

投稿論文 (和文ノート)
**TECHNICAL
NOTE**

ノルム最小化法に基づく 非弾性ひずみの逆解析

桜井春輔¹・芥川真一²・徳留修³

¹正会員 工博 Ph.D 神戸大学教授 工学部建設学科 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

²正会員 Ph.D 神戸大学助手 工学部建設学科 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

³正会員 工修 東急建設(株)東京支店土木施工部 (〒150 東京都渋谷区渋谷3-11-11)

塑性挙動を示す地山や未固結地山の土被りの浅いトンネル等においては、地山特有の非線形な変形挙動が現れるため、その逆解析においても地山の非線形特性を考慮しなければならない。そこで本ノートでは、ノルム最小化法に基づき、初期応力、弾性係数および非弾性ひずみをそれよりも少ない数の計測変位から同時に逆解析する方法を開発した。そして、数値実験により解の安定性を検討し、さらにこの方法を実トンネルの挙動評価に用い、十分実用に供し得ることを示した。なお、この方法はポアソン比を仮定するがその他の地山に関する何らの情報も必要としない利点を有している。

Key Words : *minimum norm solution, back analysis, non-elastic strain, Monte-Carlo Simulation*

1. はじめに

トンネルにおける現場計測結果を評価する際、地山を線形弾性体と仮定する逆解析手法においては、求める未知パラメータが少ないため、計測される変位から最小二乗法などの手法により安定解を求め得ることが知られている¹⁾。しかし、塑性挙動を示す地山や未固結地山の土被りの浅いトンネル等においては、地山特有の非線形な変形挙動が現れることが多く、したがってこれらの問題に対して弾性論に基づく逆解析を適用することには限界がある。そこで著者らは先に、地山に生じる非弾性ひずみを未知パラメータとして、従来の最小二乗法に基づく逆解析手法を提案した²⁾。しかしこの方法では、計測変位の数が未知パラメータの数より十分に多くなければならぬため、現場への適用には困難があった。

ところで、未知パラメータが観測方程式数よりも多い場合や観測方程式が独立でない場合のように、未知パラメータが唯一的に求まらないケースでは、一意的に解を求めるために未知パラメータのノルムを最小にするという条件を導入することが試みられている³⁾。Gao, Mura⁴⁾は、このノルム最小化法を用いて、荷重が既知の条件下において非弾性ひずみの逆解析を行っている。ところが、トンネルの挙動を評価する場合は、地山の初期応力や弾性係数が不明であるため、逆解析においても、非弾性ひずみ

だけでなく弾性係数や初期応力も求めることが要求される。

そこで本ノートにおいては、ノルム最小化法に基づき、初期応力パラメータを取り入れた定式化を開発し、非弾性ひずみ、弾性係数および初期応力を同時に求めることを可能にした。そして、数値実験によりその解の安定性を検討し、さらにこの方法を用いて実トンネルの挙動を評価し、その適用性を確認した。

2. 定式化

(1) 観測方程式

掘削によって地盤内に生じるひずみ増分 $\Delta\varepsilon$ は、一般に弾性成分 $\Delta\varepsilon_e$ と非弾性成分 $\Delta\varepsilon_p$ の和として表される。すなわち、

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p \quad (1)$$

このとき $\Delta\varepsilon_p$ は塑性、不連続性挙動、ゆるみなど地盤内で生じる一般的な非弾性ひずみを示すものとする。今、Hookeの法則によってひずみ増分 $\Delta\varepsilon_e$ に対応する応力増分 $\Delta\sigma$ は、次式で与えられる。

$$\Delta\sigma = D_e(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_p) \quad (2)$$

ここで、 D_e は等方弾性体に対する応力-ひずみマトリクスである。式(2)を仮想仕事の式³⁾に代入し、非弾性ひずみに関与する物体力項を荷重項に移行し、両辺を弾性係数 E で除せば以下の式が得られる⁹⁾。

$$\int_V B^T D_e^* \Delta \epsilon dV = \int_{V_e} B^T \sigma_0^* dV + \int_{V_p} B^T D_e^* \Delta \epsilon_p dV \quad (3)$$

ここで、

V : 解析領域

V_e : 掘削領域

V_p : 塑性領域

B : 変位-ひずみマトリクス

D_e^* : D_e/E

σ_0^* : 初期応力パラメータ $\{\sigma_{0x}/E, \sigma_{0y}/E, \tau_{0xy}/E\}^T$

式(3)は、非弾性挙動を材料の構成式に取り込むのではなく、付加外力項として取り扱うことにより、非線形問題が線形化されることを示している。式(3)を有限要素離散化し V_p 内の各要素のガウスポイントごとに独立な非弾性ひずみを考えると以下の式が成立する。

$$[K_e^*] \{\Delta u\} = \{R_1^* \} \{R_2^* \} \dots \{R_n^* \} \{x\} \quad (4)$$

ここで、 $\{\Delta u\}$ は節点変位の増分を表し、 $[K_e^*]$ は正規化された弾性剛性マトリクスである。 $\{x\}$ は未知パラメータのベクトルであり、非弾性領域内のガウスポイントの総数を N としたとき、その内容は、

$$\{x\} = \{\sigma_{0x}/E, \sigma_{0y}/E, \tau_{0xy}/E, \Delta \epsilon_{p,x}^1, \Delta \epsilon_{p,y}^1, \Delta \gamma_{p,xy}^1, \dots, \Delta \epsilon_{p,x}^N, \Delta \epsilon_{p,y}^N, \Delta \gamma_{p,xy}^N\}^T \quad (5)$$

で与えられ、その数は $n=3(1+N)$ 個となる。 $\{R_i^*\}$ は i 番目の未知パラメータが1の時の荷重ベクトルを示す。式(4)により変位増分 $\{\Delta u\}$ は未知パラメータ $\{x\}$ の線形関数として与えられることから、計測点における変位ベクトルを $\{\Delta \bar{u}\}$ とすれば、 $\{\Delta \bar{u}\}$ は $\{x\}$ の一次関数として以下のように表すことができる。

$$\{\Delta \bar{u}\} = [A] \{x\} = \{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_n\} \{x\} \quad (6)$$

ここで、 $\{A_i\}$ は $x_i = 1$ によって生ずる計測点における変位ベクトルである。

(2) ノルム最小化法による未知パラメータの決定
通常のトンネルにおける情報化施工において、一

般的に得られる変位計測の数は高々十数個である。これに対し、地山に発生しうる非弾性ひずみを、有限要素の各ガウスポイントにおいて独立に扱う場合、未知パラメータの数は計測データ数よりもはるかに多くなる。このような場合、式(6)を満足する解の組み合わせは無数に存在するため、何らかの制約条件を課さない限り、その唯一解を安定して求めることはできない。制約条件としては、(a)初期応力を既知とする、(b)非弾性ひずみに何らかの拘束を与える、(c)降伏関数を既知とする等、種々のケースが考えられる。しかしながら、ここではそれらの制約条件はいっさい存在しない最も一般的な状況を想定し、式(6)を満足する解のうち、未知パラメータの重み付きノルム二乗和^{3),4)}を最小にするものを解として採用する。

まず m 個(計測変位の数)のラグランジュ未定乗数からなるベクトル $\{\lambda\}$ を用いて次のような評価関数 Π を定める。

$$\Pi = \frac{1}{2} \{x\}^T [W] \{x\} + \{\lambda\}^T ([A] \{x\} - \{\Delta \bar{u}\}) \quad (7)$$

ここで、 $[W]$ は対角項だけからなる重みマトリクスであり、その対角項 W_{ii} は未知パラメータ x_i が定義されている領域の体積を表す。即ち、 $1 \leq i \leq 3$ に対しては掘削領域の体積を示し、 $i \geq 4$ に対しては x_i が定義されているガウスポイントにおける要素の部分体積を表す。ここで重みマトリクス $[W]$ を導入するのは、各々の未知変数が定義されている領域の体積に基づいた重みを考慮することにより、同一レベルの非弾性ひずみが生じた場合にそれが全体の变形挙動に及ぼす影響の度合いを適切に評価・反映するためである。さて、評価関数の停留条件より次式を得る。

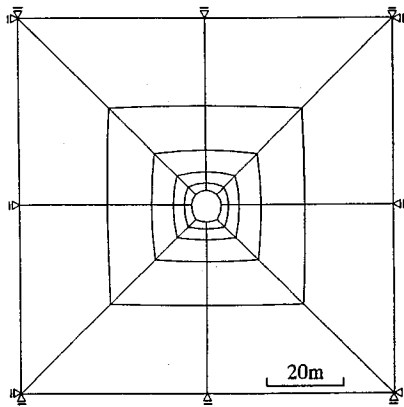
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{x\}^T} = [W] \{x\} + [A]^T \{\lambda\} = \{0\} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\lambda\}^T} = [A] \{x\} - \{\Delta \bar{u}\} = \{0\} \quad (9)$$

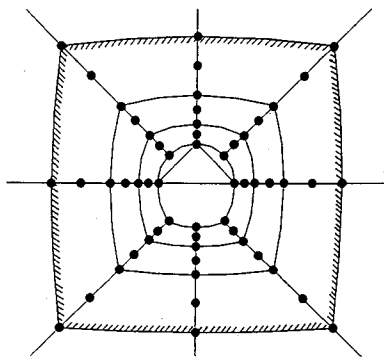
この場合、式(8)、(9)を連立させることにより未知パラメータ $\{x\}$ は計測変位ベクトル $\{\Delta \bar{u}^M\}$ を用いて次のように一意に求められる。

$$\{x\} = [W]^{-1} [A]^T ([A] [W]^{-1} [A]^T)^{-1} \{\Delta \bar{u}^M\} \quad (10)$$

さらに、初期応力の鉛直成分が土被り圧(γH)に等しいと置くことにより、弾性係数が次のように求



(a) Finite element mesh



(b) Potential non-elastic zone and measurement points

Fig.1 Configuration of a numerical example

Table 1 Input parameters used for a forward analysis

Parameters	Values
Yield criterion	Mohr-Coulomb
Young's modulus	10000 MPa
Poisson's ratio	0.3
Cohesion	1.0 MPa
Friction angle	30 deg.
Hardening parameter	0.0

められる。

$$E = \frac{\gamma H}{x_2} \quad (11)$$

ここで、 $x_2 = \sigma_{oy} / E$ である。このとき求められる未知パラメータ $\{x_i\}$ は付帯条件(式(9))を完全に満足しているため、本逆解析法では、計測変位と計算変位は測定された場所においては常に一致することになる。また、ノルム二乗和を最小とする解は、「特別な制約がなければ、真のものに近い」³⁾ことが知られている。

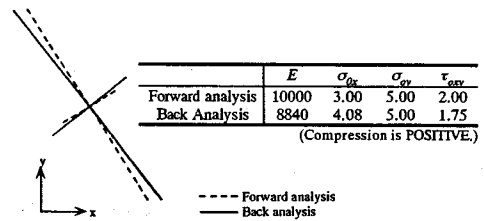
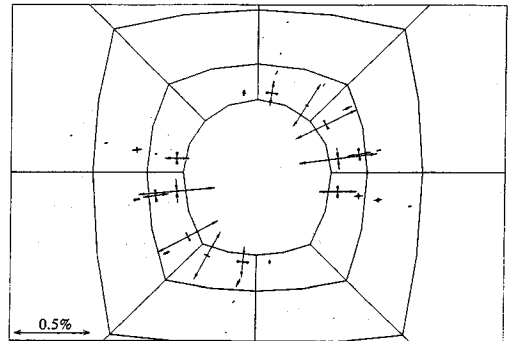
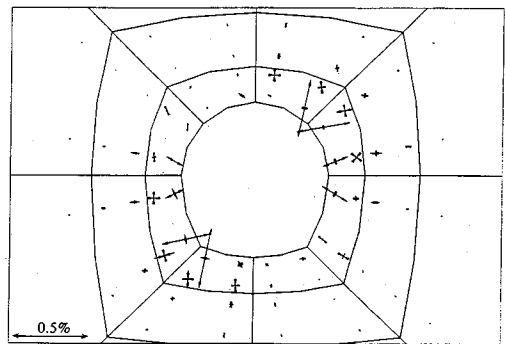


Fig.2 Initial stresses and Young's modulus obtained by back analysis



(a) Forward analysis



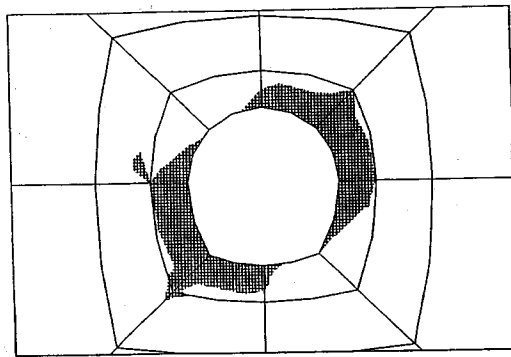
(b) Back analysis

Fig.3 Non-elastic strains

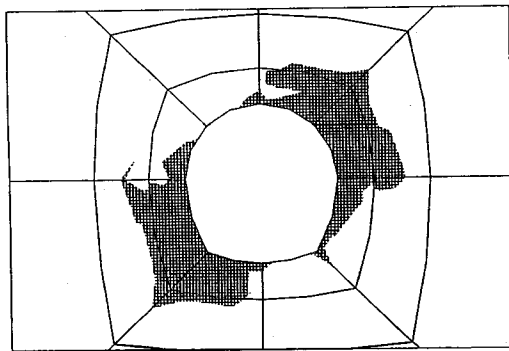
3. 数値実験

(1) 解析モデルとインプットデータ

二次元平面ひずみ問題としてトンネルの掘削問題を考える。逆解析に必要な計測データを弾塑性順解析によって作成する際に用いた諸定数をTable 1に示す。また、解析に用いた有限要素メッシュ、変位計測の位置および非弾性ひずみの発生が予想される領域(斜線で囲まれた範囲)をFig.1に示す。この領域は、大きさや形状が不明である実際の非弾性領域を含むように十分大きくしておく必要がある。この問題においては、未知パラメータとしての非弾性

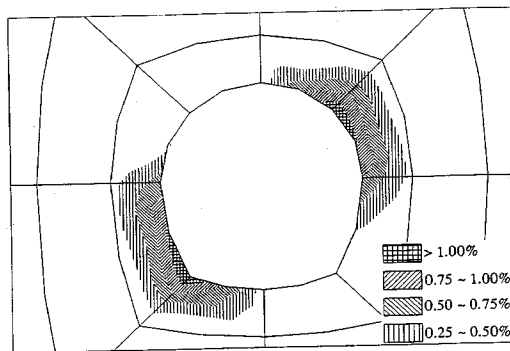


(a) Forward analysis

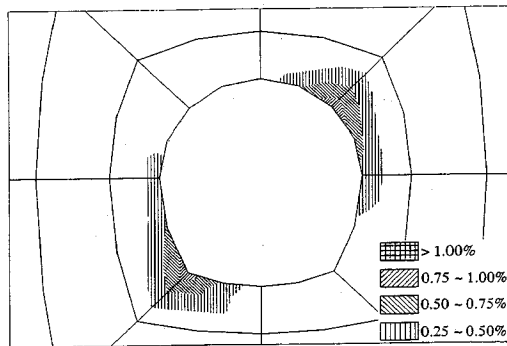


(b) Back analysis

Fig. 4 Non-elastic zones



(a) Forward analysis



(b) Back analysis

Fig. 5 Maximum shear strains

ひずみの数は288 (3成分×4ガウスポイント×24要素)となり、初期応力パラメータの3成分を加えると、未知パラメータの合計は291となる。これを8本の地中変位計とコンバージェンス測定から得られる合計51個の相対変位から求めることとする。なお、ポアソン比は0.3と仮定する。

(2) 逆解析の結果と考察

まず逆解析によって得られた初期応力および弾性係数を正解値(順解析結果)と比較してFig. 2に、また非弾性ひずみの結果をFig. 3に示す。逆解析された非弾性ひずみはトンネルの右上部および左下部に集中しておりこれは正解値と合致している。

Fig. 4に塑性領域(ここでは有効塑性ひずみ

$\sqrt{(2/3)\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p}$ が0.5%を越える領域)の比較を、またFig. 5に最大せん断ひずみ(γ_{max})分布の比較を示す。非弾性ひずみおよび塑性領域の場合と同様に、逆解析によって得られる γ_{max} 分布は十分な精度で実際の挙動を把握しうるものと言える。これは、 γ_{max} の値を用いてトンネルの安定性の評価を行う場合、計測変位から本方法によって得られる γ_{max} の分布図を有効な判断材料として利用できることを示している。

(3) ポアソン比の影響

次に、本逆解析手法におけるポアソン比(ν)の影響を調べるため、上記と同様の設定で ν を0.0, 0.1, 0.2, 0.4と変化させて逆解析を行った。結果の一部をTable 2に示す。弾性係数および初期応力にはある程度の変動が現われているものの、非弾性ひずみ、および最大せん断ひずみの分布においてはほとんど影響がないことが確かめられた。よって、地山の安定性をひずみの管理基準値⁷⁾によって評価する立場をとる場合、本逆解析手法におけるポアソン比の影響は希少であると考えられる。

(4) 解の安定性と精度

さらに、本方法で得られる解の安定性と精度を評価するためにモンテカルロ法によるシミュレーションを行った。まず平均値0、標準偏差0.5mm(これは最大変位量の約6%に相当する)で正規分布する計測誤差を乱数発生させ、これを真の計測値に加えて誤差を含む計測データを100セット作成した。これを用いて逆解析を行った結果から求めた弾性係数および初期応力の平均値と標準偏差をTable 3に示す。この結果から、本方法によって求められる弾性係数および初期応力の値は精度も良く、ばらつき

Table 2 Influence of Poisson's ratio (Unit:MPa)

Poisson's ratio ν	Results of back analysis			
	E	σ_{0x}	σ_{0y}	τ_{0xy}
0.0	9397	4.64	5.00	0.82
0.1	9072	4.44	5.00	1.03
0.2	8885	4.25	5.00	1.33
0.4	9025	4.00	5.00	2.38

Table 3 Results of Monte-Carlo simulation (Unit:MPa)

	Values used for forward analysis	Results of Monte-Carlo simulation	
		Mean	Standard deviation
E	10000	8950	613
σ_{0x}	3.00	4.09	0.60
σ_{0y}	5.00	5.61	0.35
τ_{0xy}	2.00	1.77	0.25

度合も計測誤差の程度を考慮すれば妥当なものであることが確かめられた。非弾性ひずみについては、Fig.3からも読み取れるように、正解値を厳密に求めることはできないが、その値は弾性係数、初期応力と同様、安定していることが確かめられた。

4. 実トンネル評価への適用例

現場における計測結果を用いた逆解析の例として、未固結地山の土被りの浅いトンネルへの適用例を示す。この例ではFig.6に示すように設定した領域内の非弾性ひずみ672個（3成分×4ガウスポイント×56要素）に初期応力パラメータ3個を加えた675個の未知パラメータを合計41個の計測変位（地中変位計データ16個、傾斜計データ14個、地表面沈下データ11個）から求めるものとした。Fig.7に、逆解析によって同定された最大せん断ひずみの分布を示す。ここに見られるような分布形状は、未固結地山の土被りの浅いトンネル特有の非線形な変形挙動⁸⁾を示していると考えられる。これは従来の弾性逆解析では得られないものである。このように提案する逆解析法を用いれば、かなり広い範囲を潜在的非弾性領域として設定することにより、非線形挙動の顕著な箇所が容易に同定できることがわかる。なお、本例では支保工のモデル化は特に行っていないが、その影響は逆解析によって求められる地山の弾性係数の増加として考えるのが良いことが分かっている⁹⁾。

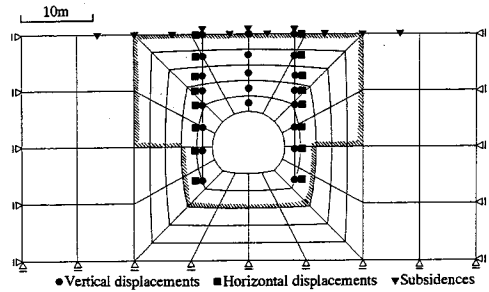


Fig. 6 Finite element mesh and location of displacement measurements

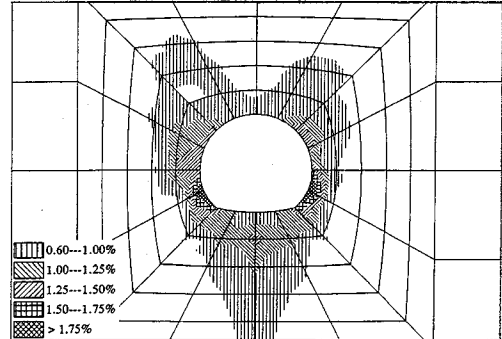


Fig. 7 Maximum shear strain distribution

5. まとめ

本ノートにおいては、トンネル周辺地山に生じる非弾性ひずみを初期応力および弾性係数に並ぶ未知パラメータとし、これらをノルム最小化法を用いて数少ない変位計測から決定する方法を開発した。この方法によれば地山に関する予備情報を必要とせず、ポアソン比のみを仮定することによって、地山の非弾性挙動を逆解析することが可能である。また、モンテカルロシミュレーションにより本方法で得られる解が十分安定したものであることを確かめた。さらに、その方法を実トンネルの変形挙動の評価に適用した結果、十分実用に供し得ることが分かった。

参考文献

- 1) 櫻井春輔, 武内邦文: トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法, 土木学会論文報告集, 第337号, pp.137-145, 1983.
- 2) 櫻井春輔, 川嶋幾夫, 皿海章雄, 芥川真一: 地盤の非線形挙動の逆解析, 土木学会論文集 No.505/III-29, pp.133-140, 1994.12.
- 3) 例えば, 久保司郎: 計算力学とCAEシリーズ10, 逆問題, 培風館, 1992.

- 4) Gao, Z. and Mura, T. : Nonelastic strains in solids - An inverse characterization from measured boundary data, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 30, No.1, pp.55-68, 1992.
- 5) 市川康明 : 地盤力学における有限要素法入門, 日科技連出版社, 1990.
- 6) 櫻井春輔, 芥川真一, 徳留修 : 非線形力学特性の逆解析に関する一考察, 第9回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.67-71, 1994.
- 7) 櫻井春輔 : トンネル工事における変位計測結果の評価法, 土木学会論文報告集, 第317号, pp.93-100, 1982.
- 8) Hansmire, W. H. and Cording, E. J. : Soil tunnel test section : Case history summary, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol.111, No. 11, pp.1301-1320, 1985.
- 9) 櫻井春輔, 藤井浩, 進士正人 : 土被りの浅いトンネルの変形挙動の逆解析, 建設工学研究所報告第36号, pp.1-15, 1994. (1994. 1. 28 受付)

BACK ANALYSIS OF NON-ELASTIC STRAINS BASED ON MINIMUM NORM SOLUTION

Shunsuke SAKURAI, Shinichi AKUTAGAWA and Osamu TOKUDOME

A new form of back analysis procedure has been developed. By using this method, the unknowns including in-situ stresses, Young's modulus, and arbitrary non-elastic strains occurring in a ground medium can be back-calculated efficiently and accurately. The method is based on the use of a minimum norm solution which is employed to determine unknown parameters in such a way that the norm of the unknown parameter vector is minimized while achieving the complete equivalency between measured and computed displacements. This method is symbolically characterized by the fact that the unknown parameters, which could be in some cases counted in hundreds, can be uniquely determined by measured displacements of much less quantity than that of the unknowns. Example problems demonstrate that the solutions obtained by this method are reliable and they are also found to be stable against measurement errors.