

透水係数の空間分布を考慮した 地下水解析手法の提案

田中靖治¹・奥野哲夫²・鈴木 誠³

¹正会員 工修 財団法人電力中央研究所 原燃サイクル工学外部 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

²正会員 博(工) 株式会社大崎総合研究所 (〒100 東京都千代田区内幸町二丁目2-2富国生命ビル)

³正会員 工博 株式会社大崎総合研究所

本研究では、透水係数の測定値から透水係数の統計量を算定し、その統計量と測定値から対象地盤内の透水係数の空間分布を推定し、さらに、地下水の流動状況を確認的に評価できる2次元の飽和・不飽和浸透流解析コードを開発した。透水係数の推定、浸透流解析ともに誤差についても評価することが可能である。透水係数の統計量の算定には最尤法を、透水係数の空間分布の推定手法にはクリッキングを、浸透流解析には線形一次近似法に基づく有限要素法をそれぞれ使用する。

Key Words : *hydraulic conductivity, spatial distribution, groundwater flow analysis, probability theory, kriging*

1. はじめに

近年、石油の地下備蓄、圧縮空気の地下貯蔵や放射性廃棄物の地層処分等、地下に大規模な土木構造物を建設することが実施あるいは計画されつつある。そういった構造物を安全かつ合理的に設計・施工し、また、環境への影響を評価するために、建設中および建設後の地下水流動状況を精度良く把握することが必要となる。しかし、建設予定地周辺での事前の地下水調査の一環として行われる透水試験では、地層毎に異なる透水係数値が得られるだけでなく、多くの場合同一の地層内においても試験位置により得られる透水係数の値が異なる。

そこで、透水係数等の水理パラメーターの不確実性を確率的に表現することが比較的早くから提案されてきたが、浸透場を多孔質体として扱った確率論的アプローチは比較的少ない。その中で、Freeze¹⁾は1次元ではあるが空間分布を考慮した浸透流解析にスペクトル理論の概念を用いて、理論的な展開を行なった。Bakr et al.²⁾も同様な方法で1次元から3次元への理論の展開を行なった。Kitanidis³⁾は水理パラメーターを確率場としてモデル化し、自己共分散関数に多項式を当てはめることを提案した。以上のモデルは浸透場を確率場

として表現したものであるが、実際の地盤には唯一の標本場が存在するだけである。そのため、調査により得られた測定データを統計量を求めるためだけに使用するのではなく、データ自体も用いて浸透場を標本場としてモデル化する研究が行われるようになってきた。空間的に点在する透水試験のデータから標本場を推定する手法の1つにクリッキング(kriging)と呼ばれる最適線形不偏推定法がある。クリッキングはMatheron⁴⁾により理論的な定式化が行われ、Journel and Huijbregts⁵⁾などにより地盤統計学として鉱山工学の分野で発達してきた。水文学においてもMarsily⁶⁾などにより導入されている。クリッキングは内挿や補間の方法として位置付けられており、水文学の分野では水理パラメーターをはじめ、地下水位の空間分布推定にも用いられている。

一方、浸透流解析において、浸透場のモデル化に確率論を取り入れて、差分法や解析解により地下水位を確率論的に予測しようとするDettinger and Wilson⁷⁾に代表されるような研究は、比較的早くから行われている。それに比べて、確率有限要素法の適用例は少なく、摂動法を用いたSager⁸⁾や西脇ら⁹⁾の研究が知られている程度である。

確率有限要素法は構造分野で特に発展した。確率有

限要素法に関する研究として主なものは、摂動法に代表される数値解析手法とモンテカルロ・シミュレーション法に代表される数値実験手法に関するものがある。摂動法に基づく確率有限要素法は最もよく研究されており、特に1次近似法を取り入れた摂動法は、式の表現も容易で演算時間も少ないことから、多くの研究者がこれを利用している。最初に、この1次近似による摂動法(線形一次近似法)を有限要素法に取り入れたのはCombou¹⁰⁾であり、これと同様の手法は、Beacher and Ingra¹¹⁾が地盤工学の問題に、Handa and Andersson¹²⁾が梁とフレームの静的問題に取り入れている。また、鈴木・石井¹³⁾はクリッキングと設計点まわりの線形近似法を用いた確率有限要素法を盛土沈下予測に適用した。数値実験手法であるモンテカルロ・シミュレーション法を用いた確率有限要素法についてもYamazaki et al.^{14),15)}などにより研究が進められている。この手法は、通常確定的な有限要素解析を何回も繰り返すことにより結果の統計量を評価するため、解析的近似法でうまく取り扱えないような問題も対処でき、既存の解析プログラムをそのまま利用できるという利点がある。しかし、系の自由度が大きい場合には当然ながら演算時間が問題となる。

本研究では、透水試験により得られた測定値をより有効に利用した合理的かつ高精度な地下水解析を可能とするため、以下の特徴を有する解析手法を提案する。(1)透水係数の測定値から透水係数の統計量が算定できる。その際、透水係数は平均値関数と確率関数から構成されるものとし、それぞれについて適当な関数モデルを設定し、最尤法により関数モデルのパラメータ値を求める。(2)透水係数の統計量と測定値を基に、クリッキングにより地盤内の透水係数の空間分布を推定することができる。(3)透水係数の推定値と推定誤差を入力データとした線形一次近似法に基づく確率有限要素解析により、地盤内の圧力水頭やダルシー流速(以下では単に流速と呼ぶ)について確率的な評価を行うことが可能である。

2. 透水係数の空間分布推定

(1) 確率モデルの設定と統計的推定¹⁷⁾

a) 透水係数の空間分布に関する確率モデル

一般に透水係数等の地盤物性値は相互に相関性をもって空間的にばらついており、このような分布を確率論的に取り扱うためには、空間的な相関性を考慮できる確率モデルを用いて表現することになる。その際、場所により物性値の確率特性が変化しないという仮定(エルゴード性)が必要となるが、一般には場所により変化するトレンド成分を物性値が有している場

合が多い。そのため、ここでは透水係数の常用対数値(以下では対数透水係数と呼ぶ)を平均値関数(トレンド成分)と確率関数(ランダム成分)の和として表す。

$$k(x) = k_r(x) + k_n(x) \quad (1)$$

ここで、 $k(x)$ は位置 x における対数透水係数、 $k_r(x)$ は平均値関数、 $k_n(x)$ は確率関数を表わす。

空間的な相関特性は確率関数に依存しており、 $E[k_n(x)] = 0$ であるため次式で定義される共分散関数により表現される。

$$C(h) = E\{k_n(x)k_n(x+h)\} \quad (2)$$

ただし、 h はデータ間の距離ベクトルを表わす。

b) 確率モデルの統計的推定

原位置で得られた対数透水係数の測定値に対して、適当な平均値関数および共分散関数のモデルを設定し、モデルに含まれるパラメータの値を統計的に推定する。推定すべきパラメータは、分散、相関距離ベクトルおよび平均値関数の係数ベクトルである。これらの値を推定する手法として、ここでは最尤法¹⁸⁾を用いる。データの分布として正規分布を仮定すると、 N 個の測定値が得られている場合、尤度関数は次式のような N 次元正規確率密度関数として表される。

$$P(k|\theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |G|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(k - k_r)^T \cdot G^{-1} \cdot (k - k_r)\right\} \quad (3)$$

ここで、 k は測定値ベクトル、 k_r は測定点におけるトレンド成分ベクトル、 θ は推定すべきパラメータベクトル、 G は自己共分散マトリクスである。また、 $|G|$ はマトリクスのデターミネント、 T は転置を示す。

最尤法では、式(3)の尤度関数を最大とするような θ を求める。

c) 情報量規準AICによる最良モデル選定

多数のモデルの中から与えられたデータに最も良く合うモデルを選定する規準として、ここでは次式で与えられるAIC(Akaike's Information Criterion)^{19),20),21)}を導入する。

$$AIC = -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \quad (4)$$

ただし、モデルの自由パラメータ数とは、モデル内で自由に变化させられるパラメータの数である。

このAICを最小にするモデルが最適なモデルとなる。

(2) 対数透水係数の空間分布推定

上記の統計的手法により対数透水係数の空間分布に関する確率モデルおよびそのパラメータ値を決定した後、そのモデルに基づいて、対数透水係数の測定データからクリッキング⁶⁾と呼ばれる線形推定法により対

数透水係数の空間分布を推定する。推定結果は確率有限要素法による解析への入力データとなるため、対数透水係数の推定値・推定誤差共分散は各要素に対して割り当てる必要がある。そこで、対数透水係数の推定は、要素に対する局所平均を用いたブロック・クリッキングにより行う。

ブロック・クリッキングでは、任意の要素*V*における推定量 k_v^* を次のように測定値の線形和として表す。

$$k_v^* = \lambda^T \cdot k \quad (5)$$

ここで、 k は多数の測定位置での対数透水係数の測定値から成るベクトルであり、 λ は重み係数ベクトルである。

クリッキングは、以下の2つの条件を満たすように重み係数ベクトルを定めることにより、目的とする推定値を求めるものである。

①多くの推定値 k_v^* の標本場 k_v に対する誤差が平均的となる

$$E[k_v - k_v^*] = 0 \quad (6)$$

②推定誤差分散を最小とする

$$E[\{k_v - k_v^*\}^2] \rightarrow \min \quad (7)$$

上記の推定誤差分散を最小にするために最小二乗法を用いる。ここでは詳細な式展開は省略するが、実際の計算では次の方程式を解くことで重み係数ベクトルを得る。

$$L = K^{-1} \cdot M \quad (8)$$

ここで、マトリックス K 、ベクトル L と M はそれぞれ次のように与えられる。

$$K = \begin{bmatrix} \text{var}\{k_{ra}(x_1)\} & \dots & \text{cov}\{k_{ra}(x_1), k_{ra}(x_N)\} & 1 & f_2(x_1) & \dots & f_L(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}\{k_{ra}(x_N), k_{ra}(x_1)\} & \dots & \text{var}\{k_{ra}(x_N)\} & 1 & f_2(x_N) & \dots & f_L(x_N) \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(x_1) & \dots & f_2(x_N) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L(x_1) & \dots & f_L(x_N) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N, -\mu_1, \dots, -\mu_L\} \quad (10)$$

$$M^T = \{\text{cov}\{k_{ra}(x_1), k_{ra}(x_1)\}, \dots, \text{cov}\{k_{ra}(x_N), k_{ra}(x_N)\}, 1, f_{v2}, \dots, f_{vL}\} \quad (11)$$

ただし、 $f(x)$ は、点 x における対数透水係数のトレンド成分が次式のように x の多項式で表現できると仮定し

た場合の多項式の第*i*項である (b は多項式の係数ベクトルである)。

$$k_v(x) = f(x)^T \cdot b \quad (12)$$

また、 f_{vi} は要素*V*におけるトレンド成分の多項式の第*i*項の局所平均であり、 $\text{cov}\{k_{ra}(x_i), k_{ra}(x_N)\}$ は点 x_i のランダム成分と要素*V*のランダム成分の局所平均との共分散である。そして、 μ はラグランジエ乗数ベクトルである。

式(8)を解くことにより得られた λ を式(5)に代入することにより、要素*V*における対数透水係数の推定値 k_v^* が求まる。また、要素*V*における推定誤差分散 $E[\{k_v - k_v^*\}^2]$ 、要素*V*と*V'*の推定誤差共分散 $E[\{k_v - k_v^*\} \cdot \{k_{v'} - k_{v'}^*\}]$ は、式(13)、(14)より得られる。

$$E[\{k_v - k_v^*\}^2] = \text{var}\{k_{vra}\} - L^T \cdot M \quad (13)$$

$$E[\{k_v - k_v^*\} \cdot \{k_{v'} - k_{v'}^*\}] = \text{cov}\{k_{vra}, k_{v'ra}\} - \lambda'^T \cdot K'_v + \lambda^T \cdot K'_{v'} + \lambda'^T \cdot K \cdot \lambda \quad (14)$$

ただし、

$$K'_v = \begin{bmatrix} \text{cov}\{k_{vra}, k_{ra}(x_1)\} \\ \vdots \\ \text{cov}\{k_{vra}, k_{ra}(x_N)\} \end{bmatrix} \quad (15)$$

3. 確率論的な飽和・不飽和浸透流解析

定常状態における飽和・不飽和浸透流の支配方程式を有限要素法により定式化すると次式となる。

$$K(\psi) \cdot \psi + B(\psi) - Q + q = 0 \quad (16)$$

ここで、 ψ は圧力水頭ベクトル、 $K(\psi)$ は透水係数マトリクス、 $B(\psi)$ は位置水頭ベクトル、 Q は湧水率ベクトル、 q は境界流出率ベクトルであり、解析領域が*M*個の要素に分割されている場合、それぞれ次式で表わされる。

$$K(\psi) = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} K_{ij}(\psi_e) \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} dV \quad (17)$$

$$B(\psi) = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} K_{i3}(\psi_e) \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} dV \quad (18)$$

$$Q = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} Q_e N_\beta dV \quad (19)$$

$$q = \sum_{e=1}^M \int_{\partial \Omega_e} \bar{q} N_\beta dS \quad (20)$$

上式中において、 $K_{ij}(\psi_e)$ は要素*e*の透水テンソル、 N_α 、 N_β は各節点毎に定義される形状関数、 Q_e は要素*e*の湧水率、 \bar{q} は要素境界の流出率を表わす。

今、解析モデルが*M*個の有限要素から構成されていて

る場合に、各要素が1つの不確定要因 ε_i を含むものとし、次の確率ベクトル ε を考える。

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_M\} \quad (21)$$

そのとき、要素 e の飽和透水テンソル K_y は次式で表わされるものとする。

$$K_y = \gamma^e \cdot \bar{K}_y^s \quad (22)$$

ただし、 γ^e は要素 e の確率変数 ε_e の関数、 \bar{K}_{ij}^s は要素 e の飽和透水テンソルの平均である。

透水係数が対数正規分布にしたがう場合には、 \bar{K}_{ij}^s 、 γ^e は以下の式により与えられる。

$$\log_{10} \bar{K}_y^s = E[\log_{10} K_y^s] \quad (23)$$

$$\gamma^e = 10^{\varepsilon^e} \quad (24)$$

要素内に不飽和な部分が存在する場合には、式(22)より要素の透水テンソル $K_y(\psi)$ は次式で表される。

$$K_y(\psi) = \gamma^e \cdot \bar{K}_y^s \cdot \left\{ \sum_{l=1}^n N_l \cdot K^r_l(\psi_l) \right\} \quad (25)$$

ただし、 $K^r_l(\psi)$ は節点 l の圧力水頭 ψ_l に依存して計算される節点の透水係数比で、 N_l は各節点で定義される形状関数、 n は全節点数である。

式(16)において \mathbf{K} と \mathbf{B} が確率ベクトル ε の関数と考えると、圧力水頭 ψ も確率ベクトル ε の関数となる。

圧力水頭 ψ を平均値 $\bar{\varepsilon}$ の近傍でテーラー展開し、その2次以上の高次項を無視すれば次式のようになる。

$$\psi_i \approx \psi_i(\bar{\varepsilon}) + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon_k} \right)_{(\bar{\varepsilon})} \cdot (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_k) \quad (26)$$

そのため、線形一次近似法によれば圧力水頭 ψ_i の平均値は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E[\psi_i] &\approx E \left[\psi_i(\bar{\varepsilon}) + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon_k} \right)_{(\bar{\varepsilon})} \cdot (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_k) \right] \\ &= \psi_i(\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (27)$$

したがって、平均圧力水頭は以下の手順により計算することができる。

- ① 確率ベクトル ε の平均値 $E[\varepsilon]$ を用いて γ^e を求める
- ② 式(25)の透水テンソル $K_y(\psi)$ を算定する
- ③ 式(17)、(18)により透水係数マトリクス \mathbf{K} 、位置水頭ベクトル \mathbf{B} を求める
- ④ 式(16)を繰り返し計算により解き、平均圧力水頭 $\psi(\bar{\varepsilon})$ を求める

また、式(26)より線形一次近似法を用いると圧力水頭 ψ の共分散は次式で表わされる。

$$\text{Cov}[\psi_i, \psi_j] = E[(\psi_i - E[\psi_i]) \cdot (\psi_j - E[\psi_j])] \quad (28)$$

$$\approx \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \varepsilon_k} \right)_{(\bar{\varepsilon})} \cdot \sum_{l=1}^M \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \varepsilon_l} \right)_{(\bar{\varepsilon})} \cdot \text{Cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_l] \quad (28)$$

式(16)の両辺を ε で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varepsilon} \cdot \psi + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{0} \quad (29)$$

式(29)の左辺第1項の偏微分は、式(17)、(25)を用いると次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{K}'_e + \mathbf{K}'_\psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (30)$$

$$\mathbf{K}'_e = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial \gamma^e}{\partial \varepsilon_k} \cdot \bar{K}_y^s \cdot K^r_l(\psi_l) \int_{\Omega_e} N_l \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} dV \right] \quad (31)$$

$$\mathbf{K}'_\psi = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^n \left[\gamma^e \cdot \bar{K}_y^s \cdot \frac{\partial K^r_l(\psi_l)}{\partial \psi_m} \int_{\Omega_e} N_l \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} dV \right] \quad (32)$$

ただし、式(32)において i, j は総和規約に従うが、 l は総和規約に従わない。また、 \mathbf{K}'_e は確率ベクトル ε の変動による透水マトリクスの変化率を、 \mathbf{K}'_ψ は確率ベクトル ε の変動に伴って生ずる圧力水頭の変動に起因する透水マトリクスの変化率をそれぞれ表わす。

一方、式(29)の左辺第3項の偏微分は、式(18)、(25)を用いると次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{B}'_e + \mathbf{B}'_\psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}'_e = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial \gamma^e}{\partial \varepsilon_k} \cdot \bar{K}_{i3}^s \cdot K^r_l(\psi_l) \int_{\Omega_e} N_l \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} dV \right] \quad (34)$$

$$\mathbf{B}'_\psi = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^n \left[\gamma^e \cdot \bar{K}_{i3}^s \cdot \frac{\partial K^r_l(\psi_l)}{\partial \psi_m} \int_{\Omega_e} N_l \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} dV \right] \quad (35)$$

ただし、式(35)において i, j は総和規約に従うが、 l は総和規約に従わない。また、 \mathbf{B}'_e は確率ベクトル ε の変動による位置水頭ベクトルの変化率を、 \mathbf{B}'_ψ は確率ベクトル ε の変動に伴って生ずる圧力水頭の変動に起因する位置水頭ベクトルの変化率をそれぞれ表わす。

式(30)、(33)を式(29)に代入し、 $\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}$ について解く

と次式となる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -[\mathbf{K} + \mathbf{K}'_\psi \cdot \psi + \mathbf{B}'_\psi]^{-1} \cdot [\mathbf{K}'_e \cdot \psi + \mathbf{B}'_e] \quad (36)$$

したがって、圧力水頭の共分散(推定誤差共分散)は以下の手順により計算できる。

- ① 平均値 $\bar{\varepsilon}$ における \mathbf{K} 、 \mathbf{K}'_e 、 \mathbf{B}'_e 、 \mathbf{K}'_ψ 、 \mathbf{B}'_ψ を式(17)、(31)、(32)、(34)、(35)により求める

- ② 式(36)により平均値 $\bar{\varepsilon}$ における偏微分 $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right)_{(\bar{\varepsilon})}$ を求める

る

③式(28)により圧力水頭の共分散(推定誤差分散)を算定する

次に、流速 v に関する平均値 $E[v]$ と共分散 $Cov[v_p, v_q]$ を求める。ただし、流速は3次元状態を考えると要素間で3成分 (x, y, z) のそれぞれの組み合わせで共分散が存在する。ここでは要素を p, q の添字で示し、3成分を i, j の添字で表すものとする。

圧力水頭の場合と同様に、式(16)において K と B が確率ベクトル ε の関数と考えると、流速 v も確率ベクトル ε の関数となる。

要素 p の流速 v_p を平均値 $\bar{\varepsilon}$ の近傍でテーラー展開し、その2次以上の高次項を無視すれば次式のようになる。

$$v_{pi} \approx v_{pi}(\bar{\varepsilon}) + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial v_{pi}}{\partial \varepsilon_k} \right)_{(\bar{\varepsilon}_k)} \cdot (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_k) \quad (37)$$

そのため、線形一次近似法によれば流速 v_p の平均値は次式で表わされる。

$$E[v_{pi}] \approx v_{pi}(\bar{\varepsilon}) \quad (38)$$

要素内流速 v_{pi} は、式(25)を用いることにより次式で与えられる。

$$v_{pi} = \gamma^p \cdot \bar{K}_{ij}^s \cdot \left[\sum_{l=1}^{n_p} N^{p_l} \cdot K^r_l(\psi_l) \right] \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{n_p} \frac{\partial N^{p_\alpha}}{\partial x_j} \cdot \psi_\alpha \right] \quad (39)$$

ただし、 N^{p_l}, N^{p_α} は要素形状関数、 n_p は要素の節点数である。

式(39)の γ^p と ψ_l に確率ベクトル ε の平均値 $\bar{\varepsilon}$ を用いて計算した値を用いれば、平均流速 $v(\bar{\varepsilon})$ を求めることができる。

また、式(37)より線形一次近似法を用いると流速 v_p の共分散は次式で表わされる。

$$Cov[v_{pi}, v_{qj}] \approx \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial v_{pi}}{\partial \varepsilon_k} \right)_{(\bar{\varepsilon}_k)} \cdot \sum_{l=1}^M \left(\frac{\partial v_{qj}}{\partial \varepsilon_l} \right)_{(\bar{\varepsilon}_l)} \cdot Cov[\varepsilon_k, \varepsilon_l] \quad (40)$$

式(39)の両辺を ε_k で偏微分すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{pi}}{\partial \varepsilon_k} &= \bar{K}_{ij}^s \cdot \frac{\partial \gamma^p}{\partial \varepsilon_k} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{n_p} N^{p_l} \cdot K^r_l(\psi_l) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n_p} \frac{\partial N^{p_\alpha}}{\partial x_j} \cdot \psi_\alpha \right\} \\ &+ \gamma^p \cdot \bar{K}_{ij}^s \cdot \sum_{l=1}^{n_p} \left[N^{p_l} \cdot \sum_{m=1}^{n_p} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \varepsilon_k} \cdot \frac{\partial K^r_l(\psi_l)}{\partial \psi_m} \right) \right] \cdot \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n_p} \frac{\partial N^{p_\alpha}}{\partial x_j} \cdot \psi_\alpha \right\} \\ &+ \gamma^p \cdot \bar{K}_{ij}^s \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{n_p} N^{p_l} \cdot K^r_l(\psi_l) \right\} \cdot \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n_p} \frac{\partial N^{p_\alpha}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \varepsilon_k} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

したがって、流速の共分散(推定誤差共分散)は以下の手順により計算できる。

①平均値 $\bar{\varepsilon}$ における $\gamma^p, \psi, \frac{\partial K^r_l(\psi_l)}{\partial \psi_m}, \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}$ の値を式(41)

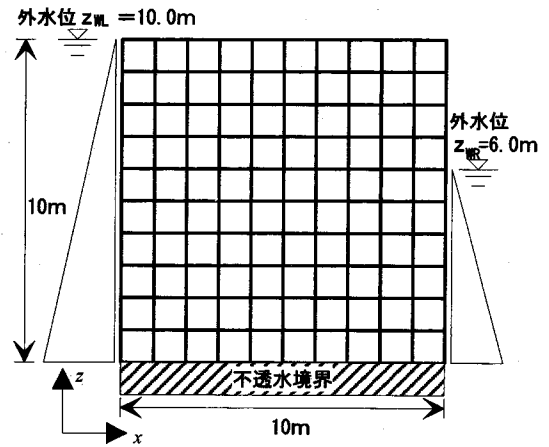


図-1 解析モデル

に代入することにより、流速の偏微分 $\left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \right)_{(\bar{\varepsilon})}$ の値を求める

②式(37)により流速の共分散(推定誤差共分散)を算定する

4. 線形一次近似法による解析機能の検証

平均値まわりの線形一次近似法を用いた確率有限要素解析では、入力値と応答値の関係が線形であれば解析結果は正解値を与える。しかし、浸透流解析では、入力値である飽和透水係数と応答値である圧力水頭の関係が一般に非線形であるため、圧力水頭の解析結果は真の平均値と一致しない。さらに、解析領域内に不飽和な部分を含む場合には、流量と圧力水頭の関係も非線形となる。そのため、これら2種類の非線形性の及ぼす影響について検討を行なう。

(1) 解析モデル

検証に用いる二次元解析モデルを図-1に示す。各有限要素は、1辺の長さが1mの正方形であり、各辺の中央にも節点を有する2次要素とした。また、解析領域に不飽和な部分が存在する場合を検討対象とするため、領域の右側境界上の水位を $Z_w=6m$ に設定する。不飽和特性曲線は図-2に示すものを用いる。

また、ここでは均質な確率場を仮定しており、飽和透水係数は対数正規分布にしたがうものとする。設定した飽和透水係数の確率特性を表-1に示す。地盤・岩盤の透水係数の値は、通常同一のサイトにおいても数オーダーにわたって分布することが多い²²⁾。そこで、標準偏差 σ_k の値として、ここでは $\pm 3 \sigma_k$ が ± 2 オーダーとなるように設定した。共分散関数として、2点

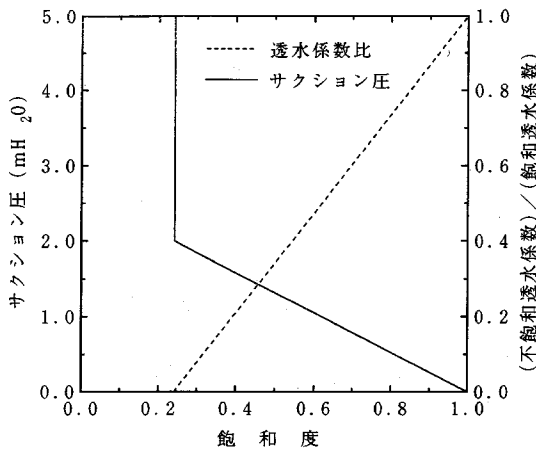


図-2 不飽和特性曲線

表-1 飽和透水係数の確率特性の設定値

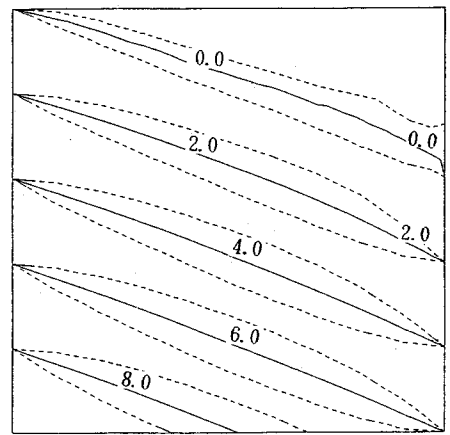
平均値 μ_k	1.0×10^{-8} m/sec
標準偏差 σ_k	$10^{0.67}$ m/sec
x方向の相関距離 a_x	1.0m
z方向の相関距離 a_z	1.0m
共分散関数	$C(h) = \sigma_k^2 \cdot \exp \left\{ - \sqrt{ \left(\frac{\Delta x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{a_z} \right)^2 } \right\}$ <p>ただし、hは2点間の距離</p>

間の距離が離れるに従い指数関数的に透水係数の相関性が低下するモデルが当てはまるものとした。このような共分散関数は、地盤物性値の空間分布特性を表わすモデルとして用いられている^{6), 23)}。相関距離の値としては、解析領域内である程度透水係数の大小の差が生じるように1mを設定した。

以上に述べた解析モデルおよび解析条件を用いて、線形一次近似法とモンテカルロ法による浸透流解析を実施し、両者の結果を比較することにより検討を行う。ここで用いるモンテカルロ法は、各要素の飽和透水係数の共分散をコレスキー分解することにより、空間的に相関特性を有する離散確率場を発生させる方法であり、計算は500回実施した。なお、モンテカルロ法の計算には既存の有限要素解析コードを用いるものとする。

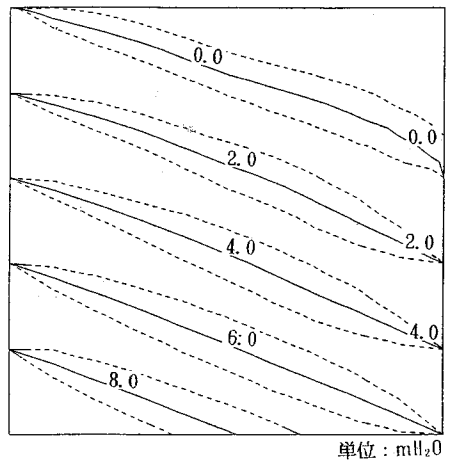
(2) 解析結果

線形一次近似法により求めた圧力水頭の解析結果を図-3(a)に示す。図で実線は推定値を、破線は推定値に対する推定誤差をそれぞれ表わす。また、図-3(b)にはモンテカルロ法により求めた圧力水頭の平均値と標準偏差を同様な表記法により示した。両者の結果を比較すると、圧力水頭の推定値は良く一致し



(a) 線形一次近似法

(実線：推定値，破線：推定値±推定誤差)



(b) モンテカルロ法

(実線：平均値，破線：平均値±標準偏差)

図-3 圧力水頭の解析結果

ている。圧力水頭の推定誤差（標準偏差）に関しては、両者はほぼ一致しているものの、地下水面では若干の相違が見られる。この原因としては、やはり上述の2種類の非線形性の影響が考えられるが、地下水面より下の飽和部分ではほとんど両者の解析結果に差が見られないことから、不飽和領域の存在に起因する流量と圧力水頭の関係における非線形性が相対的に大きく影響しているものと考えられる。

一方、線形一次近似法による解析に要した計算時間は、モンテカルロ法の約1/170であった。

以上のことから、ここで対象とした程度の透水係数の標準偏差（透水係数の常用対数値において $\pm 3\sigma$ が ± 2 オーダーに対応）であれば、地下水面近傍におけ

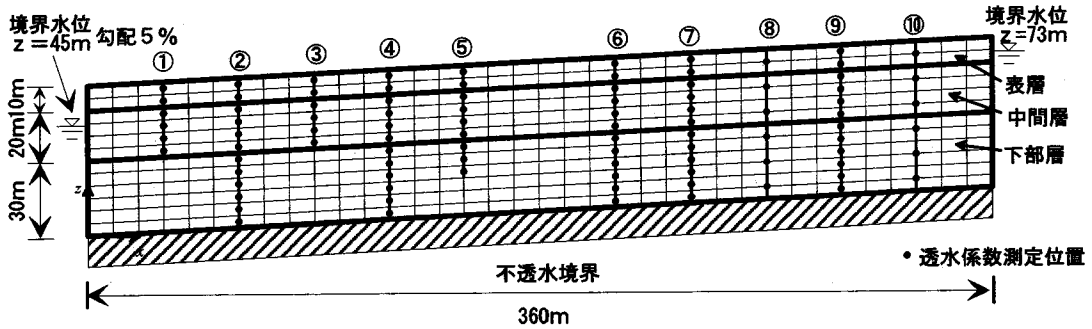


図-4 解析モデル

る推定誤差の評価がモンテカルロ法による結果とは若干異なるものの、多大な計算回数によるモンテカルロ法の計算時間などを勘案すれば、実用的には地下水面上全般で線形一次近似法が有効であると考えられる。

5. ケーススタディ

(1) 解析モデル

本解析手法の有効性を確認するために、透水係数が既知の点が適当に配置された複数の地層から構成される2次元地盤モデルを設定し、ケーススタディを実施した。

図-4に解析モデルを示す。モデルは、表層、中間層、下部層の3つの地層から構成される。飽和透水係数の分布は対数正規分布に従うものとし、共分散関数については、前節と同じ指数関数モデルを用いた。各々の地層に対して設定した飽和透水係数の確率特性を表-2に示す。透水係数の平均値は、表層から下部層に向かって小さくなるように設定した。また、標準偏差 s に関しては、表層・中間層において ± 3 が ± 1 オーダー、下部層において ± 2 オーダーとなるように設定した。相関距離の値としては、解析領域内である程度透水係数の大小の差が生じるように20mを設定した。

そして、表-2に示した確率特性を有する母集団から①~⑩の10本のボーリング孔上の各点に透水係数値をモンテカルロ的に発生させた。すなわち、これらの位置では透水試験により透水係数が測定されていることを想定する。なお、図-4には解析に用いる要素分割も示しており、各要素は縦5m、横10mの平行四辺形とした。要素数は432、節点数は1393である。

(2) 解析結果

表-2 透水係数の確率分布特性の設定値

地層	平均値	標準偏差 σ	相関距離 a_x, a_z
表層	1.0×10^{-3} cm/s	$10^{0.33}$	20m
中間層	1.0×10^{-4} cm/s	$10^{0.33}$	20m
下部層	1.0×10^{-5} cm/s	$10^{0.67}$	20m

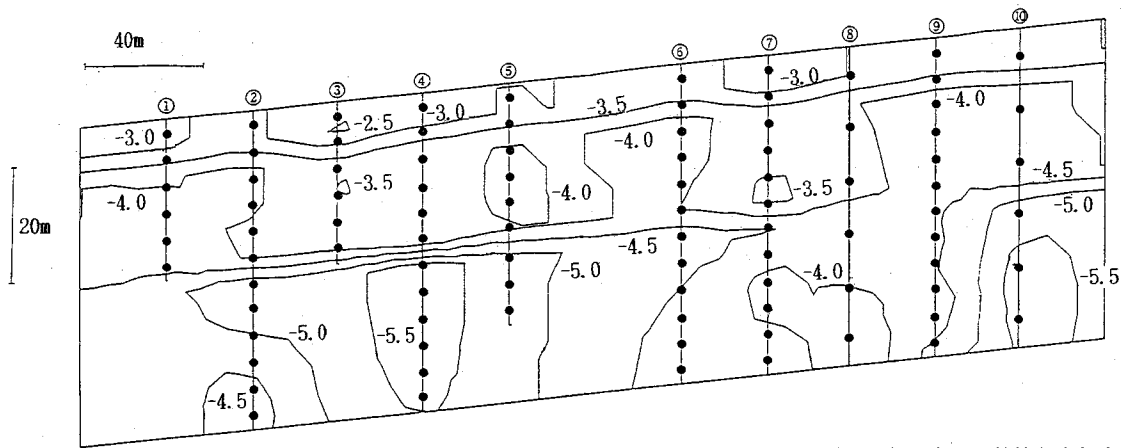
表-3 透水係数の確率分布特性の推定値

地層	平均値	標準偏差 σ	相関距離 a_x, a_z
表層	1.05×10^{-3} cm/s	$10^{0.266}$	15.2m
中間層	1.10×10^{-4} cm/s	$10^{0.318}$	14.5m
下部層	1.28×10^{-5} cm/s	$10^{0.740}$	23.2m

まず、図-4に示した各ボーリング孔上の透水係数のみが既知であるとして、最尤法により対数透水係数の確率分布特性を推定した。その際、共分散関数には母集団と同一の指数関数モデルを用いた。推定結果を表-3に示す。各層の透水係数の平均値は、表-2に示した母集団の平均値とほぼ一致している。また、標準偏差と相関距離については、表層と中間層でやや小さく、下部層でやや大きい評価となっているが、全体的には表-2に示した値に近い推定がなされている。

次に、表-3に示した確率分布特性の推定値と図-4の各ボーリング孔上の既知の透水係数を用いてクリッキングにより推定した対数透水係数の分布を図-5に示す。部層では他の層に比べて対数透水係数の標準偏差が大きいため対数透水係数の分布傾向がはっきりしており、中央よりやや右に比較的对数透水係数が高い領域が存在し、右端と中央よりやや左に対数透水係数が低い領域が分布している。そして、中央よりやや左側の領域では、中間層と下部層との境界部でコンター線が密になっており、その部分で対数透水係数が大きく変化していることがわかる。

また、対数透水係数の推定値に対する推定誤差は、



注：数字はcm/sec単位の透水係数の常用対数値を表わす

図-5 クリッキングによる透水係数の推定値の分布

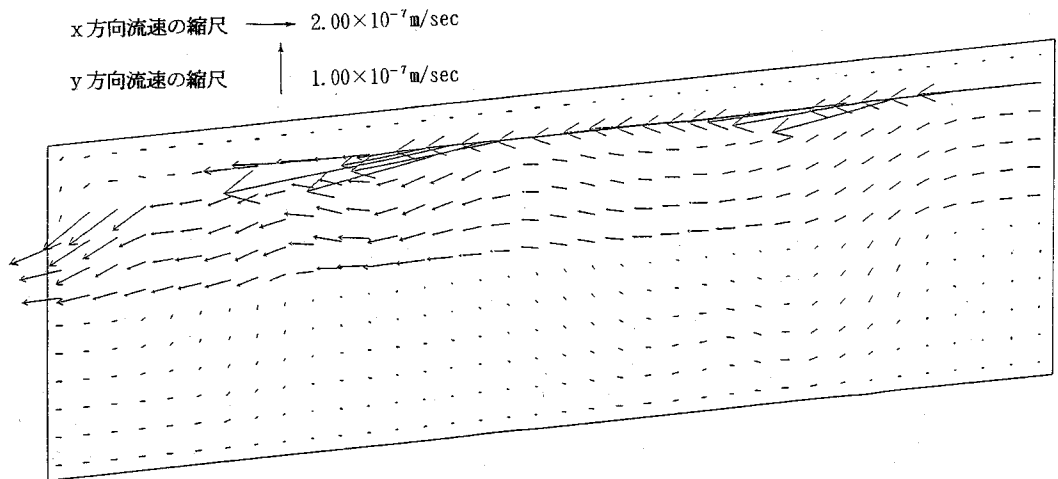


図-6 線形一次近似法による流速分布の解析結果

測定値が存在するボーリング孔付近では小さく、ボーリング孔から遠ざかるにつれてだいに大きくなっており、モデルの中央付近やボーリング孔①と③の下側の領域では0.6（対数透水係数の推定誤差）程度の値となった。同様に、ボーリング孔⑧と⑩では測定値の存在する点の間隔が大きいため、他のボーリング孔と比較してボーリング孔近傍の推定誤差が若干大きくなっている。

最後に、クリッキングの結果求めた対数透水係数の推定値(図-5)と推定誤差の分布を基に、確率論による浸透流解析を実施した。境界条件としては図-4に示したように、領域下部を不透水境界とし、左右端は固定水位とし28mの水位差を与えた。

本解析コードでは圧力水頭と流速の推定値および推定誤差の分布を求めることが可能であるが、ここでは流速の推定値分布に関する解析結果を図-6に示す。特

に、図-5に示したように対数透水係数の推定値が下部層の中央よりやや右側の部分で比較的大きく、中央よりやや左側の部分では小さくなっている状況を反映して、モデルの右側で中間層から地下水が中間層から下部層に流入し、中央付近で再び中間層へ流出している。このように、解析結果には対数透水係数の推定値の局所的な変化が反映されており、領域内での流速および流向の変化が明確に求められている。

6. 結語

本研究では、透水係数の測定値から統計量を算定し、その統計量と測定値を基に地盤内の透水係数の空間分布を推定し、さらに、地下水の流動状況を確率的に評価できる解析コードを開発した。透水係数の統計量の算定では、透水係数が平均値関数と確率関数から

構成されるものとし、それぞれについて適当な関数モデルを設定し、最尤法により関数モデルのパラメータ値を求めることとした。その際、多数のモデルの中から最適なモデルを選定する基準としてAICを導入した。また、地盤内での透水係数の分布状況の推定では、引き続いて実施する確率的な浸透流解析のために、地盤統計学的手法であるブロック・クリッキングにより、各有限要素に透水係数の推定値および推定誤差を算定できるようにした。そして、浸透流解析では、線形一次近似法に基づく確率有限要素法により、圧力水頭や流速の推定値および推定誤差を求めることができるようにした。

また、簡単な二次元モデルを対象として浸透流解析を行い、確率有限要素法の解析機能の検証を行った。本解析手法による解析結果とモンテカルロ法による解析結果とを比較したところ、両者はほぼ一致することが確認された。モンテカルロ法に比べて演算時間が非常に短いこと（今回の解析ケースではモンテカルロ法による演算時間の約1/170）を考慮すると、本解析手法は非常に有効であると言える。

さらに、原位置を想定した地盤モデルに対し、本解析コードを用いてケーススタディ計算を実施した。本解析コードにより推定された透水係数の統計量は、サンプルの発生に用いた母集団の統計量とほぼ一致しており、統計量の推定機能の有効性が確認された。また、浸透流解析の結果、推定された透水係数の局所的な分布を反映して、流速および流向の変化が明確に求められ、本解析コードの有効性が確認された。

今後は、本解析コードの解析精度について評価を行うとともに、解析コードを様々なケースに適用してその有効性についてさらに検討を進めていく。

謝辞：本研究は、科学技術庁からの委託研究「地下水移行解析コードの改良整備」により実施した成果の一部をとりまとめたものである。同委託研究に関する委員会の委員長である東京大学工学部土木工学科玉井信行教授をはじめとする委員の先生方には、貴重な御意見・御指導をいただいた。また、本研究の遂行に際しては、清水建設株式会社の楠本太氏、三井建設株式会社の松尾潔氏ならびに財団法人電力中央研究所の駒田広也氏、伊藤洋、河西基氏に多大な御協力を頂いた。ここに記して深甚なる謝意を表する。

参考文献

- Freeze, Allen R. : A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, *Water Resources Research*, Vol.11, No.5, pp.725-41, 1975.
- Bakr, A. A., L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr and J. R. MacMillan : Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flows, 1, Comparison of one- and three-dimensional flows, *Water Resources Research*, Vol.14, pp.263-1271, 1978.
- Kitanidis, P.K. : Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications, *Water Resources Research*, Vol.19, No.4, pp.909-921, 1983.
- Matheron, G. : Principle of geostatistics, *Economic Geology*, Vol.58, pp.1246-1266, 1963.
- Journel, A. G. and Huijbregts, Ch. J. : *Mining Geostatistics*, Academic Press, 1978.
- Marsily, G. : *Quantitative Hydrology*, Academic Press, 1986.
- Dettinger, M. D. and Wilson, J. L. : First order analysis of uncertainty in numerical models of groundwater flow, Part 1. Mathematical development, *Water Resources Research*, Vol.17, No.1, pp.149-161, 1981.
- Sager, B. : Galerkin finite element procedure for analyzing flow through random media, *Water Resources Research*, Vol.14, No.1, pp.1035-1044, 1978.
- 西脇芳文, 梨本裕, 松井幹雄, 相木克介 : 地下水挙動の確率論的な予測解析, 土木学会第45回年次学術講演会講演概要集, 第3部, pp.922-923, 1990年9月.
- Cambou, B. : Application of first-order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity, *Proc. 2nd Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structure Engineering*, Aachen, pp.67-87, 1975.
- Beacher, G. B. and Ingra, T. S. : Stochastic FEM in settlement predictions, *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol.107, No.4, pp.449-463, 1981.
- Handa, K. and Andersson, K. : Application of finite element methods in the statistical analysis of structures, *Proc. 3rd Int. Conf. on Structural Safety and Reliability*, Sydney, pp.409-417, 1981.
- 鈴木誠, 石井清 : 土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法, 土木学会論文集, 第3部, pp.922-923, 1988年6月.
- Yamazaki, F. and Shinozuka, M. : Safety evaluation of stochastic systems by Monte Carlo simulation, *Proc. 9th Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol.1, pp.63-68, 1987.
- Yamazaki, F. and Shinozuka, M. : Digital generation of non-gaussian stochastic fields, *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.114, No.7, pp.1183-1197, 1988.
- Yamazaki, F. and Shinozuka, M. and Dasgupta, G. : Neumann expansion for stochastic finite element analysis, *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.114, No.8, pp.1183-1197, 1988.
- 鈴木誠 : 空間的に分布する地盤物性値の統計量推定, *JCOSSAR'91*, B-46, pp.707-710, 1991.
- Kitanidis, P.K. and Lane, R.W. : Maximum likelihood parameter estimation of hydrologic spatial process by the Gauss-Newton

method, *J. Hydrol.*, Vol.7, pp.53, 1985.

- 19) 赤池弘次：情報量基準AICとは何か—その意味と将来への展望, 数理科学, No. 153, pp. 5-11, 1976年3月.
- 20) 赤池弘次：エントロピーとモデルの尤度, 日本物理学会誌, Vol. 35, No. 7, pp. 608-614, 1980.
- 21) 赤池弘次：モデルによってデータを測る, 数理科学, No. 213, pp. 7-10, 1981年3月.
- 22) 例えば, 中川加明一郎, 志田原巧：CAES-G/T発電のため

の硬岩地下空洞の圧縮空気貯蔵機能評価—ボーリング孔内での水封機能の実証—, 電力中央研究所報告, U91058, pp. 7-9, 1992.

- 23) Gelhar, L.W. : Stochastic subsurface hydrology from theory to applications, *Water Resources Research*, Vol.22, No.9, pp.135-145, 1986.

(1994. 6. 7 受付)

A NUMERICAL ANALYSIS METHOD FOR GROUNDWATER FLOW IN A FORMATION WITH SPATIALLY VARIABLE HYDRAULIC CONDUCTIVITY

Yasuharu TANAKA, Tetsuo OKUNO and Makoto SUZUKI

A new computer code involving kriging method and linear approximation method has been developed to analyze the groundwater flow in saturated and unsaturated zones with heterogeneous conductivity. Kriging method is used to estimate the spatial distribution of hydraulic conductivity in the geological formation from the measured values of hydraulic conductivities measured in situ. Then, based on the estimated result, groundwater flow regime in the formation is calculated stochastically by the linear approximation method. This code has been applied to a two-dimensional geological model, of which result is consist with the result obtained by Monte Carlo simulation.