

# クリープひずみ等価節点力の算出法に関する一提案

梨本 裕<sup>1</sup>・高森貞彦<sup>2</sup>・今田 徹<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 前田建設工業(株)土木設計部 課長 (〒179 東京都練馬区高松5-8 J. CITY)

<sup>2</sup>前田建設工業(株)土木設計部 次長 (〒179 練馬区高松5-8 J. CITY)

<sup>3</sup>正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科 (〒192-03 東京都八王子市南大沢1-1)

FEMによる粘弾性解析においてクリープひずみ等価節点力による近似がよく利用されているが、その利用条件の妥当性についてはほとんど問題にされていないようである。本ノートでは、トンネルの施工を簡単に模擬し、厳密解が得られる条件の下で、この近似の精度について検討した。その結果、この近似を利用すると非現実的な解を出力する可能性があることを明らかにした。そして、この近似の補正方法を提案し、これが近似解の精度の向上に極めて有効であることを示した。

**Key Words :** creep, FEM, tunnel, nodal load equivalent to creep strain

## 1. はじめに

地山強度比が2以下あるいは1以下であるような低強度地山におけるトンネルの設計・施工を困難なものとしている要因の1つに強い時間依存性が挙げられる。軟岩に代表される低強度地山の時間依存性はクリープとして取り扱われることが多いが、クリープに関するFEMの実用的な研究成果はすべて今後に待たなければならないと言われている<sup>1)</sup>。

FEMによる粘弾性解析においてはクリープひずみ等価節点力<sup>1),2)</sup>による近似がよく利用される。そこでは、この近似の開発者が意図していなかったような条件が設定されていることも少なくないと考えられる。

しかし、地山のクリープ特性そのものがまだ十分に把握できていないこともあり、この近似の利用条件の妥当性についてはほとんど検討されていないようである。

本ノートでは、トンネルの施工を簡単に模擬し、厳密解が得られる条件の下で、この近似解の精度について検討する。そして、近似解の精度の向上に有効な補正方法を提案し、その有用性を検討する。

## 2. 検討条件

クリープひずみ等価節点力による近似の精度を厳密解との比較によって検討するために、図-1に示す条件を設定する。これはトンネルの施工を次元問題として模擬したもので、図中の記号の意味は次の通りである。

$E_1$  : 地山の弾性を表現するバネの弾性係数

$E_2$  : 地山のクリープを表現するバネの弾性係数

$\eta_2$  : 地山のクリープを表現するダッシュポットの粘性係数

$\sigma_0$  : トンネル周辺地山の初期応力

$E_3$  : 支保を表現するバネの弾性係数

$\sigma_1$  : 支保が設置されるまでに解放される初期応力

図-1は次のような過程を表現している。

- ① 時刻  $t$  が  $0 \leq t < t_1$  のとき、Voigt-Spring 型の3要素モデルに  $\sigma_1$  の外力を作用させる。
- ②  $t = t_1$  のとき、3要素モデルに Spring を並列に付加する。
- ③  $t \geq t_1$  のとき、外力を  $\Delta\sigma (= \sigma_0 - \sigma_1)$  だけ追加して  $\sigma_0$  とする。

ここで、図-1の(a)の3要素モデルは地山に対応し、(b)で付加される Spring は支保に対応する。そして、これらの端部に作用する外力は掘削に伴う解放応力に対応すると考えることができる。すなわち、上記の過程は次のような施工過程に対応していると考えられる。

- ① 掘進長分の掘削が瞬時に終了し、初期応力  $\sigma_0$  のうち  $\sigma_1$  の応力が解放される。(この時刻を0とする。)
- ② 時刻  $t_1$  に支保が設置される。
- ③ 支保の設置と同時に、切羽の進行により残りの初期応力が瞬時に解放される。

以上のように、簡単な検討条件を設定しているが、軸対称条件が成立するトンネル問題が結局は次元問題と等価であることから、以下の検討結果は一般的なトンネル問題にも適用できると考えられる。

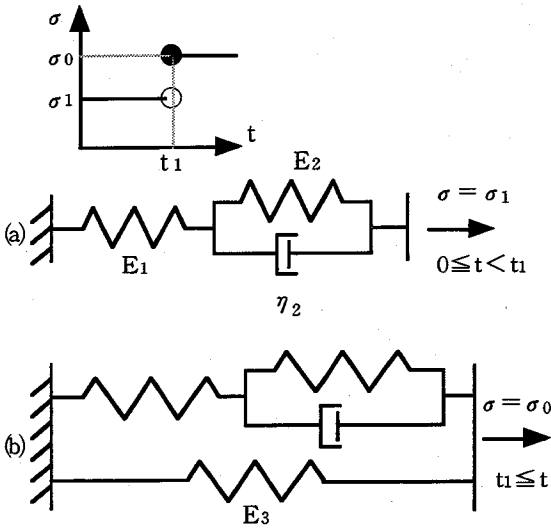


図-1 検討モデル

### 3. 設定条件下の厳密解

上記の設定条件の下で厳密解を導く。

$0 \leq t < t_1$  のとき式(1)と式(2)が成立する。

$$\epsilon_e(t) = \epsilon_{e1} = \sigma_1 / E_1 \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \eta_2 \cdot d\epsilon_c(t) / dt + E_2 \cdot \epsilon_c(t) \quad (2)$$

ここに、 $\epsilon_e(t)$  : 時刻  $t$  におけるバネ  $E_1$  のひずみ

$\epsilon_c(t)$  : 時刻  $t$  におけるバネ  $E_2$  のひずみ

$\epsilon_{e1}$  :  $\sigma_1$  によるバネ  $E_1$  のひずみ

バネ  $E_1$  のひずみは地山の弾性ひずみ、バネ  $E_2$  のひずみは地山のクリープひずみに対応する。

式(2)を  $t=0$  のとき  $\epsilon_c(t)=0$  という条件の下で解くと式(3)が得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon_c(t) &= \epsilon_{e1} \cdot \alpha \cdot \{1 - \exp(-t \cdot \beta)\} \\ &= (\sigma_1 / E_2) \cdot \{1 - \exp(-t \cdot \beta)\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\alpha = E_1 / E_2$      $\beta = E_2 / \eta_2$

式(3)に  $t=t_1$  を代入して得られる  $\epsilon_c(t_1)$  を  $\epsilon_{c1}$  とする。

$t_1 \leq t$  のとき、式(4)~(6)が成立する。

$$p(t) = E_3 \cdot \{\epsilon_e(t) + \epsilon_c(t) - \epsilon_{e1}\} \quad (4)$$

$$\sigma_0 - p(t) = E_1 \cdot \epsilon_e(t) \quad (5)$$

$$E_1 \cdot \epsilon_e(t) = \eta_2 \cdot d\epsilon_c(t) / dt + E_2 \cdot \epsilon_c(t) \quad (6)$$

ここに、 $\epsilon_1 = \epsilon_{e1} + \epsilon_{c1}$

$\epsilon_1$  : バネ  $E_3$  付加直前のバネ  $E_1$  と  $E_2$  のひずみの和 (支保設置直前の地山のひずみ)

$p(t)$  : 時刻  $t$  におけるバネ  $E_3$  の応力 (支保の応力)

式(4)と式(5)から式(7)が得られる。

$$\epsilon_e(t) = [\sigma_0 + E_3 \cdot \{\epsilon_1 - \epsilon_c(t)\}] / (E_1 + E_3) \quad (7)$$

次に、式(7)を式(6)に代入して得られる微分方程式を、 $t=t_1$  のとき  $\epsilon_c(t)=\epsilon_{c1}$  という条件の下で解くと、式(8)

が得られる。

$$\epsilon_c(t) = B - (B - \epsilon_{c1}) \cdot \exp\{-A \cdot (t - t_1)\} \quad (8)$$

ここに、

$$A = (E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_1) / \{(E_1 + E_3) \cdot \eta_2\}$$

$$B = E_1 \cdot (\sigma_0 + E_3 \cdot \epsilon_1) / (E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_1)$$

したがって、 $t_1 \leq t$  の時刻に対しては、まず、式(8)により地山のクリープひずみを求め、次に、この結果を式(7)に代入して地山の弾性ひずみを求め、さらに、これらの結果を式(4)に代入して支保の応力を求めることになる。

なお、地山のひずみは式(9)で与えられる。

$$\epsilon(t) = \epsilon_e(t) + \epsilon_c(t) \quad (9)$$

ただし、 $\epsilon_e(t)$  と  $\epsilon_c(t)$  は、 $0 \leq t < t_1$  のときは式(1)と式(3)、 $t_1 \leq t$  のときは式(7)と式(8)を使用する。

### 4. クリープひずみ等価節点力による近似を導入した解

#### (1) 近似解

クリープひずみ等価節点力による近似を導入した FEM 解析と同様の考え方と手順で上記の一次元問題を解くと以下ようになる。

$0 \leq t < t_1$  のとき、 $\epsilon_e(t)$  と  $\epsilon_c(t)$  は厳密解の場合と同じである。

$t_1 \leq t$  のとき、 $\Delta t = t - t_1$ 、 $\Delta \sigma = \sigma_0 - \sigma_1$  とすると、 $\Delta \sigma$  による地山の弾性ひずみ  $\Delta \epsilon_{e2}$  は式(10)で与えられる。

$$\Delta \epsilon_{e2} = \Delta \sigma / (E_1 + E_3) \quad (10)$$

支保による拘束がない場合、この  $\Delta \sigma$  に起因して生じる地山のクリープひずみ  $\Delta \epsilon_{c2}$  は式(11)で与えられる。

$$\Delta \epsilon_{c2} = \Delta \epsilon_{e2} \cdot \alpha \cdot \{1 - \exp(-\beta \cdot \Delta t)\} \quad (11)$$

また、同じく、支保による拘束がない場合、以前の  $\sigma_1$  に起因して生じるクリープひずみが、時刻  $t_1$  から時刻  $t$  までの  $\Delta t$  の間に式(12)で与えられる分だけ増加する。

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{c12} &= \epsilon_{e1} \cdot \alpha \cdot \{\exp(-t_1 \cdot \beta) - \exp(-t \cdot \beta)\} \\ &(\epsilon_{e1} \text{ は厳密解の場合と同じ}) \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、支保による拘束がない場合、 $\Delta t$  間のクリープひずみ増分  $\Delta \epsilon_c$  は式(13)で与えられる。

$$\Delta \epsilon_c = \Delta \epsilon_{e2} + \Delta \epsilon_{c12} \quad (13)$$

実際には支保が設置されるので、このクリープひずみ増分  $\Delta \epsilon_c$  を完全に阻止する状態を考えると、そのために必要な力  $\Delta S_c$  は式(14)で与えられる。

$$\Delta S_c = -E_1 \cdot \Delta \epsilon_c \quad (14)$$

$\Delta S_c$  と大きさが同じで向きが逆の力  $\Delta F_c$  がクリープひずみ等価節点力に相当する。

$$\Delta F_c = -\Delta S_c = E_1 \cdot \Delta \epsilon_c \quad (15)$$

クリープひずみ等価節点力による近似を導入する FEM 解析では弾性マトリックスにクリープの項を組み込むことはしていない。したがって、クリープひずみ等

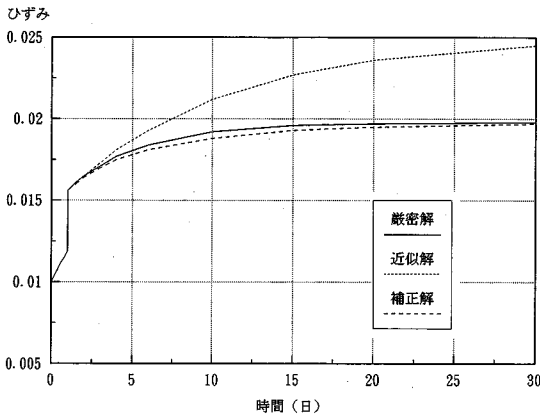


図-2 地山ひずみの経時変化

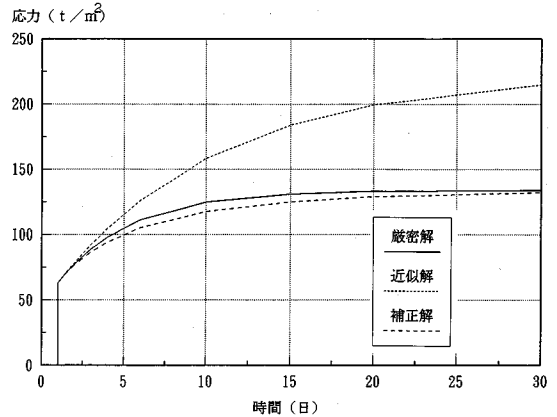


図-3 支保応力の経時変化

価節点力  $\Delta F_c$  はバネ  $E_1$  とバネ  $E_3$  で構成されるモデルに作用させることになり、これに起因して生じるクリープひずみ  $\Delta \varepsilon_{cd}$  は式(16)で与えられる。

$$\Delta \varepsilon_{cd} = \Delta F_c / (E_1 + E_3) = E_1 \cdot \Delta \varepsilon_c / (E_1 + E_3) \quad (16)$$

結局、 $t_1 \leq t$  のとき、式(17)～(19)が成立する。

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{e1} + \Delta \varepsilon_{e2} = \sigma_1 / E_1 + \Delta \sigma / (E_1 + E_3) \quad (17)$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c1} + \Delta \varepsilon_{cd} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= E_3 \cdot \{\varepsilon_e(t) + \varepsilon_c(t) - \varepsilon_1\} \\ &= E_3 \cdot (\Delta \varepsilon_{e2} + \Delta \varepsilon_{cd}) \end{aligned} \quad (19)$$

( $\varepsilon_{c1}$  と  $\varepsilon_1$  は厳密解の場合と同じ)

## (2) 近似解と厳密解との比較

次の条件の下で得られる近似解と厳密解を比較する。

$$E_1 = 10000 \text{ (tf/m}^2\text{)} \quad \alpha = E_1 / E_2 = 2$$

$$E_3 = 17000 \text{ (tf/m}^2\text{)} \quad \beta = E_2 / \eta_2 = 0.1 \text{ (1/day)}$$

$$\sigma_0 = 200 \text{ (tf/m}^2\text{)} \quad \sigma_1 = 100 \text{ (tf/m}^2\text{)} \quad t_1 = 1 \text{ (day)}$$

なお、 $E_3$  は次のような円形トンネルの吹付コンクリートを想定して算出した。

$$\text{地山の弾性係数} = E_1 = 10000 \text{ (tf/m}^2\text{)}$$

$$\text{地山のポアソン比} = 0.3$$

$$\text{吹付コンクリートの弾性係数} = 330000 \text{ (tf/m}^2\text{)}$$

$$\text{吹付厚} = 0.2 \text{ (m)} \quad \text{トンネルの半径} = 5 \text{ (m)}$$

図-2 に地山のひずみ (バネ  $E_1$  と  $E_2$  のひずみの和) の経時変化、図-3 に支保の応力 (バネ  $E_3$  の応力で、実際のトンネル問題における支保圧に対応するもの) の経時変化を示す。

支保設置 2～3 日後までは、地山のひずみと支保の応力のどちらも、近似解は厳密解と良く一致している。しかし、時間の経過とともに差が生じ大きくなっていく。しかも、最終的には支保の応力が初期応力を越えてしまう結果になる。これは作用させた外力よりも反力の方が大きくなっているということである。

したがって、クリープひずみ等価節点力による近似を

導入した FEM 解析において支保を考慮する場合には、このような非現実的な解を出力する可能性があることに留意する必要があると考えられる。

## 5. 近似解の補正

### (1) 補正解

クリープひずみ等価節点力は、式(13)で与えられるクリープひずみ増分  $\Delta \varepsilon_c$  を、完全に阻止するために必要な力と大きさが同じで向きが逆の力である。

上記の近似におけるクリープひずみ等価節点力は、阻止力を一瞬のうちに作用させ、それと同時に完全阻止状態になる場合を想定しているために、前述した式(15)で与えられることになる。

しかし、阻止力を極めてゆっくり作用させる場合を想定すると、最終的には、地山を表現する 3 要素モデルのダッシュポット  $\eta_2$  が存在しなくても同じ状態になるので、このときの地山の見かけの弾性係数は式(20)、クリープひずみ等価節点力は式(21)で与えられることになる。

$$E_{1d}(\infty) = E_1 / (1 + \alpha) \quad (20)$$

$$\Delta F_{cd}(\infty) = \Delta F_c / (1 + \alpha) \quad (21)$$

このようにクリープひずみ増分  $\Delta \varepsilon_c$  の阻止力の作用のさせ方によって、クリープひずみ等価節点力は地山の見かけの弾性係数に対応して変化する。

そこで、阻止力の作用時間はクリープの経過時間  $\Delta t$  と同じとし、さらに、クリープひずみも弾性ひずみと見なして、 $\Delta t$  間の地山の見かけの弾性係数を式(22)により算定する。

$$\begin{aligned} E_{1d}(\Delta t) &= E_1 \cdot \Delta \varepsilon_{e2} / (\Delta \varepsilon_{e2} + \Delta \varepsilon_{cd}) \\ &= E_1 / [1 + \alpha \{1 - \exp(-\beta \cdot \Delta t)\}] \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $E_{1d}(\Delta t)$ : 地山の見かけの弾性係数

( $\Delta \varepsilon_{e2}$  と  $\Delta \varepsilon_{cd}$  は近似解の場合と同じ)

ここで考慮するクリープひずみは支保による拘束がない

場合に  $\Delta\sigma$  の作用に起因して生じるものだけである。

そして、式(23)に示すように、 $\Delta\varepsilon_c$  にこの見かけの弾性係数を乗じてクリープひずみ等価節点力を算出し、これをバネ  $E_{1d}(\Delta t)$  とバネ  $E_3$  で構成されるモデルに作用させる。

$$\Delta F_{cd}(\Delta t) = E_{1d}(\Delta t) \cdot \Delta\varepsilon_c \quad (23)$$

したがって、補正解は式(24)～(26)で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{cdd} &= \Delta F_{cd}(\Delta t) / \{E_{1d}(\Delta t) + E_3\} \\ &= E_{1d}(\Delta t) \cdot \Delta\varepsilon_c / \{E_{1d}(\Delta t) + E_3\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c1} + \Delta\varepsilon_{cdd} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= E_3 \cdot \{\varepsilon_e(t) + \varepsilon_c(t) - \varepsilon_1\} \\ &= E_3 \cdot (\Delta\varepsilon_{e2} + \Delta\varepsilon_{cdd}) \end{aligned} \quad (26)$$

( $\varepsilon_e(t)$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\Delta\varepsilon_c$  は近似解の場合と同じ)

## (2) 補正解と厳密解との比較

厳密解や近似解と同じ条件の下で得られる補正解を図一2と図一3に示す。地山のひずみと支保の応力のどちらにおいても、そして、どの時刻においても、補正解は厳密解と良く一致している。上記の補正方法が有効であることが分かる。

したがって、FEMによる粘弾性解析の場合でも各解析ステップにおいて次の計算手順を採用することにより近似解の精度が向上すると考えられる。

- ① 支保による拘束がないと考えて、当ステップで生じるクリープひずみ増分  $\Delta\varepsilon_c$  を計算する。
- ② 当ステップで作用させた外力に起因して生じる弾性ひずみ  $\Delta\varepsilon_{ei}$  とクリープひずみ  $\Delta\varepsilon_{ci}$  から、式(27)により地山の見かけの弾性係数  $E_d$  を求める。

$$E_d = E \cdot \Delta\varepsilon_{ei} / (\Delta\varepsilon_{ei} + \Delta\varepsilon_{ci}) \quad (27)$$

そして、弾性マトリックスの弾性係数  $E$  を見かけの弾性係数  $E_d$  に変更する。

- ③  $\Delta\varepsilon_c$  と弾性マトリックスによりクリープひずみ等価

節点力  $\Delta F_c$  を算出する。

- ④  $\Delta F_c$  を解析モデルに作用させる。(解析モデルの弾性マトリックスは変更後のものを使用する。)

これらの中で、クリープひずみ等価節点力による近似を導入した従来のFEM粘弾性解析にはない作業は②だけであり、大きな労力を要するものではない。しかも、計算で使用する数値は従来の解析の中で得られるものばかりである。上記の補正方法を従来のFEM粘弾性解析プログラムに組み込むことは容易であると考えられる。

## 6. おわりに

本ノートでは、トンネルの施工を簡単に模擬し、厳密解が得られる条件の下で、FEM粘弾性解析によく導入されるクリープひずみ等価節点力による近似の精度について検討した。その結果、この近似が非現実的な解を出力する場合があることを明らかにした。そして、見かけの弾性係数による補正方法を提案し、これが近似解の精度の確保に極めて有効であることを示した。この補正方法を従来のFEM粘弾性解析に組み込むことは容易であると考えられる。

本ノートの作成に当たり、電力中央研究所の日比野敏参事には懇切丁寧なご指導を賜りました。厚くお礼申し上げます。

## 参考文献

- 1) 川本眺万, 林正夫: 地盤工学における有限要素解析, 培風館。
- 2) 林正夫, 日比野敏: 地下の開削に伴う周辺地盤の緩みの進展に関する解析, 電力中央研究所報告, No. 67095, 1968。

(1994.8.31 受付)

# COMPUTATION METHOD WITH NODAL LOAD EQUIVALENT TO CREEP STRAIN

Yutaka NASHIMOTO, Sadahiko TAKAMORI and Toru KONDA

In visco-elasticity analysis using FEM, approximation with nodal load equivalent to creep strain is often utilized. However, the propriety of the use of the aforementioned seems to be left out of consideration.

In this note, the accuracy of this approximation is examined through simulated tunnel construction by firstly obtaining precise solutions and then by comparing them with those obtained through approximation. The comparison proved that the use of approximation results in, in some case, impractical solutions.

A method for correcting this erroneous process is also proposed, which is confirmed to be effective for improving the level of accuracy of the solutions obtained.