に基づき、増分荷重あるいは減少荷重  $\bar{P}$  によるトラス構造物の各部材の軸力の変化量  $\bar{N}$  を決定する解析法は次のように定式化することができる。

まず、 $\bar{P}$  およびそれにより生ずる各部材の軸力の変化量  $\bar{N}$  を用いて各可動節点における力の釣合条件式は次式で与えられる。

$$\mathbf{g}(\bar{N}) = \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{C}\bar{N} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{P}} = [\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_l]^T$ ,  $\mathbf{g}(\bar{N}) = [g_1(\bar{N}), \dots, g_m(\bar{N})]^T$ ,  $\mathbf{C}$  は各部材の軸力  $\bar{N}_i (i=1, \dots, n)$  の可動節点変位成分への変換マトリックス、 $n$  は部材数、 $m$  は自由度の数、 $l$  は変動荷重の数である。

また、 $\bar{P}$  による部材  $i$  のコンプリメンタリーエネルギー密度  $\bar{\beta}_i$  は図-2 あるいは図-3 を参照して次式より計算することができる。

$$\bar{\beta}_i = \int_{\sigma_{pi}}^{\sigma_{pi} + \sigma_i} [\varepsilon_i(\sigma_i) - \varepsilon_i(\sigma_{pi})] d\sigma_i \quad (2)$$

したがって  $\bar{P}$  による部材  $i$  のコンプリメンタリーエネルギー  $\bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i)$  は次式により計算される。

$$\bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i) = \int_{V_i} \bar{\beta}_i dV = \bar{\beta}_i A_i l_i \quad (3)$$

ここに、 $V_i$ ,  $A_i$  および  $l_i$  はそれぞれ部材  $i$  の体積、断面積および部材長である。トラス構造物全体の  $\bar{P}$  による全コンプリメンタリーエネルギー  $\bar{\Pi}_C(\bar{N})$  は次式で求められる。

$$\bar{\Pi}(\bar{N}) = \sum_{i=1}^n \bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i) \quad (4)$$

式 (1) および式 (4) を用いて、トラス構造物の  $\bar{P}$  による軸力  $\bar{N}$  を求めるための全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、各部材の軸力の変化量  $\bar{N}$  を未知変数として次のように定式化することができる。

$$\text{find } \bar{N}, \text{ which} \\ \text{minimize } \bar{\Pi}_C(\bar{N}) = \sum_{i=1}^n \bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i) \quad (5)$$

$$\text{subject to } \mathbf{g}(\bar{N}) = \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{C}\bar{N} = 0 \quad (6)$$

### 4. 全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題の解法

式 (5), (6) で定式化した全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、逐次二次計画法 (SQP) および線形計画法 (LP) とを組み合わせた最適化手法により能率的に解くことができる。その解析アルゴリズムの詳細については文献1) で述べているので、ここではその概要のみを記すこととする。

#### (1) 近似二次計画問題の導入

式 (5), (6) の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題における目的関数  $\bar{\Pi}_C(\bar{N})$  (式 (5)) を未知変数  $\bar{N}$  について Taylor 展開し、 $\bar{N}$  の変化量  $\Delta\bar{N}$  の二次形式  $Q(\Delta\bar{N}^k)$  で近似するとともに、式 (6) の線形制約条件式を  $\Delta\bar{N}$  の線形関数として表現することにより、 $k$  th stage における  $\bar{N}$  の改良のための変化量  $\Delta\bar{N}^k$  を決定する近似二次計画問題を次のように導入することができる。

$$\text{find } \Delta\bar{N}^k, \text{ which} \\ \text{min. } Q_c(\Delta\bar{N}^k) = \nabla \bar{\Pi}_c^T \Delta\bar{N}^k + \frac{1}{2} \Delta\bar{N}^{kT} \mathbf{H}_c^k \Delta\bar{N}^k \quad (7)$$

$$\text{s. t. } h_j(\Delta\bar{N}^k) = g_j(\bar{N}^k) + \mathbf{C}_j \Delta\bar{N}^k = 0 \quad (8) \\ (j=1, \dots, m)$$

ここに、 $\Delta\bar{N}^k = [\Delta\bar{N}_1^k, \dots, \Delta\bar{N}_n^k]^T$ ,  $\nabla \bar{\Pi}_c^k = [\partial \bar{\Pi}_c / \partial \bar{N}_1, \dots, \partial \bar{\Pi}_c / \partial \bar{N}_n]^T$ ,  $\mathbf{H}_c^k$  は正定値行列であり、BFGS 公式により改良する。

式 (7) における全コンプリメンタリーエネルギーの偏微分係数  $\nabla \bar{\Pi}_c$  は、図-4 および図-5 より次式により簡単に計算することができる。

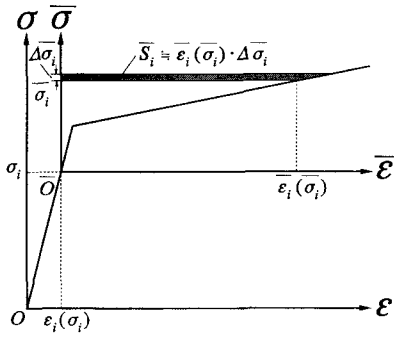


図-4 増し荷重に対する  $\bar{\beta}_i$  の変化量:  $\bar{S}_i$

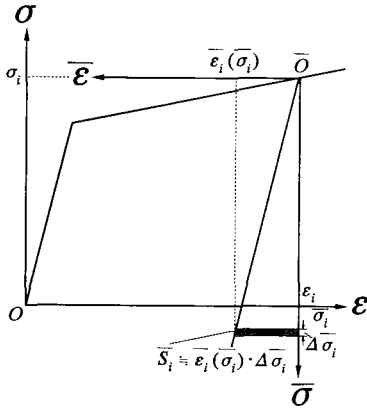


図-5 減少荷重に対する  $\bar{\beta}_i$  の変化量:  $\bar{S}_i$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}_c}{\partial \bar{N}_i} = \frac{\partial \bar{\Pi}_{c_i}}{\partial \bar{N}_i} \doteq \frac{1}{\Delta \bar{N}_i} \Delta \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i A_i l_i \doteq \bar{\epsilon}_i l_i \quad (9)$$

## (2) 初期許容解 $\Delta \bar{N}_0^k$ の決定

式 (7), (8) の最小化問題ではすべての制約条件が等号条件式であるので, すべて active な制約条件として考慮しなければならない. 本研究で適用している解析アルゴリズムにおいては, 式 (8) の等号線形制約条件をすべて満足する  $\Delta \bar{N}^k$  の初期許容解を LP (線形計画法) の手法を用いて次のように決定している.

すなわち, まず式 (7), (8) の近似二次計画問題において, 目的関数をさらに  $\Delta \bar{N}^k$  に関する一次の項のみで近似し, 次のような等号制約条件のみを有する LP 問題を導入する.

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \Delta \bar{N}^k, \text{ which} \\ \text{min.} \quad & \nabla \bar{\Pi}_c^T \Delta \bar{N}^k \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad h_j(\Delta \bar{N}^k) = g_j(\bar{N}^k) + C_j \Delta \bar{N}^k = 0 \quad (11)$$

( $j=1, \dots, m$ )

この LP 問題に対して  $\Delta \bar{N}_i^k$  を次のように定義する.

$$\Delta \bar{N}_i^k = \Delta \bar{N}_i^{k'} - \Delta \bar{N}_i^{k''} \quad (12)$$

$$\Delta \bar{N}_i^{k'} \geq 0, \Delta \bar{N}_i^{k''} \geq 0 \quad (13)$$

各等号制約条件に対して実変数  $\Delta \bar{N}_i^{k'}$  および  $\Delta \bar{N}_i^{k''}$  のみを有するシンプレックス表を作成し, 違反度の大きな制約条件から順次制約条件を満足させるとともに目的関数を最大に減少あるいは最小に増加させるような  $\Delta \bar{N}_i^{k'}$  あるいは  $\Delta \bar{N}_i^{k''}$  を選択してピボット操作を繰り返すことにより, すべての等号制約条件を満足する初期許容解  $\Delta \bar{N}_0^k$  を決定することができる.

## (3) 改良のための変化量 $\Delta \bar{N}_0^k$ の決定

(2) で求めた初期許容解  $\Delta \bar{N}_0^k$  より出発して, 式 (8) の等号制約条件面に沿っての  $\Delta \bar{N}^k$  の改良方向  $d^k$  は,  $\Delta \bar{N}_0^k$  における  $Q_c$  の最急減少勾配  $-\nabla Q_c(\Delta \bar{N}_0^k)$  を次式によりすべての等号制約条件面上に射影することにより決定される.

$$d^k = -Pr \cdot \nabla Q_c^T(\Delta \bar{N}_0^k) \quad (14)$$

ここに,

$$Pr = I - C^T(C \cdot C^T)^{-1}C \quad (15)$$

$I$ : 単位行列 ( $n \times n$ )

また, 改良方向  $d^k$  に沿っての  $\Delta \bar{N}$  の改良幅  $a^k$  は, 二次近似された目的関数  $Q_c$  の最小点までのステップ幅として次式で与えられる.

$$a^k = -\frac{\nabla Q_c^T(\Delta \bar{N}_0^k)d^k}{d^{kT}H_c^k d^k} \quad (16)$$

したがって,  $k$  th stage における  $\bar{N}$  の変化量  $\Delta \bar{N}^k$  は,  $\Delta \bar{N}_0^k$  と  $a^k d^k$  を加え合わせるにより次式で与えられる.

$$\Delta \bar{N}^k = \Delta \bar{N}_0^k + a^k d^k \quad (17)$$

## (4) 近似二次計画問題の修正

(3) で求めた  $\Delta \bar{N}^k$  を用いて,  $\bar{N}$  を次式により改良する.

$$\bar{N}^{k+1} = \bar{N}^k + \Delta \bar{N}^k \quad (18)$$

上記の  $\bar{N}^{k+1}$  を用いて  $g_j(\bar{N})$ ,  $\nabla \bar{\Pi}_c$  をそれぞれ修正し, 式 (7) および式 (8) により  $\bar{N}^{k+1}$  に対する新たな近似二次計画問題を作成する. この場合, 式 (7) の二次の正定値行列  $H_c$  は, 式 (5), (6) の最小化問題のラグランジュ関数

$$L(\bar{N}^k, \lambda^k) = \Pi_c(\bar{N}^k) + \lambda^{kT} g(\bar{N}^k) \quad (19)$$

$$\text{ここに, } \lambda^k = -\nabla Q_c^T(\Delta \bar{N}^k) C^T (C \cdot C^T)^{-1}$$

の  $\bar{N}$  に関する二次の偏微分係数行列の近似行列として, 次の BFGS 公式を用いて修正する.

$$H_c^{k+1} = H_c^k - \frac{H_c^k \Delta \bar{N}^k \Delta \bar{N}^{kT} H_c^k}{\Delta \bar{N}^{kT} H_c^k \Delta \bar{N}^k} + \frac{\eta \eta^T}{\Delta \bar{N}^{kT} \eta} \quad (20)$$

ここに,  $\Delta \bar{N}^k = \bar{N}^{k+1} - \bar{N}^k$

表-1 21部材トラスの本論文の解析法および変位法による解析結果の比較

荷重 (tf)	解析法	CPU TIME <sup>2)</sup> (秒) <sup>3)</sup> (分割回数)	部材 1	部材 5	部材 7	部材 19
			応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )			
			ひずみ (%)			
荷重① P1=200	本論文の方法	2.9	875.3 0.0438	-874.7 -0.0437	1237.0 0.0619	-1752.7 -0.0876
	変位法	1.5 (1)	875.5 0.0438	-874.5 -0.0437	1237.0 0.0619	-1752.5 -0.0876
相対誤差 <sup>4)</sup> (%)			0.0228 0.0000	0.0229 0.0000	0.0000 0.0000	0.0114 0.0000
荷重② P1=200 P2=50	本論文の方法	5.5	872.7 0.0436	-877.3 -0.0439	1240.7 0.5158	-1549.4 -1.3145
	変位法	9.0 (6)	872.9 0.0436	-877.1 -0.0439	1240.3 0.5154	-1549.6 -1.3145
相対誤差 <sup>4)</sup> (%)			0.0229 0.0000	0.0228 0.0000	0.0323 0.0774	0.0129 0.0000
荷重①+② <sup>1)</sup> P1=200+200 P2=50+50	本論文の方法	8.4	1748.0 0.0874	-1752.0 -0.0876	2477.7 0.5777	-3302.1 -1.4021
	変位法	10.5 (7)	1748.4 0.0874	-1751.6 -0.0876	2477.3 0.5773	-3302.1 -1.4021
相対誤差 <sup>4)</sup> (%)			0.0229 0.0000	0.0228 0.0000	0.0161 0.0693	0.0000 0.0000

- 1) 本論文の方法により、各増分荷重による応力度およびひずみに計算し合計した結果
- 2) CPU TIME は MX-2000 による計算時間を表わす。
- 3) ()内の数字は、変位法の解析において、各部材の弾性係数が変化することに剛性マトリックスを変化させた回数、すなわち、荷重を分割した回数
- 4) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値

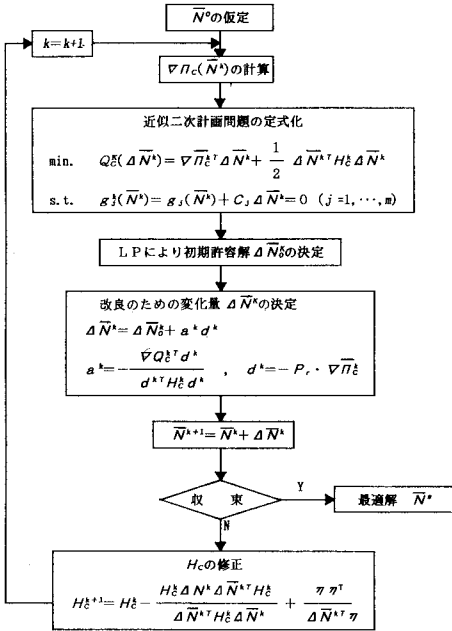


図-6 全コンプリメンタリーエネルギー最小化による  $\bar{N}$  の解析アルゴリズムの概略的な流れ図

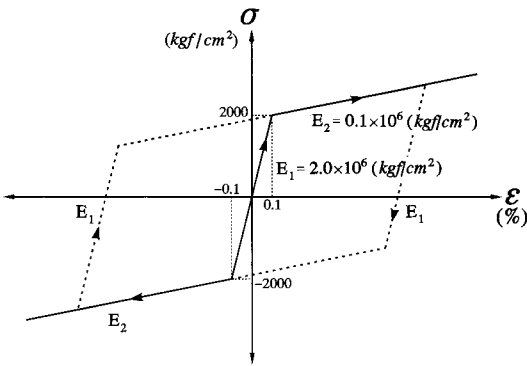


図-7 材料の応力度-ひずみ履歴挙動

$$\eta = \nabla_{\bar{N}} L(\bar{N}^{k+1}, \lambda^k) - \nabla_{\bar{N}} L(\bar{N}^k, \lambda^k)$$

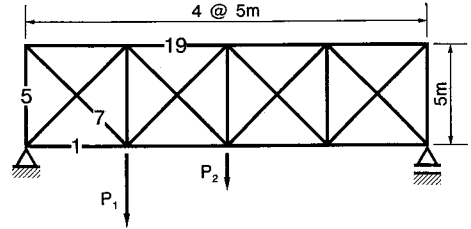
ただし、 $\nabla_{\bar{N}}$  は  $\bar{N}$  に関する一次の偏微分係数を表す。

このようにして  $\bar{N}$  の改良に伴い近似二次計画問題を逐次修正し、 $\bar{H}_c$  および  $\bar{N}$  が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより変動荷重  $\bar{P}$  による真の部材力  $\bar{N}^*$  を決定することができる。

上記の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題の解析アルゴリズムの概略的な流れ図を図-6 に示す。

## 5. 解析例および変位法による解析結果との比較

本論文で提案した解析法の妥当性および有効性を検討するため、本節では文献1), 7) など多くの文献を参照



全ての部材の断面積  $A=100 \text{ cm}^2$

図-8 21部材トラス

し、図-7 に示す応力度-ひずみの履歴挙動を示す非線形材料モデルを仮定し、この材料よりなるトラスが風荷重、雪荷重、車輪荷重、クレーン荷重などのように、載荷する荷重が時間とともに変化する場合について解析を行うとともに、変位法による解との比較検討を行い、本論文で提案している解析法の有効性を明らかにするものである。

### (1) 増分荷重を受ける21部材トラスの解析例

図-8 に示す21部材トラスが、まず荷重① ( $P_1=200 \text{ tf}$ ,  $P_2=50 \text{ tf}$ ) を受けた場合の本論文の方法および変位法により得られた部材1, 5, 7, 19 に生ずる応力度およびひずみ、計算に要した時間、変位法による解析において各部材の弾性係数が変化することに剛性マトリックスを変化させた回数を表-1の荷重①の欄に、さらに荷重② ( $\bar{P}_1=200 \text{ tf}$ ,  $\bar{P}_2=50 \text{ tf}$ ) の増分荷重を受けた場合の上記の値の増分を荷重②の欄に、さらに、荷重①と荷重②の応力度およびひずみの増分を合計したものを荷重①+②の欄に示す。またこれらの部材における応力度

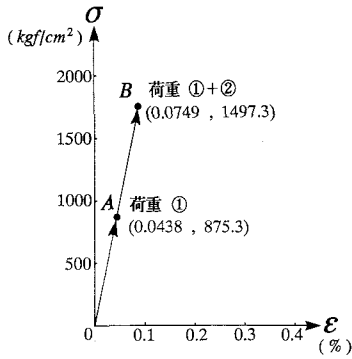


図-9 21 部材トラスの部材 1 の応力度-ひずみの履歴

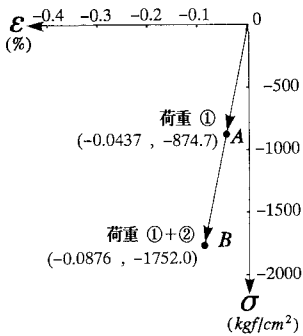


図-10 21 部材トラスの部材 5 の応力度-ひずみの履歴

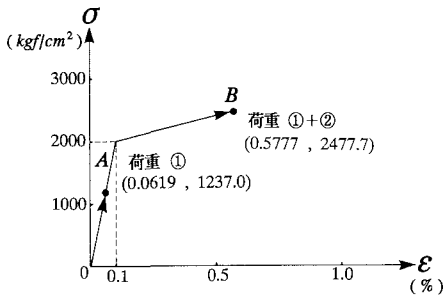


図-11 21 部材トラスの部材 7 の応力度-ひずみの履歴

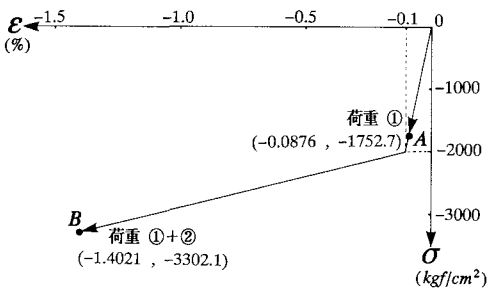


図-12 21 部材トラスの部材 19 の応力度-ひずみの履歴

表-2 本論文の解析法による荷重①+②の解析結果と荷重③による解析結果との比較

荷重 (tf)	CPU TIME <sup>3)</sup> (秒)	部材 1	部材 5	部材 7	部材 19
		応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )			
		ひずみ (%)			
荷重①+② <sup>1)</sup> P1=200+200 P2=50+50	8.4	1748.0	-1752.0	2477.7	-3302.1
0.0874		-0.0876	0.5777	-1.4021	
荷重③ <sup>2)</sup> P1=400 P2=100	5.0	1748.4	-1751.6	2477.2	-3302.2
0.0874		-0.0876	0.5772	-1.4022	
相対誤差 <sup>4)</sup> (%)		0.0229	0.0228	0.0200	0.0030
		0.0000	0.0000	0.0866	0.0071

- 1) 本論文の方法により、各増分荷重による応力度およびひずみを独立に計算し合計した結果
- 2) 増分荷重 P1 と P2 をまとめて載荷し、文献 1) の方法により計算した結果
- 3) CPU TIME は MX-2000 による計算時間を表わす。
- 4) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値

ひずみの履歴を図-9~12に示す。これらの図において、A点は荷重①による応力度およびひずみ、B点は増分荷重②による応力度およびひずみを表わしている。

表-1および図-9~12より明らかなように、部材1および5では荷重①と荷重②において生じた応力度の合計は図-7に示す非線形材料の弾性範囲内におさまっている。一方、部材7および19では荷重①により生じた応力度は弾性範囲内であるが、荷重①+②では塑性域の応力度を生じている。表-1より明らかなように、いずれの部材においても各荷重段階における本論文の方法および変位法による解析結果の相対誤差は0.000%~0.077%であり、完全に一致した値が得られている。

一方、解を得るために要した計算時間を比較すると、荷重①では全ての部材の応力度およびひずみが弾性範囲内にあり、各部材の弾性係数を変化させる必要がないため、変位法の方が本論文の方法と比較して約1/2の計算時間で解を得ている。しかし、増分荷重②により6個の部材の応力度およびひずみが弾性域を越えて塑性域に入っているため、変位法では6回の剛性マトリックスの変更が必要となり、計算時間も本論文の方法と比較して1.64倍を要している。

つぎに、表-1で示したように、本論文で提案した方法、すなわち荷重①および荷重②による応力度の計算においてそれぞれの初期の応力度およびひずみ点を原点として全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより求めた結果の合計と、増分荷重①および②を合計した荷重、すなわち荷重③ (P<sub>1</sub>=400tf, P<sub>2</sub>=100tf)を一度に載荷し、文献1)で述べた方法により求めた応力度およびひずみの値の比較および計算時間を表-2に示す。この表より明らかなように、荷重が増加していく場合には荷重を分割して解析した結果と荷重を分割せず一度に載荷して得られる結果との相対誤差は0.000%~0.087%であり、同一の結果が得られていることがわかる。

表-1および表-2で示した計算例は、先行荷重 P に

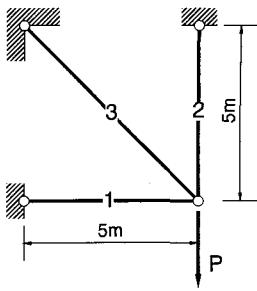


図-13 3部材トラス

全ての部材の断面積  
A=100 cm<sup>2</sup>

表-3 3部材トラスの本論文の解析法および変位法による解析結果の比較

荷重 (tf)	解析法	CPU TIME <sup>1)</sup> (秒) <sup>2)</sup> (分割回数)	部材1 部材2 部材3		
			応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )		
			ひずみ (%)		
荷重 ① P=400	本論文の方法	1.5	-1521.2	2478.8	2151.4
			-0.0761	0.5788	0.2514
	変位法	0.6	-1521.0	2479.3	2150.7
		(3)	-0.0761	0.5793	0.2507
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0131	0.0202
			0.0000	0.0863	0.2792
荷重 ② P=-400	本論文の方法	1.3	-692.8	-692.8	979.8
			-0.0346	0.4202	0.1928
	変位法	0.2	-692.6	-692.7	978.7
		(1)	-0.0346	0.4207	0.1921
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0289	0.0144
			0.0000	0.1188	0.3644
荷重 ③ P=500	本論文の方法	1.3	-1779.1	3220.9	2516.0
			-0.0890	1.3209	0.6160
	変位法	0.4	-1778.8	3221.5	2515.3
		(2)	-0.0889	1.3215	0.6153
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0169	0.0186
			0.1124	0.0454	0.1138
荷重 ④ P=-1000	本論文の方法	1.5	1779.1	-3220.9	-2516.0
			0.0890	-1.3209	-0.6160
	変位法	0.6	1779.9	-3219.9	-2516.7
		(3)	0.0890	-1.3199	-0.6167
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0449	0.0311
			0.0000	0.0758	0.1135

1) CPU TIME は MX-2000 による計算時間を表す。  
 2) ( ) 内の数字は、変位法の解析において、各部材の弾性係数が変化することによる剛性マトリックスを変化させた回数、すなわち、荷重を分割した回数  
 3) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値  
 4) 荷重の方向は下向きを正、上向きを負として表示している。

加えてさらに1個の増分荷重が加わった場合の解析例を示したものであるが、本研究では、この他、より複雑な2径間連続21部材トラスや31部材トラスについて増分荷重が1~3個の場合、また、非線形材料の応力度-ひずみ関係が図-7以外の複数の折れ線や曲線で表される場合(文献1)参照)についても計算を行い、上記と全く同様な結果を得ている。

以上の種々の解析例における結果より、増分荷重を受けるトラス構造物においては、その増分荷重に対して本論文の第2章で述べた「最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に関する仮定」が成り立つことが数値計算例の結果より明らかとなった。

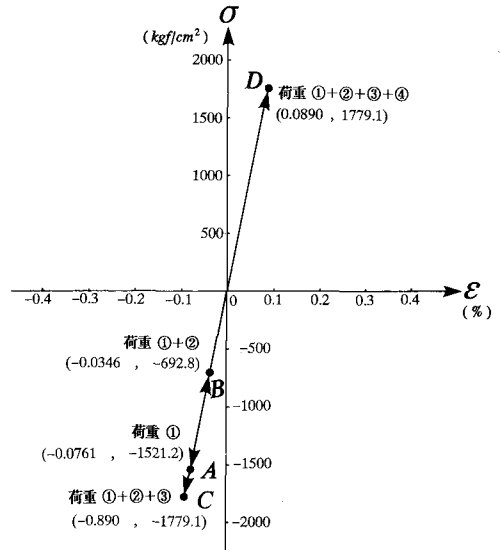


図-14 3部材トラスの部材1の応力度-ひずみの履歴

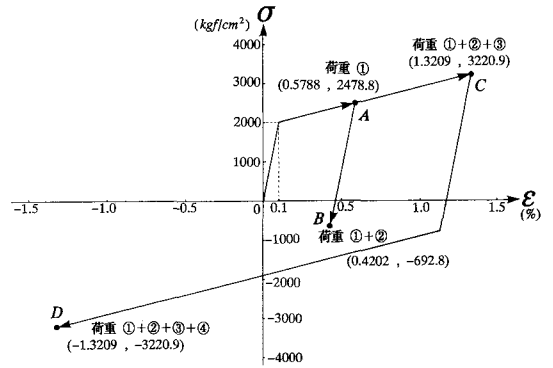
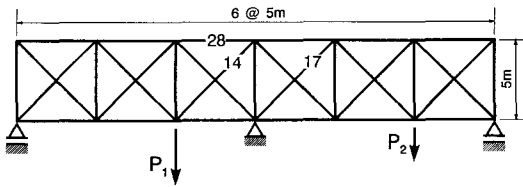


図-15 3部材トラスの部材2の応力度-ひずみの履歴

(2) 増分荷重および減少荷重の履歴をうける3部材トラスおよび2径間連続31部材トラスの解析例

つぎに、図-13に示す3部材トラスが下向きの荷重400tf(荷重①)→上向きの荷重400tf(荷重②)→下向きの荷重500tf(荷重③)→上向きの荷重1000tf(荷重④)の荷重履歴をうける場合、各荷重履歴段階における本論文で提案した解析法および変位法により得られた部材1, 2, 3の応力度, ひずみおよび相対誤差, 計算に要した時間, 変位法による解析において各部材の弾性係数が変化することによる剛性マトリックスを変化させた回数を表-3に示す。また、部材1および部材2の応力度-ひずみの履歴を図-14および15に示す。図-14, 15において、まず荷重①でA点に達し、つぎに荷重②によりB点までさがり、さらに荷重③によりB点を経由してC点に達し、荷重④により最終的にD点の応力度およびひずみとなっている。



全ての部材の断面積  $A=100\text{ cm}^2$

図-16 2径間連続31部材トラス

表-4 2径間連続31部材トラスの本論文の解析法および変位法による解析結果の比較

荷重 (tf)	解析法	CPU TIME <sup>1)</sup> (秒) (分割回数)	部材 14			部材 17			部材 28		
			応力度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )								
			ひずみ (%)								
荷重① $P_1=600$ $P_2=150$	本論文の方法	13.4	3156.6	-1287.2	-1351.2						
			1.2566	-0.0644	-0.0676						
	変位法	16.8 (7)	3156.6	-1288.9	-1351.6						
			1.2566	-0.0644	-0.0676						
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0000	0.1321	0.0296					
				0.0000	0.0000	0.0000					
荷重② $P_1=-600$ $P_2=-150$	本論文の方法	5.7	-62.0	-154.0	-591.9						
			1.0957	-0.0077	-0.0296						
	変位法	2.4 (1)	-62.4	-155.7	-592.3						
			1.0956	-0.0077	-0.0296						
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.6452	1.1039	0.0676					
				0.0091	0.0000	0.0000					
荷重③ $P_1=-600$ $P_2=-150$	本論文の方法	13.4	-3158.1	1287.1	1352.3						
			-1.2581	0.0644	0.0676						
	変位法	16.8 (7)	-3156.3	1288.4	1350.7						
			-1.2564	0.0645	0.0676						
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0570	0.1010	0.1183					
				0.1353	0.0155	0.0000					
荷重④ $P_1=1400$ $P_2=350$	本論文の方法	13.4	4273.3	-2150.7	-1762.0						
			2.3733	-0.2506	-0.0866						
	変位法	21.6 (9)	4271.6	-2148.9	-1733.2						
			2.3716	-0.2489	-0.0866						
	相対誤差 <sup>3)</sup> (%)			0.0398	0.0837	0.0693					
				0.0717	0.6830	0.0000					

- 1) CPU TIME は MX-2000 による計算時間を表わす。
- 2) ( )内の数字は、変位法の解析において、各部材の弾性係数が変化することにより剛性マトリックスを変化させた回数、すなわち、荷重を分割した回数
- 3) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値
- 4) 荷重の方向は下向きを正、上向きを負として表示している。

表-3より明らかなように、各荷重履歴段階において本論文の方法および変位法により求めた各部材の応力度およびひずみの相対誤差は0.00%~0.36%であり、両解析法により完全に一致した値が得られている。

また、図-16に示す2径間連続31部材トラスが下向きの荷重①( $P_1=600\text{ tf}$ ,  $P_2=150\text{ tf}$ )→上向きの荷重②( $P_1=600\text{ tf}$ ,  $P_2=150\text{ tf}$ )→上向きの荷重③( $P_1=600\text{ tf}$ ,  $P_2=150\text{ tf}$ )→下向きの荷重④( $P_1=1400\text{ tf}$ ,  $P_2=350\text{ tf}$ )の荷重履歴をうける場合の各荷重履歴段階における本論文で提案した解析法および変位法により得られた部材14, 17, 28の応力度, ひずみおよび相対誤差, 計算に要した時間, 変位法による解析において各部材の弾性係数が変化することにより剛性マトリックスを変化させた回数を表-4に示す。また、部材14, 17, 28の応力度-ひずみ履歴をそれぞれ図-17, 18, 19に示す。図-17~図

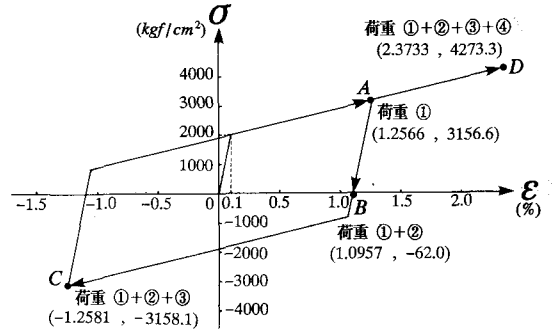


図-17 2径間連続31部材トラスの部材14の応力度-ひずみの履歴

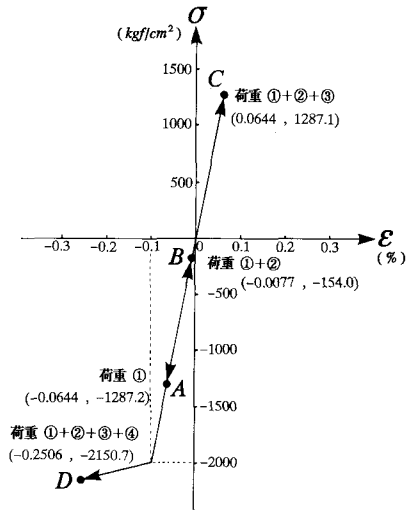


図-18 2径間連続31部材トラスの部材17の応力度-ひずみの履歴

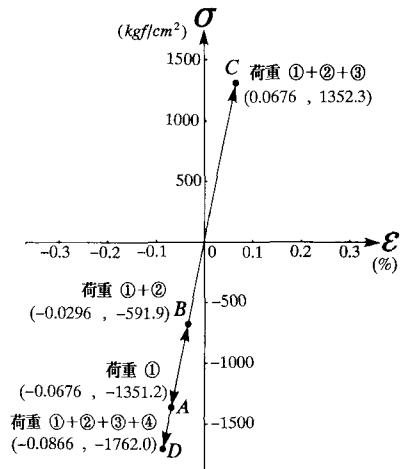


図-19 2径間連続31部材トラスの部材28の応力度-ひずみの履歴



—19において、まず荷重①でA点に達し、つぎに荷重②によりB点までさがり、さらに荷重③によりC点に達し、荷重④により最終的にD点の応力度とひずみとなっている。

部材の応力度あるいはひずみが比較的大きな範囲での両解法による計算結果の相対誤差は0.00%～0.68%であるが、応力度およびひずみ量が極めて小さな場合には、例えば部材17の応力度の相対誤差が1.1%程度と多少大きくなっている。しかし応力度あるいはひずみの相対的な違いの大きさはすべての部材においてほとんど同じ程度の大きさとなっている。

3部材トラスにおいては、部材数が少ないため部材に作用する応力度およびひずみが弾性域を超えた場合でも変位法の方が本論文の方法と比較して1/2以下の計算時間で解を得ている。また先に述べた21部材トラスの場合と同様に、2径間連続31部材トラスの場合においても、全ての部材の弾性係数を変化させずに解析し得る表—4の荷重②の場合には変位法の方が本論文の方法と比較して少ない計算時間で解を得ている。しかし、表—4の荷重①③④のように変位法において各部材の弾性係数を変化させなければならない回数が増加するに従い、本論文の方法の方が変位法と比較して4/5～3/5の計算時間で、かつ作用荷重を分割したり、部材剛性マトリックスを修正する必要もなく極めて単純かつ統一的、効率的に解を決定している。

以上の計算結果より、増分荷重および減少荷重を受けるトラス構造物の履歴挙動の解析においても本論文の第2章で述べた「最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に関する仮定」が成り立つことが明らかとなるとともに、本論文で提案した方法により変動荷重を受けるトラス構造物の弾塑性履歴挙動を単純、正確かつ能率的に行えることが明らかとなった。

## 6. 結 論

本論文において変動荷重を受けるトラス構造物の弾塑性履歴挙動をエネルギー原理に基づき解く方法を提案するとともに、変位法による解との比較検討を行った結果について述べた。本研究で得られた結論は次のとおりである。

- ① 変動荷重を受けるトラス構造物の解析問題において、各部材の材料の応力度-ひずみ曲線の原点を、先行荷重により生じている応力度およびひずみの点に設定することにより、新たに加わる変動荷重による解析問題に対して、先行荷重の履歴に関係なく最小コンプリメンタリーエネルギーの原理を適用することができる。
- ② 増分荷重あるいは減少荷重などの変動荷重 $\bar{P}$ によって生ずるトラス構造物の各部材の軸力の変動量 $\bar{N}$

は、各部材の材料の応力度-ひずみ曲線上で先行荷重によりすでに生じている応力度およびひずみを原点とし、増分荷重に対しては図—2、減少荷重に対しては図—3に示す $\bar{\beta}_i$ をコンプリメンタリーエネルギー密度として計算した構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを、 $\bar{P}$ および $\bar{N}$ のみを考慮した各可動節点における釣合条件式のもとで最小化することにより、きわめて正確かつ能率的に求められる。

③ 各増分荷重あるいは減少荷重により構造物の各部材に生ずる応力度が、その増分荷重あるいは減少荷重に適用される材料の応力度-ひずみ関係の勾配、すなわち弾性係数が変化しない範囲では変位法のほうがより能率的に解を得ることができるが、各部材に生ずる応力度が弾性係数の変化点を越える場合には、本論文で提案している解析法では、変位法における各部材の剛性マトリックスの変更などを必要とせず同一のアルゴリズムで単純かつ能率的に解くことができる。この計算上の効率性、すなわち解析の能率性は、増分荷重あるいは減少荷重により弾性係数が変化する部材の数が多くなるに従い、変位法と比較して向上する。

なお、本論文の計算例では変動荷重を受ける部材の材料の応力度-ひずみ履歴挙動を図—7のごとく単純な形に仮定したが、実際の材料の応力度-ひずみの履歴挙動は、鋼材などにみられるようなひずみ硬化などの影響によりより複雑なものとなるが、このような複雑な応力度-ひずみの履歴挙動をする材料を使用した構造物においては、本研究で提案した方法により、変位法と比較して極めて単純かつ能率的に弾塑性履歴挙動の解析を行うことができる。ただし、1.まえがきでも述べたごとく、本研究では、トラスの弾塑性履歴挙動の解析にあたってトラス部材の二次曲げの影響や、降伏ひずみを越える大きなひずみ領域における部材の座屈現象、幾何学的非線形性の影響などを考慮していない。したがって、実際のトラス構造物の弾塑性履歴挙動を解析する場合にはこれらの影響をも考慮して解析を行う必要がある。

謝 辞：最後に、本研究における計算は、愛媛大学構造工学研究室に設置されているMELCOM 70 MX-2000を使用し、計算結果の整理および図面の作成には、現在、株式会社 長大に勤務されている田中賢太氏および愛媛大学大学院工学研究科に在学中の青野将也君のご助力を得た。ここに記して謝意を表するものである。

## 参考文献

- 1) たとえば、  
鷺津、宮本、山田、山本、川井 共編：有限要素法ハンドブックⅡ応用編、6.材料非線形問題の解析、培風館、1983。  
山田嘉昭：塑性・粘弾性(有限要素法の基礎と応用シリーズ6)、培風館、1980。

- 太田俊昭：構造物の非弾性解析，新体系土木工学 8 土木学会編，技報堂，1980.
- 2) 大久保禎二，和多田康男：エネルギー原理および SQP によるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究，土木学会論文集，第 374 号 / I -6, pp. 427-436, 1986. 10.
- 3) Ohkubo, S., Watada, Y. and Fujiwaki, T. : Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, *Computers & Structures*, Pergamon Journals Ltd, Vol.27, No.1, pp.129-145, 1987.
- 4) 大久保禎二，藤脇敏夫：コンプレメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法，土木学会論文集，第 398 号 / I -10, pp.227-236, 1988. 10.
- 5) Ohkubo, S. and Makino, K. : Material Nonlinear Analysis of Rigid Plane Frames by Total Complementary Energy Minimization, *Proc. of JSCE*, No.416/ I -13, pp.37~48, 1990.4.
- 6) たとえば，Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity And Plasticity*, Third Edition, Pergamon Press, 1982.
- 7) 皆川勝：構造用鋼材の弾塑性履歴挙動のモデル化とそれの構造部材への応用，学位論文，1988. (1994. 7. 19 受付)

## ELASTIC-PLASTIC HYSTERESIS ANALYSIS OF TRUSS STRUCTURES SUBJECT TO FLUCTUATING LOADS BASED ON ENERGY PRINCIPLE

Sadaji OHKUBO, Yasuo WATADA and Kazutaka NISHIMURA

This paper proposes a new, unified and efficient method for elastic-plastic hysteresis analysis of truss structures subject to fluctuating loads which is developed on the basis of the principle of minimum complementary energy. For the calculation of complementary energy of each member element due to incremental or decremental loads the origin of stress-strain relationship of nonlinear material in each member element is assumed to coincide with the pre-stressed and pre-strained point resulted by the preceding fluctuating loads. Then member stresses and strains due to incremental or decremental loads are determined by minimizing the total complementary energy of the structure subject to equilibrium conditions at the free nodes. The proposed method is applied to many statically indeterminate trusses with bilinear stress-strain relation material and the reliability, simplicity, efficiency and toughness are compared with those obtained by the finite element method. These results prove that the assumption for the proposed analysis method is correct and the method is very powerful and efficient for solving the elastic-plastic hysteresis analysis problems of truss structures subject to fluctuating loads.