

**投稿論文 (和文)**  
**PAPERS**

# 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究\* —降雨が時間的に独立な確率過程の場合—

藤田陸博<sup>1</sup>・工藤陸信<sup>2</sup>・中尾隆志<sup>3</sup>・橋本識秀<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

<sup>2</sup>正会員 日本国土開発(株)土木部施工指導部長

<sup>3</sup>正会員 北見工業大学土木工学科助手

<sup>4</sup>正会員 北海道開発局石狩川開発建設部部長

降雨量が時間的に独立な確率過程として与えられるとき、貯留型流出モデルを用いて流出量の1~4次モーメントを求める理論式を求め、理論式の適用限界について検討した。また、流出量の1~4次モーメントが得られるので流出量の確率密度関数の推定が可能である。定常・非定常な降雨量ともにその確率密度関数はガンマ分布ないし対数正規分布で近似できることが分かった。

**Key Words** : storage function model, stochastic differential equation, stochastic response

## 1. はじめに

降雨量は流域変換系を介して、流量に変換される。厳密に言うならば、流域変換系の特性は空間的にも時間的にも変化しており、流出系への入力である降雨量をも含めてその変動特性は決定論的な関数よりは、むしろ確率過程で記述される。

このような観点からみると、流出系を記述している微分方程式は確率微分方程式として解釈されるべきである<sup>1)</sup>。このような確率微分方程式は次のように分類される。

- (1) 強制項が確率過程
- (2) 微分方程式の係数が確率過程
- (3) 初期条件が確率過程

流出系を対象とするとき、強制項は流出系の入力である降雨量に相当している。したがって、(1)を考えるのは当然であろう。(2)は、分布型の流出モデルを想定すると理解し易い。周知のように分布型の流出モデルでは流域を数多くのサブ流域に分割し、サブ流域からの流出量を合成して全流域からの流出量を推定している。一般に、各サブ流域の面積や勾配その他の流出に関係する要素は互いに異なっており、その流出モデルに含まれるパラメータが、サブ流域ごとに異なることになる。これらのパラメータを記述する確率密度関数が与えられると(2)の分類に相当する。(3)としては、初期条件

\* 本論文の内容の一部は既発表<sup>3),4)</sup>であるが、本編はその後の研究成果を加えて取りまとめたものである。

としての流域の湿潤度などがこれに相当している。

本研究では、本邦で広く用いられている貯留関数法を用いて上述の(1)の場合について、流出量の確率応答について考察したものである。すなわち、既知の確率特性を有する外乱の作用を受ける動力学系の応答の確率分布を求める問題に相当している。任意の確率過程についてこのような問題を解くことは、一般に非常に難しい。確率過程がMarkov過程であるならばFokker-Planck方程式によって解が与えられるが、基礎式が非線形になると非常に難しい。上述の(1)の場合について、貯留型流出モデルを対象にした流出量の確率応答に関しては、高棹らが<sup>2)</sup>降雨量を確率過程として各種の貯留関数法を評価している。理論的な取扱いとしては、藤田ら<sup>3),4)</sup>によって降雨量が定常で独立な確率過程の場合について、流出量の1~4次モーメントを理論的に求める手法が提案されている。本研究では降雨量が非定常(本論文では、1~4次モーメントのいずれかが時間的に変化する場合を非定常と定義している)で時間的に独立な確率過程である場合まで理論を拡張するとともに、理論式の適用限界について検討したものである。

## 2. 線形流出系

最も簡単な貯留関数法は、次式で表される。

$$\frac{dS}{dt} + q = r \quad (1)$$

$$S = Kq^p \quad (2)$$

S:貯留量 r:有効降雨量 q:直接流出量

K:貯留係数 P:貯留指数

いま、式(1)において降雨量  $r(t)$  が確率過程の場合、流出量  $q(t)$  もまた確率過程となる。ここでは、降雨量として次のような統計量をもつ時間的に独立で定常な確率過程を考える。

$$r = \bar{r} + \bar{r} \quad (3)$$

$$E\{r\} = \bar{r} \quad (4)$$

$$E\{\bar{r}\} = 0 \quad (5)$$

$$E\{\bar{r}(\tau_1)\bar{r}(\tau_2)\} = \sigma_r^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (6)$$

$$E\{\bar{r}^2\} = \mu_{r2} \quad (7)$$

$$E\{\bar{r}^4\} = \mu_{r4} \quad (8)$$

$\delta$ :デルタ関数  $\sigma_r^2$ :rの分散

また、貯留量 S, 流出量 q に関しても式(3)と同様に平均値と平均値からの偏差に分けて考える。

$$S = \bar{S} + \bar{S} \quad E\{\bar{S}\} = 0 \quad (9)$$

$$q = \bar{q} + \bar{q} \quad E\{\bar{q}\} = 0 \quad (10)$$

式(2)において  $P=1$  のとき基礎式は線形になるので、容易に解が求められる。

$$q = e^{-\frac{t}{K}} \int_0^t \frac{r(\tau)}{K} e^{\frac{\tau}{K}} d\tau \quad (11)$$

式(3), (10)を考慮すると q の平均値とその偏差は、次のようになる。

$$\bar{q} = e^{-\frac{t}{K}} \int_0^t \frac{\bar{r}(\tau)}{K} e^{\frac{\tau}{K}} d\tau \quad (12)$$

$$\bar{q} = e^{-\frac{t}{K}} \int_0^t \frac{\bar{r}(\tau)}{K} e^{\frac{\tau}{K}} d\tau \quad (13)$$

さらに、式(6)~(8)を考慮して式(13)の  $\bar{q}$  を2~4乗して、その期待値をとると  $\bar{q}$  の2~4次モーメントが得られる。これらのモーメントは、次の微分方程式を満足している。

$$\frac{d\bar{q}}{dt} + \frac{1}{K}\bar{q} = \frac{1}{K}\bar{r} \quad (14)$$

$$\frac{d\sigma_q^2}{dt} + \frac{2}{K}\sigma_q^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 C\sigma_r^2 \quad (15)$$

$$\frac{d\mu_{q3}}{dt} + \frac{3}{K}\mu_{q3} = \left(\frac{1}{K}\right)^3 C^2\mu_{r3} \quad (16)$$

$$\frac{d\mu_{q4}}{dt} + \frac{4}{K}\mu_{q4} = \frac{C^3}{K^4}(\mu_{r4} - 3\sigma_r^4) + \frac{6}{K^2}\sigma_q^2 C\sigma_r^2 \quad (17)$$

$\sigma_q^2$ ,  $\mu_{q3}$ ,  $\mu_{q4}$  は、q の分散、3, 4次モーメントを表している。また、式(15)~(17)に含まれている C は時間の次元をもつ係数で、デルタ関数の積分から生じている。式(15)~(17)の両辺の次元を揃えるために係数 C を定義する必要がある。

### 3. 非線形流出系

$P \neq 1$  のとき式(2)の  $q^P$  がネックとなり、式(11)のように q を求めることができない。式(1), (2)より q を消去すると、次式を得る。

$$\frac{dS}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m S^m = r, \quad m = \frac{1}{P} \quad (18)$$

べき乗型の確率変数  $S^m$  を次式で近似する。

$$S^m = \alpha \bar{S} + \beta \bar{S} \quad (19)$$

Bras and Georgakakos ら<sup>5)</sup>は、式(19)の両辺の誤差の平均値を0, 2乗平均値を最小にする  $\alpha$ ,  $\beta$  として次式を与えている。

$$\alpha = \bar{S}^{m-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\bar{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\bar{S}^3)}{\bar{S}^3} + \dots \right\} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\bar{S}^{m+1}}{E(\bar{S}^2)} \left\{ m\frac{E(\bar{S}^2)}{\bar{S}^2} + \frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\bar{S}^3)}{\bar{S}^3} + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\bar{S}^4)}{\bar{S}^4} + \dots \right\} \quad (21)$$

式(9), (19)を式(18)に代入して、次式を得る。

$$\frac{d(\bar{S} + \bar{S})}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m (\alpha \bar{S} + \beta \bar{S}) = \bar{r} + \bar{r} \quad (22)$$

両辺の期待値をとると

$$\frac{d\bar{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} = \bar{r} \quad (23)$$

式(22), (23)より次式を得る。

$$\frac{d\bar{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \bar{S} = \bar{r} \quad (24)$$

式(23)が貯留量の平均値を与える基本式になっている。

式(24)において  $\beta \sim \bar{S}$  の関係は、式(21)に示されているように期待値の演算子  $E(\ )$  を介して結ばれている。したがって、 $\beta \sim \bar{S}$  の従属性は極めて弱いものと仮定できる。この仮定のもとに式(24)を解いて次式を得る。

$$\bar{S} = e^{-\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta dt} \int_0^t \bar{r}(\tau_1) e^{\int \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta d\tau_2} d\tau_1 \quad (25)$$

式(6)~(8)を考慮して式(25)を2~4乗して期待値をとることにより貯留量の2~4次モーメントに関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \sigma_s^2 = C\sigma_r^2 \quad (26)$$

$$\frac{d\mu_{s3}}{dt} + 3\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \mu_{s3} = C^2\mu_{r3} \quad (27)$$

$$\frac{d\mu_{s4}}{dt} + 4\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \mu_{s4} = C^3(\mu_{r4} - 3\sigma_r^4) + 6\sigma_s^2 C\sigma_r^2 \quad (28)$$

$\sigma_s^2$ ,  $\mu_{s3}$ ,  $\mu_{s4}$  は、それぞれ  $\bar{S}$  の2~4次モーメントを示

している。流出量のモーメントに関しては、式(2)、(19)より

$$\bar{q} + \bar{q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m (\alpha \bar{S} + \beta \bar{S}) \quad (29)$$

期待値をとると

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} \quad (30)$$

式(29)、(30)より

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \bar{S} \quad (31)$$

式(31)を2~4乗して期待値をとることにより貯留量のモーメントを流出量のモーメントに置換できる。

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \beta^2 \sigma_s^2 \quad (32)$$

$$\mu_{q3} = \left(\frac{1}{K}\right)^{3m} \beta^3 \mu_{s3} \quad (33)$$

$$\mu_{q4} = \left(\frac{1}{K}\right)^{4m} \beta^4 \mu_{s4} \quad (34)$$

式(23)、(26)~(28)を連立微分方程式として解いて、式(30)、(32)~(34)を用いると流出量の1~4次モーメントが得られる。 $m=1$ のとき式(20)、(21)より

$$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad (35)$$

となるので、次式が得られる。

$$\bar{S} = K\bar{q} \quad \sigma_s^2 = K^2 \sigma_q^2 \quad (36)$$

$$\mu_{s3} = K^3 \mu_{q3} \quad \mu_{s4} = K^4 \mu_{q4} \quad (37)$$

これらの結果を式(23)、(26)~(28)に代入すると、式(14)~(17)に一致することを付記しておく。

式(23)、(26)~(28)において $\bar{r}$ 、 $\sigma_r^2$ 、 $\mu_{r3}$ 、 $\mu_{r4}$ を一定値とすると、定常状態における流出量の1~4次モーメントは次式で与えられる。ただし、 $\alpha$ 、 $\beta$ の値としては、式(20)、(21)の第1項のみを採用している。

$$\bar{q} = \bar{r} \quad (38)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m}{K} \bar{r}^{\frac{m-1}{m}} \right\} C \sigma_r^2 \quad (39)$$

$$\mu_{q3} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{m}{K} \bar{r}^{\frac{m-1}{m}} \right\}^2 C^2 \mu_{r3} \quad (40)$$

$$\mu_{q4} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{m}{K} \bar{r}^{\frac{m-1}{m}} \right\}^3 C^3 (\mu_{r4} - 3\sigma_r^4) + \frac{3}{4} \left\{ \frac{m}{K} \bar{r}^{\frac{m-1}{m}} \right\}^2 C^2 \sigma_r^4 \quad (41)$$

式(38)は当然成立しているとしても、 $m \neq 1$ の場合、流出量の2~4次モーメントに降雨量の2~4次モーメントやモデルパラメータの他に降雨量の平均値が関与していることが特徴的である。

ここでは、一度貯留量の1~4次モーメントを求めて、これを流出量のモーメントに置換する手法を採用している。このような間接的な手法を採用したのは、次のような理由による。式(1)、(2)より貯留量を消去して

$$K \frac{dq^p}{dt} + q = r \quad (42)$$

$q^p$ の項に式(19)と同様な式を適用すると、次式が得

られる。

$$K \frac{d(\alpha \bar{q} + \beta \bar{q})}{dt} + \bar{q} + \bar{q} = \bar{r} + \bar{r} \quad (43)$$

式(43)の期待値をとると

$$K \frac{d(\alpha \bar{q})}{dt} + \bar{q} = \bar{r} \quad (44)$$

式(43)、(44)より

$$K \frac{d(\beta \bar{q})}{dt} + \bar{q} = \bar{r} \quad (45)$$

$\alpha$ 、 $\beta$ は式(20)、(21)に示すように未知数である $\bar{q}$ 、 $\sigma_q^2$ などの関数になっている。したがって、 $\frac{d\alpha}{dt}$ 、 $\frac{d\beta}{dt}$ などの項があらわれ、計算が非常に複雑になる。これについては、第8節のまとめで触れる。

#### 4. 降雨量が離散的な定常確率過程の場合

実測降雨量は、離散的な量で与えられる。一方、前章までは降雨量を連続的な確率過程として取り扱っている。離散的な降雨量は、次式によって連続的な降雨量より変換される。

$$R(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t r(\tau) d\tau \quad (46)$$

大文字の $R$ (添え字も含む)は、離散的な降雨量あるいはこれに関係する諸量を示す。当然、 $r(t)$ と $R(t)$ の統計量は異なることになる。 $r(t)$ の統計量としては、式(4)~(8)を用い、式(46)を1~4乗して期待値をとることにより、 $R(t)$ の統計量を得ることができる。

$$E\{R(t)\} = \bar{r} \quad (47)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{C \sigma_r^2}{\Delta t} \quad (48)$$

$$\mu_{R3} = \frac{C^2 \mu_{r3}}{\Delta t^2} \quad (49)$$

$$\mu_{R4} = \frac{C^3 (\mu_{r4} - 3\sigma_r^4)}{\Delta t^3} + \frac{3C^2 \sigma_r^4}{\Delta t^2} \quad (50)$$

一方、前章で得られた式(26)~(28)は、式(24)において $\beta$ と $\bar{S}$ が独立との仮定のもとに得られたものである。この仮定をシミュレーション法で吟味しようとすると、降雨量を離散的な確率過程で定義する必要がある。シミュレーション法では、式(1)の $r(t)$ に確率過程を与え $q(t)$ を数値計算により求め、時刻 $t$ ごとに $q(t)$ の1~4次モーメントを求める。すなわち、降雨量は離散的な量として与えられるので、シミュレーション法を介して連続的な確率過程と離散的な確率過程の関係および上述の $\beta$ と $\bar{S}$ が独立の仮定を検討できる。

次に、降雨量にどのような確率過程を採用すべきかが問題となる。図-1は夕張山地における観測降雨量の分布を示している。時間単位が1時間以内の降雨量が指数分布で近似できることがわかる。ここでは、 $\bar{R}$ の分布

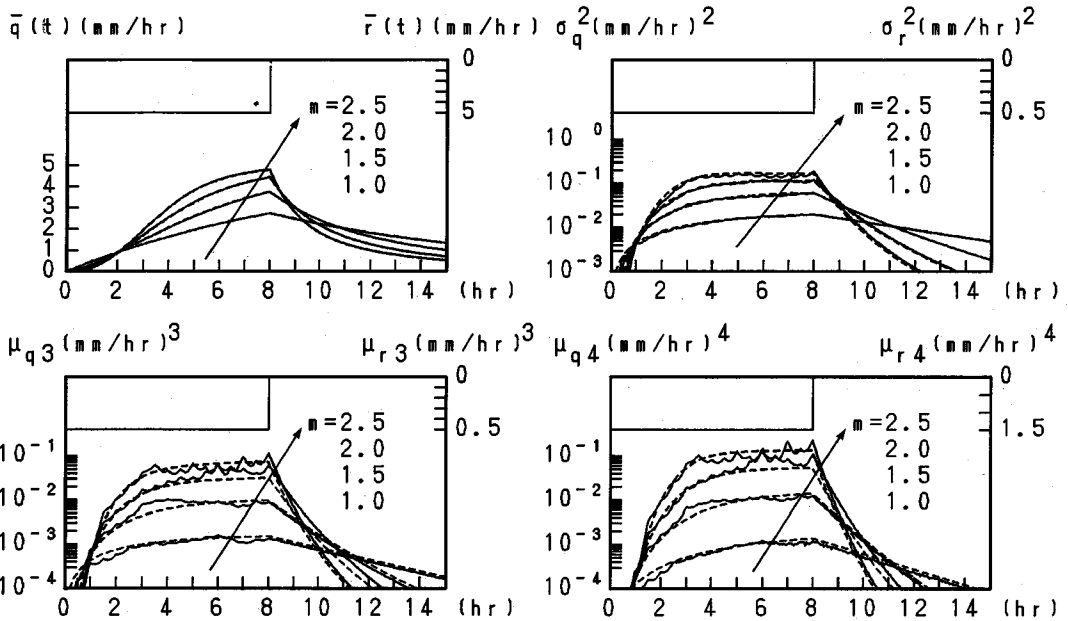


図-2 理論値とシミュレーション値の比較 (降雨量: 1~4次モーメント定常)

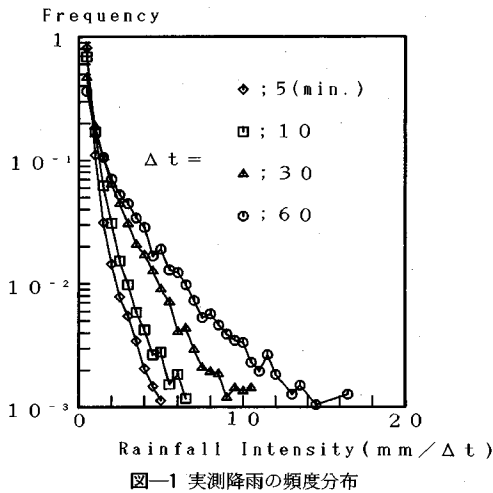


図-1 実測降雨の頻度分布

として次の指数分布を用いた計算例を示す。

$$f(\bar{R}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\bar{R} + \frac{1}{\lambda})} & \bar{R} \geq -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (51)$$

$\bar{R}$  の統計量は次のように与えられる。

$$E\{\bar{R}\} = 0 \quad \sigma_{\bar{R}}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (52)$$

$$\mu_{R3} = 2\sigma_{\bar{R}}^3 \quad \mu_{R4} = 9\sigma_{\bar{R}}^4 \quad (53)$$

式 (52), (53) を式 (48)~(50) に代入すると連続的な確率過程である  $r(t)$  の 2~4 次モーメントを得ることができる。

$$\sigma_r^2 = \frac{\Delta t}{C\lambda^2} \quad (54)$$

$$\mu_{r3} = \frac{2\Delta t^2}{C^2\lambda^3} \quad (55)$$

$$\mu_{r4} = \frac{3\Delta t^2}{C^3\lambda^4}(2\Delta t + C) \quad (56)$$

したがって、離散的な確率過程である  $R(t)$  が指数分布にしたがっているとしても連続的な確率過程  $r(t)$  は指数分布とはならない。

図-2 の実線は、次の条件でシミュレーションによって求めた流出量の 1~4 次モーメントを示している。

$$E\{R(t)\} = \begin{cases} 5(\text{mm}) & 0 \leq t \leq 20(\text{hr}) \\ 0 & t > 20(\text{hr}) \end{cases}$$

$$K=10, \lambda=1(\text{hr}/\text{mm}), \Delta t=0.5(\text{hr}) \quad (57)$$

また、図の破線は式 (54)~(56) を用いた理論解を示している。実線と破線の値はよく一致していると思われる。

## 5. 降雨量が非定常な確率過程の場合

実際の降雨を定常時系列と仮定することは、必ずしも実降雨の特性を反映していない。降雨量の非定常性を記述するために、次のようなモデルを用いる。

$$R(t) = \xi(t)G(t) + \phi(t) \quad (58)$$

$$t = i\Delta t$$

$\xi(t)$ ,  $\phi(t)$  は決定論的関数で、 $G(t)$  は次式を満たす定常な確率関数である。

$$E\{G\}=0 \quad (59)$$

$$E\{G(\tau_1)G(\tau_2)\}=\sigma_G^2\delta(\tau_1-\tau_2) \quad (60)$$

$$E\{G^3\}=\mu_{G3} \quad (61)$$

$$E\{G^4\}=\mu_{G4} \quad (62)$$

ここに、 $\sigma_G^2$ ,  $\mu_{G3}$ ,  $\mu_{G4}$  は定常な確率関数  $G$  の 2~4 次モーメントを示している。式 (58) は地震波などの非定常性を記述するのによく用いられているモデルである。離散的な  $R(t)$  の統計量は次式で与えられる。

$$E\{R(t)\}=\phi(t) \quad (63)$$

$$\sigma_R^2(t)=\xi^2(t)\sigma_G^2 \quad (64)$$

$$\mu_{R3}(t)=\xi^3(t)\mu_{G3} \quad (65)$$

$$\mu_{R4}(t)=\xi^4(t)\mu_{G4} \quad (66)$$

一方、連続的な確率関数  $r(t)$  も式 (58) と同様なモデルで記述されるものとする。

$$r(t)=\zeta(t)N(t)+\eta(t) \quad (67)$$

$\zeta(t)$ ,  $\eta(t)$  は決定論的関数で、 $N(t)$  は  $G(t)$  と同様な定常で独立な確率関数とする。

$$E\{N\}=0 \quad (68)$$

$$E\{N^2\}=\sigma_N^2 \quad (69)$$

$$E\{N^3\}=\mu_{N3} \quad (70)$$

$$E\{N^4\}=\mu_{N4} \quad (71)$$

したがって、 $r(t)$  の統計量は次式のようになる。

$$E\{r(t)\}=\eta(t) \quad (72)$$

$$\sigma_r^2=\zeta^2(t)\sigma_N^2 \quad (73)$$

$$\mu_{r3}=\zeta^3(t)\mu_{N3} \quad (74)$$

$$\mu_{r4}=\zeta^4(t)\mu_{N4} \quad (75)$$

式 (46) の関係式を用いると、次式が得られる。

$$E\{R(t)\}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^t \eta(\tau)d\tau \quad (76)$$

$$\sigma_R^2(t)=\frac{C\sigma_N^2}{\Delta t^2}\int_{t-\Delta t}^t \zeta^2(\tau)d\tau \quad (77)$$

$$\mu_{R3}(t)=\frac{C^2\mu_{N3}}{\Delta t^3}\int_{t-\Delta t}^t \zeta^3(\tau)d\tau \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \mu_{R4}(t) &= \frac{C^3(\mu_{N4}-3\sigma_N^4)}{\Delta t^4}\int_{t-\Delta t}^t \zeta^4(\tau)d\tau \\ &+ \frac{3C^2\sigma_N^4}{\Delta t^4}\left\{\int_{t-\Delta t}^t \zeta^2(\tau)d\tau\right\}^2 \end{aligned} \quad (79)$$

$$t=i\Delta t$$

確率関数  $r(t)$  の統計量を求めるには、式 (72)~(75) の  $\sigma_N^2$ ,  $\mu_{N3}$ ,  $\mu_{N4}$  と関数  $\eta(t)$  と  $\zeta(t)$  を定めなければならない。これらの値を定める条件式は、式 (76)~(79) の 4 本の式だけである。他の条件としては、時間が  $t=i\Delta t$  で定義される離散的な値しかとれないことである。したがって、 $r(t)$  の統計量を定めることができない。ここでは、定常な確率過程の場合に得られた式 (47)~

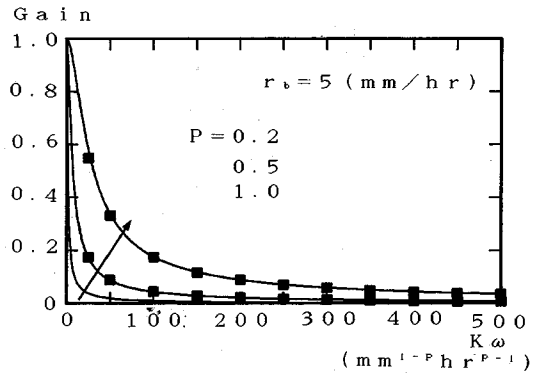


図-3 ゲインと周波数の関係

(50) が区間  $(i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t$  ごとに成立していると仮定する。式 (63)~(66) より  $r(t)$ ,  $\sigma_r^2(t)$ ,  $\mu_{r3}(t)$ ,  $\mu_{r4}(t)$  が得られるので、これらを用いて式 (23), (26)~(28) を解くことができる。

次に  $\Delta t$  の大きさがどの程度まで上述の仮定を満足するかという問題が生ずる。この問題に対する明確な回答を用意することは困難であるが、ある  $\Delta t$  の値を採用することによって生じる降雨情報の損失を推定できる<sup>6)</sup>。

式 (2) において  $P=1$  とするとき、基礎式は定係数の線形微分方程式になるのでゲイン ( $G_N$ ) と周波数 ( $\omega$ ) の関係を容易に誘導できる。

$$G_N = \frac{1}{\sqrt{1+(K\omega)^2}} \quad (80)$$

$P \neq 1$  のときには、理論的には  $G_N \sim \omega$  の関係を誘導できないが次の近似式を得ることができる。

$$G_N = \frac{1}{\sqrt{1+(KPr_b^{P-1}\omega)^2}} \quad (81)$$

$r_b$ : 平均降雨量 (式 (82) を参照)

式 (80) と比較すると平均降雨量  $r_b$  もゲインに関係している。また、 $P=1$  とすると式 (80) に一致する結果が得られる。次に、近似式 (81) の精度を確認しておく。式 (1) の  $r(t)$  に次式を仮定し

$$r(t)=r_a \sin(\omega t)+r_b \quad r_a \geq r_b \quad (82)$$

式 (1), (2) を数値的に解いて、十分な時間経過の後の流出量として次式を仮定する。

$$q(t)=q_a \sin(\omega t)+q_b \quad (83)$$

式 (83) では位相を省略している。ゲインは次式で与えられることになる。

$$G_N = \frac{q_a}{r_a} \quad (84)$$

図-3 の実線は式 (81) を示し、■印は式 (84) をプロットしたものである。式 (81) が十分な精度で  $G_N \sim \omega$  の関係を説明している。

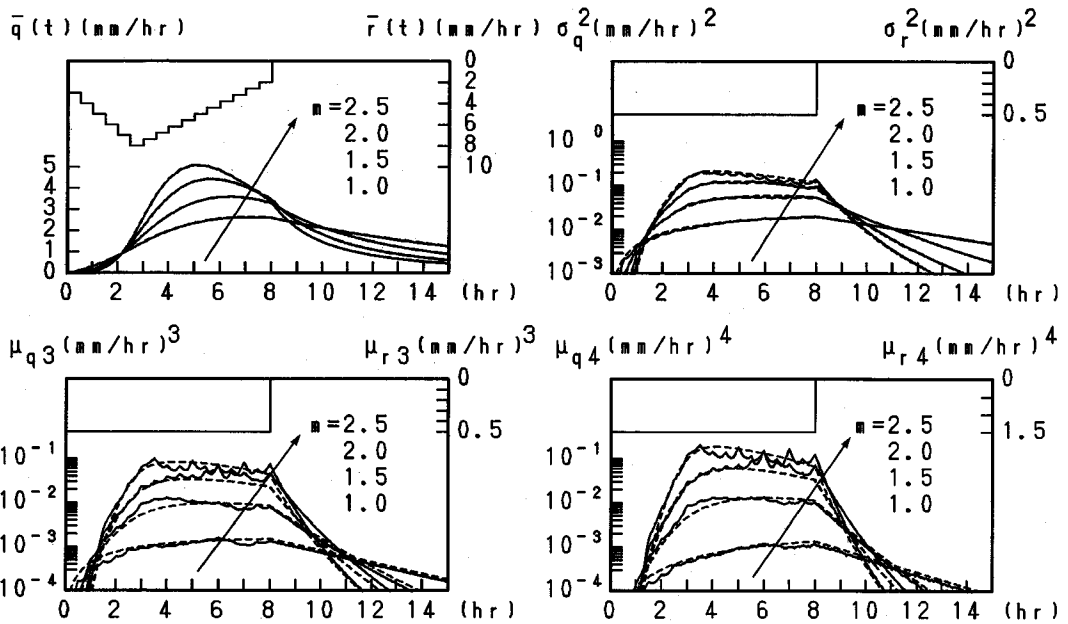


図-5 理論値とシミュレーション値の比較 (降雨量:1次モーメント非定常, 2~4次モーメント定常)

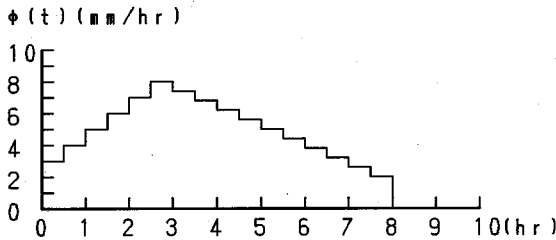


図-4 式(58)の関数  $\phi(t)$

$\Delta t$  が与えられると周期が  $2\Delta t$  までの降雨成分を考慮していることになるので、これに対応する周波数は次式で与えられ

$$\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (85)$$

式(81)からこの  $\omega$  に対応するゲイン  $G_N$  を計算できる。したがって、基本式(1),(2)が周期  $2\Delta t$  の降雨成分の振幅のどの程度までを表現しているかを推定できる。逆に、限界のゲインを定めると、これに対応する  $\Delta t$  を得ることができる。式(81)によると  $P$  の値が小さくなるにともない同一の  $G_N$  を得るためには、 $\Delta t$  を小さくする必要のあることを示している。

次に、シミュレーションと理論式の結果を比較してみよう。式(58)の関数  $\phi(t)$  に図-4に示すようなステップ関数の波形を与える。これは、離散的な降雨量の平均値になっている。次に、定常不規則関数  $G(t)$  として式(52),(53)と同様な指数乱数を与える。他の計算条件を、式(86)に示す。

$$k=10, \lambda=1(\text{hr/mm}), \Delta t=0.5(\text{hr}), \xi(t)=1 \quad (86)$$

図-5の実線はシミュレーション法によって得られた流出量の1~4次モーメントを示している。また、破線は式(23),(26)~(28)を用いた理論解である。両者はよく一致している。

図-5の計算は、降雨量の1次モーメントのみが非定常で、2~4次モーメントは定常である。降雨量の変動係数  $C_v$  は次式のようになるので

$$C_v = \frac{1}{\phi(t)\lambda} \quad (87)$$

したがって、降雨量のピーク時刻で最小値をとり、降雨量が減少すると  $C_v$  が増加することになる。降雨量の変動係数を観測精度の目安と考えると、降雨量が増大するにともない精度が向上し、小降雨では精度が劣ることになる。次に  $C_v$  が一定とした計算例を示す。式(63),(64)より  $C_v$  を一定にする関数  $\xi(t)$  を定めることができる。

$$\xi(t) = \frac{C_v \phi(t)}{\sigma_G} \quad (88)$$

式(88)の計算条件を用いて、 $C_v=0.1$ とした計算結果を図-6に示す。この場合も、シミュレーションの結果(実線)と理論解(破線)はよく一致している。

## 6. 流出量の分布形

流出量の1~4次モーメントが得られているので、基準化された3,4次モーメントを用いて近似的に確率密度関数を推定できる。

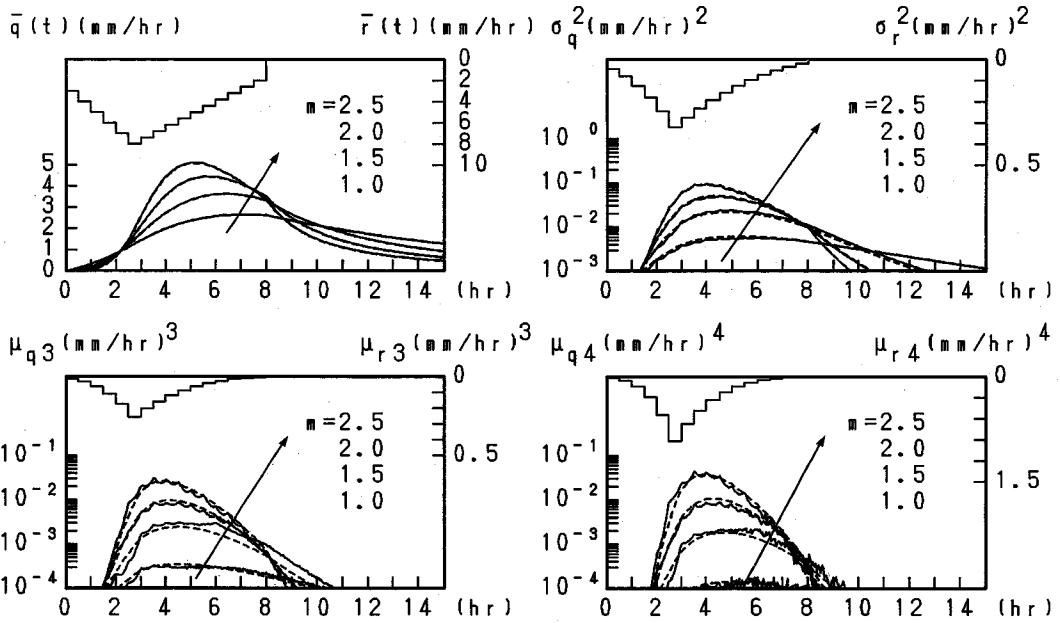


図-6 理論値とシミュレーション値の比較 (降雨量: 1~4次モーメント非常常)

$$\sqrt{\zeta_1} = \frac{\mu_{q3}}{\sigma_q^{3/2}} \quad \zeta_2 = \frac{\mu_{q4}}{\sigma_q^4} \quad (89)$$

離散的な降雨量が指数分布にしたがうものとして、式(39)~(41)の定常状態における流出量の2~4次モーメントを用いて  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  を計算できる。

$$\zeta_1 = \frac{32\Delta t}{9} \left\{ \frac{m}{K\bar{r}} \right\}^{(m-1)/m} \quad (90)$$

$$\zeta_2 = 6\Delta t \left\{ \frac{m}{K\bar{r}} \right\}^{(m-1)/m} + 3 \quad (91)$$

したがって、 $\zeta_1 \sim \zeta_2$  関係として次式を得る。

$$\zeta_2 = \frac{27}{16} \zeta_1 + 3 \quad (92)$$

一方、ガンマ分布の場合  $\zeta_1 \sim \zeta_2$  関係は、式(93)で与えられる。

$$\zeta_2 = 1.5\zeta_1 + 3 \quad (93)$$

また、対数正規分布の分布の場合、 $0 \leq \zeta_1 \leq 3.6$  の範囲で  $\zeta_1 \sim \zeta_2$  を近似的に次式で表すことができる。

$$\zeta_2 = 1.743\zeta_1 + 3 \quad (94)$$

したがって、式(92)は定常状態における流出量の確率密度関数が  $K$ ,  $m$ ,  $\bar{r}$ ,  $\Delta t$  の値にかかわらずガンマ分布と対数正規分布の中間の分布形状をしていることを示している。

図-7は、 $m=1.0, 2.5$  の場合について図-2, 5, 6の理論値を用いた  $\zeta_1 \sim \zeta_2$  関係を示している<sup>7)</sup>。図中の○, □印は時間経過を示している。図-7(A)は、図-2の降雨量の1~4次モーメントが定常の場合を示している。図-2によると  $m=1$  のとき流出量は定常に達して

いない。 $m=2.5$  のときは、流出量が十分に定常に達している。この差異が、(A)に表れており、流出量の過渡応答の期間はその分布がガンマ分布で近似できるが、定常応答になると対数正規分布に近くなる。図-7(B)は、図-5の降雨量の1次モーメントだけが非常常で、2~4次モーメントが定常の場合を示している。この場合は流出量の1~4次モーメントに関して完全な定常状態が生起しないが、図-5によると  $m$  の値の増加にともない流出量の2~4次モーメントが、定常に近い状態が認められる。したがって、図-7(B)も(A)と同様な分布形を示している。図-7(C)は、図-6の降雨量の1~4次モーメントが非常常の場合を示している。流出の全期間にわたって、流出量がガンマ分布で近似できることがわかる。

## 7. 式(19)の検討

式(23), (26)~(28)は、式(19)の近似式を用いて誘導されたものである。したがって、式(19)の精度が理論解の精度に影響するはずである。式(19)の誤差は次式のように表される。

$$\Delta = S^m - (\alpha\bar{S} + \beta\bar{S}) \quad (95)$$

係数  $\alpha$ ,  $\beta$  は、 $\Delta$  の平均値を0、分散を最小にするように定められている。 $\Delta$  の最小な分散は次のようになる。

$$E\{\Delta^2\}_{\min} = E\{S^{2m}\} - E^2\{S^m\} - \frac{E^2\{\bar{S}S^m\}}{\sigma_s^2} \quad (96)$$



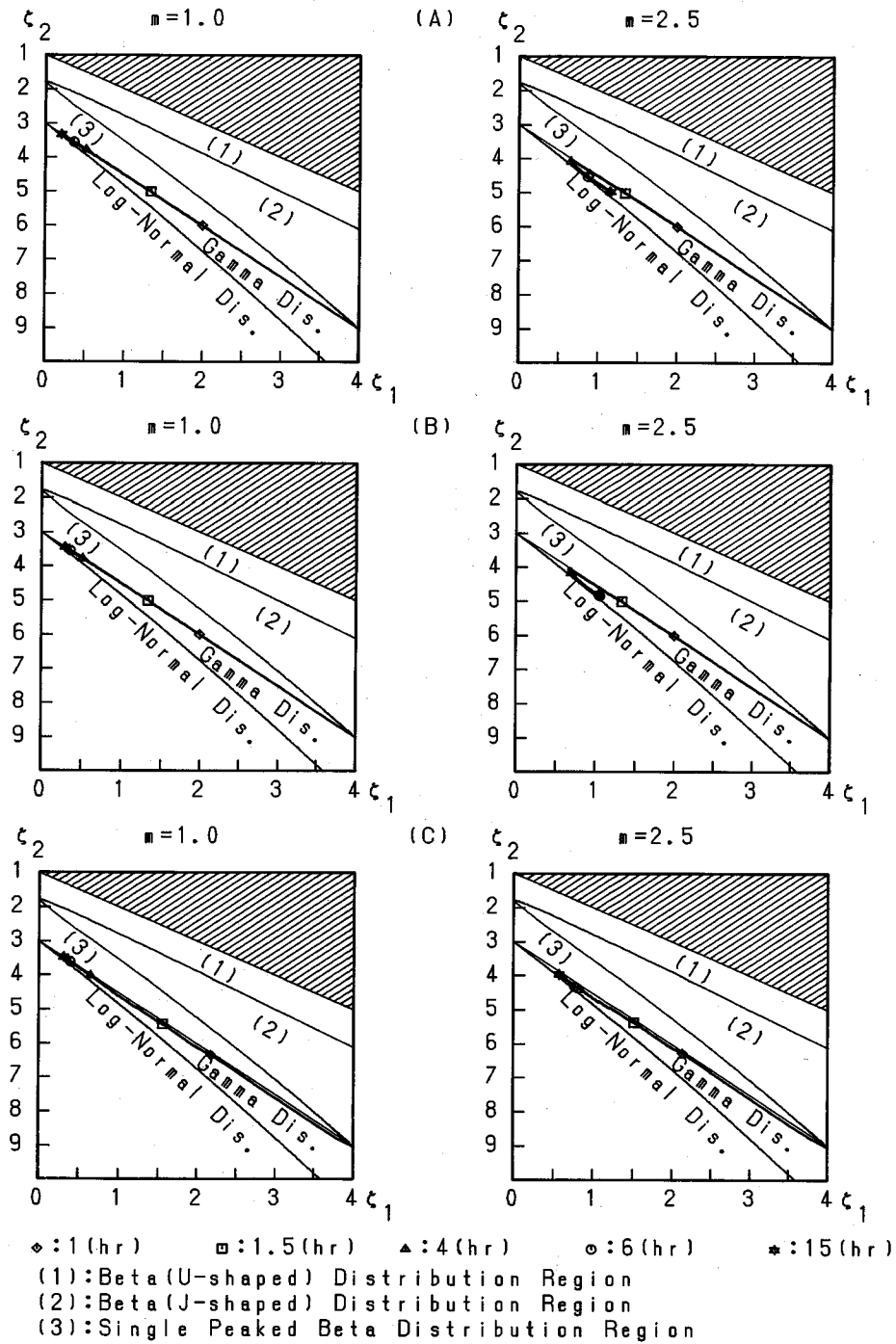


図-7 流出量の分布形

- (A): 図-2の理論値を使用 ((降雨量: 1~4次モーメント定常)
- (B): 図-5の理論値を使用 (降雨量: 1次モーメント非定常, 2~4次モーメント定常)
- (C): 図-6の理論値を使用 (降雨量: 1~4次モーメント非定常)

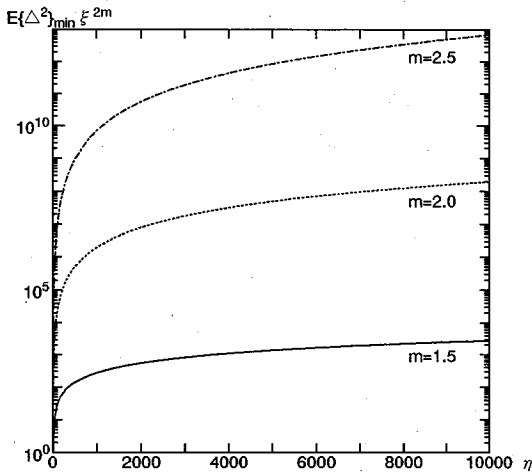


図-8 Bras の式の誤差

したがって、 $E\{\Delta^2\}_{\min}$  の大小によって近似の程度を評価できる。 $m=1$  のときは、 $E\{\Delta^2\}_{\min}=0$  となる。降雨量が定常な確率過程の場合、貯留量も流出量と同様にガンマ分布で近似できる。

$$f(S) = \begin{cases} \frac{\xi^n}{\Gamma(\eta)} S^{n-1} e^{-\xi S} & S \geq 0 \\ 0 & S < 0 \end{cases} \quad (97)$$

式 (97) を用いると式 (96) を計算することができる。式 (98) は、この計算結果を示している。

$$E\{\Delta^2\}_{\min} = \frac{1}{\xi^{2m}} \left[ \frac{\Gamma(2m+\eta)}{\Gamma(\eta)} - \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{\Gamma(m+\eta+1)}{\Gamma(\eta)} - \eta \frac{\Gamma(m+\eta)}{\Gamma(\eta)} \right\}^2 - \left\{ \frac{\Gamma(m+\eta)}{\Gamma(\eta)} \right\}^2 \right] \quad (98)$$

図-8 は  $E\{\Delta^2\}_{\min} \xi^{2m} \sim \eta$  の関係をプロットしたものである。 $m$  の値の増大にともなって、 $E\{\Delta^2\}_{\min}$  が増加することを示している。式 (95) を用いると、式 (22) は次のようになる。

$$\frac{d(\bar{S} + \tilde{S})}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \{\alpha \bar{S} + \beta \tilde{S} + \Delta\} = \bar{r} + \tilde{r} \quad (99)$$

式 (99) の期待値をとると、次式を得る。

$$\frac{d\bar{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} = \bar{r} \quad (100)$$

式 (99), (100) より式 (101) を得る。

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m (\beta \tilde{S} + \Delta) = \tilde{r} \quad (101)$$

式 (100) は、Bras の式の誤差を考慮しても貯留量の平均値が変化しないことを示している。式 (24) は、式 (101) において  $\Delta=0$  とした式に等しい。 $\beta \tilde{S} \gg \Delta$  ならば、式 (24) は十分な精度で成立していることになる。 $\tilde{S}$ ,  $\Delta$  ともに平均が 0 の確率変数であるので、その 2 乗平均値で評価

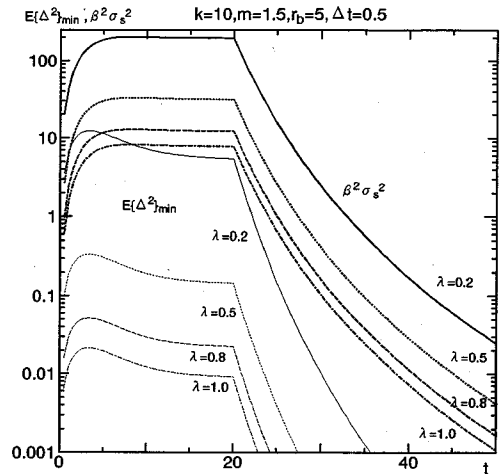


図-9 (A) 式 (102) の時間変化 ( $m=1.5$ )

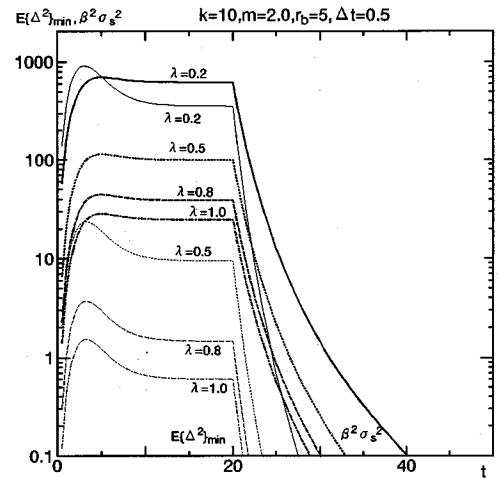


図-9 (B) 式 (102) の時間変化 ( $m=2.0$ )

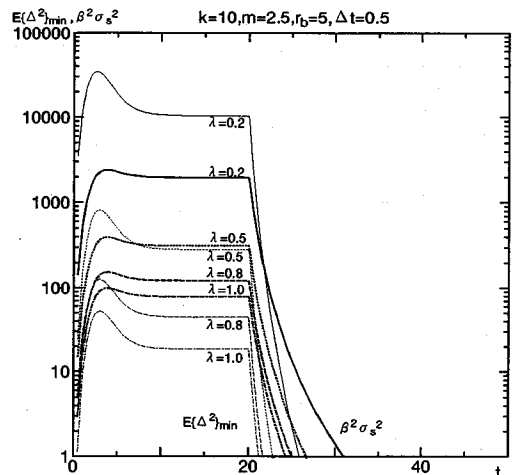


図-9 (C) 式 (102) の時間変化 ( $m=2.5$ )

すると、次式を考えれば良いことになる。

$$\beta^2 \sigma_s^2 \gg E\{\Delta^3\}_{\min} \quad (102)$$

また、式 (29) においても Bras の近似式を用いている。式 (95) を考慮すると、式 (31) は次のようになる。

$$\bar{q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m (\beta \bar{S} + \Delta) \quad (103)$$

したがって、式 (102) が成立していると式 (32)~(34) は十分な精度で成立していることになる。

図-9 は、次の条件下で降雨量の 1~4 次モーメントが定常な場合について  $\beta^2 \sigma_s^2$ ,  $E\{\Delta^3\}_{\min}$  の時間変化を示している。

$$K=10, \Delta t=0.5 \text{ (hr)}, \bar{r}=5 \text{ (mm/hr)} \quad (104)$$

図中の  $\lambda$  は式 (51) の降雨量の指数分布のパラメータである。降雨量の分散は式 (52) で与えられる。 $m$  の値の小さいときには、 $\lambda$  の小さい範囲まで式 (102) を満足しているが、 $\lambda$  が増大すると、その範囲が小さくなる。例えば、 $m=2.5$ ,  $\lambda=0.2$  のときは、式 (102) を満足していない。 $\beta^2 \sigma_s^2$  が  $E\{\Delta^3\}_{\min}$  より 1 オーダー以上大きくないと、理論式から得られる流出量の 2~4 次モーメントとシミュレーション値が異なることになる。図-9 は降雨量の 1~4 次モーメントが定常の場合を示しているが、非定常の場合にも式 (24), (26)~(28) を用いると式 (102) を計算するに必要な諸量を求めることができる。図-1 より判断すると時間単位が 1 時間以内の降雨量では  $\lambda \geq 0.5$  (hr/mm) なので、式 (104) の条件下では式 (102) が成立している。

## 8. ま と め

降雨量が独立な不規則関数で記述される場合、貯留関数法を用いて流出量の 1~4 次モーメントを得るための理論式を誘導した。さらに、理論式を誘導するに当たって用いた Bras の近似式を評価する指標を求めた。流出量の 1~4 次モーメントが理論的に得られるので、流出量の確率密度関数の推定が可能になり、ほぼガンマ分布で近似できることがわかった。流出量の分布形が既知になると計算流出量の信頼限界を求めることができる。降雨量の確率変動特性は、その時間単位によっても異なる<sup>9)</sup>。降雨量の持続性を含めて、今後とも解析を進めたい。

本論文は、式 (1), (2) で記述される最も単純な貯留関数法についてその流出量の 1~4 次モーメントを理論的に求める手法について述べたものである。本手法の特長は流出モデルに含まれているベキ乗型の非線形項を容易に扱えることにある。したがって、Prasad<sup>9)</sup> や星<sup>10)</sup> の貯留関数法にも容易に応用ができる。例えば、星の貯留関数は、次式で表される。

$$S = K_1 q^{P_1} + K_2 \frac{dq^{P_2}}{dt} \quad (105)$$

式 (2) と比較すると上式の右辺第 2 項が付け加えられている。このために本論文で述べたように、式 (1), (105) から流出量  $q$  を消去する手法を採用できない。 $q^{P_1}$ ,  $q^{P_2}$  を式 (19) のように近似すると次式を得る。

$$q^{P_1} = \alpha_1 \bar{q} + \beta_1 \bar{q} \quad (106)$$

$$q^{P_2} = \alpha_2 \bar{q} + \beta_2 \bar{q} \quad (107)$$

ここに、 $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  は、式 (20), (21) において  $P = P_1$ ,  $P = P_2$  としたときの、係数  $\alpha$ ,  $\beta$  の値を示している。式 (105)~(106) を式 (1) に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + f_1(t) \frac{d\bar{q}}{dt} + g_1(t) \bar{q} = \frac{\bar{r}}{K_2 \alpha_2} \quad (108)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{K_2 \alpha_2} \left\{ 2K_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + K_1 \alpha_1 \right\} \quad (109)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{K_2 \alpha_2} \left\{ K_2 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + K_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + 1 \right\} \quad (110)$$

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + f_2(t) \frac{d\bar{q}}{dt} + g_2(t) \bar{q} = \frac{\bar{r}}{K_2 \beta_2} \quad (111)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{K_2 \beta_2} \left\{ 2K_2 \frac{d\beta_2}{dt} + K_1 \beta_1 \right\} \quad (112)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{K_2 \beta_2} \left\{ K_2 \frac{d^2 \beta_2}{dt^2} + K_1 \frac{d\beta_1}{dt} + 1 \right\} \quad (113)$$

式 (108)~(113) は、式 (1), (105) から貯留量  $S$  を消去して得られたもので、式 (23), (24) と比較すると  $\frac{d\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\beta}{dt}$  などの項が現れ、式形が複雑になっている。式 (111) を次のような連立微分方程式に変形できる。

$$\frac{d\bar{q}_1}{dt} + f_3(t) \bar{q}_1 = \frac{\bar{r}}{K_2 \beta_2} \quad (114)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} + g_3(t) \bar{q} = \bar{q}_1 \quad (115)$$

$$f_3(t) = f_2(t) - g_3(t)$$

$$\frac{dg_3(t)}{dt} + \{f_2(t) - g_3(t)\} g_3(t) = g_2(t) \quad (116)$$

したがって、その解を容易に求めることができる。

$$\bar{q}_1 = e^{-\int f_3(t) dt} \int^t \frac{\bar{r}(\tau_1)}{K_2 \beta_2} e^{\int^{\tau_1} f_3(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 \quad (117)$$

$$\bar{q} = e^{-\int g_3(t) dt} \int^t \bar{q}_1(\tau_1) e^{\int^{\tau_1} g_3(\tau_2) d\tau_2} d\tau_1 \quad (118)$$

式 (118) を 2~4 乗して期待値をとることにより流出量の 2~4 次モーメントを得ることができる。式形が若干複雑になるが、式 (25) を 2~4 乗して貯留量の 2~4 次モーメントを求めた手法を適用できる。

また、Kinematic Wave 理論にもベキ乗型の非線形項が含まれおり、本手法を応用した結果の一部を発表している<sup>11)</sup>。

## 参考文献

- 1) T.E. Unny : Hydrology Research in North America and in Japan-Problems in Hydrology Described Stochastic Differential Equations-, 水文・水資源学会誌第4巻4号, pp.9-18, 1991.
- 2) 高棹琢馬, 宝馨, 楠橋康広: 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp.221-235, 1985.
- 3) 藤田睦博, 中尾隆志: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究, 水工学論文集, 第36巻, pp.561-566, 1992.
- 4) 藤田睦博, 中尾隆志, 篠原伸和: 貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について, 水工学論文集, 第37巻, pp.99-104, 1993.
- 5) Bras, R.L. and Georgakakos, K.P. : Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting-A Statistical Linearization Approach-, *Third International Symposium on Stochastic Hydraulics*, pp.95-105, 1980.
- 6) 藤田睦博, 道口敏幸, 榎木国夫: 小流域における降雨流出の時間応答特性, 土木学会第46回年次学術講演会II, pp.130-131, 1991.
- 7) Hahn, G.J. and Samuel, S.S. : *Statistical Models in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc. 197, 1967.
- 8) 江藤剛治: 降水量時系列の解析, 土木学会誌, 確率統計水文学4, Vol.63, pp.78-83, 1978.
- 9) Prasad, R. : A Nonlinear Hydrologic System Response Model, *Proc. ASCE*, Vol.93, HY4, pp.201-221, 1967.
- 10) 星 清, 山岡 勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, pp.273-278, 1982.
- 11) 竹本 晃, 工藤睦信, 藤田睦博: Kinematic Wave モデルの確率応答特性, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集, 第2部(A), pp.126-127, 1994. (1994.4.11 受付)

## STOCHASTIC RESPONSE OF STORAGE FUNCTION MODEL

Mutsuhiro FUJITA, Mutsunobu KUDO, Takashi NAKAO  
and Norihide HASHIMOTO

All real hydrologic processes are more or less stochastic. While the dynamics for a runoff process are described by differential equations, strictly speaking, runoff phenomena are best expressed by stochastic differential equations. In this paper, the differential equations whose solutions give the first four moments of discharge from storage function model are proposed under the condition that rainfall input from a random process is independently distributed. The validity of these equations is cross-checked by a simulation method. It is possible to estimate the probability density function of discharge by using the obtained first four moments.