

減衰を持つ対称構造物の動的問題に対する ブロック対角化法

有尾 一郎¹・池田 清宏²・鳥居 邦夫³

¹正会員 工修 和歌山工業高等専門学校助手 環境都市工学科 (〒644 御坊市名田町野島77)

²正会員 Ph.D 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区)

³正会員 工博 長岡技術科学大学教授 建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

近年構造物の対称性の利用法としてブロック対角化法が提案されている。本研究はこの手法を減衰を持つ対称構造物の動的問題に適用するものである。系の幾何学的特性に基づく座標変換を用いて、剛性行列、減衰行列、質量行列、制御系の行列等を同時にブロック対角化することにより、運動方程式を複数の独立な式に分解する。従来の方法と異なり、対称構造物であれば任意の減衰行列に対して適用できる点がこの手法の大きな長所である。数値解析例として各種の軸対称構造物を取り上げ本手法の数値解析効率と収束安定性の高さを示す。

Key Words : block-diagonalization method, complex eigenvalue analysis, damping matrix, dihedral group, group-theoretic bifurcation theory, symmetric structures

1. はじめに

近年群論的分岐理論に基づく対称構造物のブロック対角化解析手法が提案され、その数値解析上の利点が示されている^{1)~9)}。この手法は対称構造物の(接線)剛性行列をその幾何学的特性に基づいた座標変換によりブロック対角化し、つりあい式を複数の独立な式に分解するものである。その適用例の殆どは静的問題であるが、Zloković^{1),2)}は非減衰振動問題にブロック対角化を初めて適用しており、Healy・Tracy⁶⁾も対称性を持つ大規模離散系の非減衰振動問題にブロック対角化を適用している。本論文は減衰を持つ対称構造物の振動問題のブロック対角化手法を提案するものである。

減衰を持つ系の固有振動解析を行うには大規模な複素固有値解析が必要となり、多大な数値解析コストを要することが問題となる。現在、減衰を持つ系の簡便なモード解析法として、減衰行列を質量行列と剛性行列に比例すると仮定する proportional damping と呼ばれる方法と、減衰行列の非対角項を無視し対角項だけを考慮する Rayleigh damping と呼ばれる方法がよく利用されている。しかし、両者ともにある限定された減衰行列にしか適用できないという欠点を持っている。

本論文で提案するブロック対角化法は構造物の対称性に応じた座標変換行列により、振動問題における剛性、減衰、質量、複素動剛性行列および制御系で用いる行列等を同時にブロック対角化するものである。本手法の長所として、数値解析に用いる行列のサイズを大幅に小さくすることにより、演算コストを低減できる

ことだけでなく、固有値解析等の反復計算の収束安定性を向上できることも挙げられる。この手法は構造系の対称性の利用法の本質に迫るものであり、一般の減衰行列に対しても適用可能である。数値計算例として、各種の軸対称構造系(二面体群に同変な系)の振動問題を取り上げ、本手法の有用性と汎用性を検証する。

2. 運動方程式のブロック対角化理論

この章では、幾何学的対称性を持つ系の運動方程式のブロック対角化法の一般論について述べる。この手法は静的問題に対するブロック対角化法^{8)~11)}の拡張である。

ある N 自由度離散系の時刻 t における Lagrangian

$$L \equiv L(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \ddot{\mathbf{u}}(t), \dots) \quad (1)$$

を考える。ただし、 $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^N$ は外力を、 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ は変位ベクトルをそれぞれ表し、 $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$ 、 $\ddot{\mathbf{u}} = d^2\mathbf{u}/dt^2$ 、... である。式(1)の \mathbf{u} に関する変分に対する極小条件により微分方程式系の Lagrange の運動方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots) \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \dots \right)^T = \mathbf{0} \quad (2)$$

が求まる。この論文では、特に

$$\mathbf{F} = \sum_{j=0} \Gamma_j \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3)$$

という形の式を考えることとする。ここに、 Γ_0 は剛性行列、 Γ_1 は減衰行列、 Γ_2 は質量行列等々をそれぞれ表す。また、 $d^0/dt^0 = 1$ とする。

運動方程式の対称性を記述するにあたり、幾何学的変換を表す元 g から構成される群 G を考える。例えば群 G の元 g が N 次元ベクトル $u(t)$ に作用すると、 $u(t)$ が $g(u(t))$ に変換されるとする。この座標変換の仕組みを表す $N \times N$ の表現行列 $T(g)$ とは

$$T(g)u(t) = g(u(t)), \quad \forall g \in G \quad (4)$$

を満たすものである。この論文では f と u は同一の空間に存在するとしているので、外力ベクトル f の表現行列も同一である。

この系の対称性は、群 G の元 g が引き起こす座標変換 $T(g)$ に対する、Lagrangian L の不変性 (群 G 不変性)

$$L(T(g)f, T(g)u, T(g)\dot{u}, \dots) = L(f, u, \dot{u}, \dots) \quad \forall g \in G \quad (5)$$

により表される。式 (5) の両辺に対し、 u に関して変分をとり、 $T(g)$ を左から掛け、 $T(g)T(g)^T = I$ を用いると、

$$T(g)F(f, u, \dot{u}, \dots) = F(T(g)f, T(g)u, T(g)\dot{u}, \dots) \quad \forall g \in G \quad (6)$$

という運動方程式 F の同変条件式が求まる。条件式 (6) は幾何学的対称条件を一般化したものであり、変数 f と u, \dot{u}, \dots をそれぞれ $T(g)$ により変換することと、式 F 全体を $T(g)$ で変換することが等価であることを表す。式 (6) を、式 (3) を用いて書き下すと、

$$\sum_{j=0} T(g)\Gamma_j \frac{d^j u}{dt^j} - T(g)f = \sum_{j=0} \Gamma_j T(g) \frac{d^j u}{dt^j} - T(g)f \quad \forall g \in G \quad (7)$$

となる。この式が全ての $d^j u/dt^j$ ($j = 0, 1, \dots$) について成立することから、

$$T(g)\Gamma_j = \Gamma_j T(g), \quad j = 0, 1, \dots, \quad \forall g \in G \quad (8)$$

という条件が求まる。式 (8) は行列 Γ_j ($j = 0, 1, \dots$) が同一の適当な座標変換行列により同時にブロック対角化可能であることを示している^{8),9)}。

ブロック対角行列の各ブロックは群 G の既約表現¹に対応している。既約表現の種類や個数は群毎に異なるので、ブロック対角形も群毎に異なることになる (文献^{1)~12)}を参照)。

ある群 G の既約表現全体を $R(G)$ とし、既約表現に対応する座標系を、

$$u(t) = Hw(t) = \sum_{\mu \in R(G)} H^\mu w^\mu(t) \quad (9)$$

¹ 既約表現とは、群 G の表現行列 $T(G)$ の中で適当な直交変換によってこれ以上分解できない最小の表現行列を意味する。

と定義する。ここに座標変換行列 H と新しい座標系の変数 w は

$$H = [\dots, H^\mu, \dots], \\ w = [\dots, (w^\mu)^T, \dots]^T, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (10)$$

と既約表現毎の変数として表せる。

座標変換行列 H により、 Γ_j ($j = 0, 1, \dots$) を同時に

$$\tilde{\Gamma}_j = H^T \Gamma_j H = \text{diag}[\dots, \tilde{\Gamma}_j^\mu, \dots] \quad (11)$$

とブロック対角化できる。ここに $\text{diag}[\dots]$ はブロック対角行列を表し、

$$\tilde{\Gamma}_j^\mu = (H^\mu)^T \Gamma_j H^\mu, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (12)$$

である。 d 次既約表現 ($d \geq 2$) に対応するブロック $\tilde{\Gamma}_j^\mu$ は、さらに d 個の同一のブロックからなる細部ブロック対角構造を持つ。

3. ブロック対角化理論の応用

この章では、前章で導入した Γ_j ($j = 0, 1, \dots$) を同じ座標変換行列 H により同時にブロック対角化する原理の応用例を示す。

(1) 微分方程式系

運動方程式 (3) の左辺を座標変換行列 H で変換し、式 (9) と (11) を用いると

$$H^T F = \sum_{j=0} H^T \Gamma_j \frac{d^j Hw}{dt^j} - H^T f \\ = \sum_{j=0} (H^T \Gamma_j H) \frac{d^j w}{dt^j} - H^T f \\ = \sum_{j=0} \tilde{\Gamma}_j \frac{d^j w}{dt^j} - H^T f \quad (13)$$

となるが、 $\tilde{\Gamma}_j$ がブロック対角形であるので、運動方程式 (3) は

$$\sum_{j=0} \tilde{\Gamma}_j^\mu \frac{d^j w^\mu}{dt^j} - (H^\mu)^T f = 0, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (14)$$

と各既約表現に対応する形に独立した微分方程式に分解できる (d 次既約表現 ($d \geq 2$) に対応する式はさらに d 個に分解できる)。この微分方程式に既約表現毎の初期条件を代入すると、解 w^μ の重ね合せとして元の方程式の解 u が式 (9) より求まる。

(2) 複素動剛性行列

運動方程式 (3) を解くにあたり、一般解を調和関数系の $u(t) = \bar{u} \exp(\lambda t)$ と仮定すると、式 (3) は

$$F = S(\lambda)\bar{u} - f = 0 \quad (15)$$

となる。ここで $S(\lambda) = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_j$ は複素動剛性行列、 \bar{u} は初期値ベクトル、 λ は複素数である。

複素動剛性行列 $S(\lambda)$ は座標変換行列 H により,

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\lambda) &= H^T S(\lambda) H = \sum_{j=0}^k \lambda^j H^T \Gamma_j H \\ &= \text{diag}[\dots, \tilde{S}^\mu, \dots]\end{aligned}\quad (16)$$

とブロック対角化できる (式 (11) を参照)。ここに,

$$\tilde{S}^\mu(\lambda) = (H^\mu)^T S(\lambda) H^\mu = \sum_{j=0}^k \lambda^j \tilde{\Gamma}_j^\mu \quad (17)$$

である。 H が直交行列であるので、変換後の複素動剛性行列 $\tilde{S}(\lambda)$ の固有値は $S(\lambda)$ の固有値と同一である。しかも $\tilde{S}(\lambda)$ はブロック対角形であるので、 $S(\lambda)$ の固有値解析を各ブロック $\tilde{S}^\mu(\lambda)$ の固有値解析に置き換えることができることは数値解析の効率化及び安定化に関し非常に有利である。

(3) 制御系の行列

ある k 階の微分方程式で与えられる運動方程式

$$\frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} = \sum_{j=0}^{k-1} B_j \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j} + \Gamma_k^{-1} \mathbf{f} \quad (18)$$

を考える (式 (3) を参照)。ここに,

$$B_j = -\Gamma_k^{-1} \Gamma_j \quad (19)$$

である。新しい変数

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{u}^T, \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)^T, \dots, \left(\frac{d^{k-1}\mathbf{u}}{dt^{k-1}} \right)^T \right)^T \quad (20)$$

を定義すると、式 (18) から

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = A\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \quad (21)$$

という制御系の微分方程式が求まる。ここに,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I \\ B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{k-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \dots, (\Gamma_k^{-1} \mathbf{f})^T)^T \quad (23)$$

である。このように、制御系の解析では kN 次元の行列 A の固有値解析が必要となる。式 (22) より明らかなように、行列 A は非対称かつバンド幅が大きいので、その固有値解析には多大な労力を要することになる。

次に既約表現に対応する変数

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}^\mu &= \left((\mathbf{w}^\mu)^T, \left(\frac{d\mathbf{w}^\mu}{dt} \right)^T, \dots, \left(\frac{d^{k-1}\mathbf{w}^\mu}{dt^{k-1}} \right)^T \right)^T \\ \forall \mu \in R(G)\end{aligned}\quad (24)$$

を定義し、この変数 $\hat{\mathbf{w}}^\mu$ に対し、式 (14) から式 (21) に対応する式を直接誘導すると、

$$\frac{d\hat{\mathbf{w}}^\mu}{dt} = \tilde{A}^\mu \hat{\mathbf{w}}^\mu + \tilde{\mathbf{P}}^\mu, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (25)$$

という既約空間毎に独立な式が求まる。ここに、

$$\tilde{A}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & I \\ \tilde{B}_0^\mu & \tilde{B}_1^\mu & \tilde{B}_2^\mu & \dots & \tilde{B}_{k-1}^\mu \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^\mu = \left(\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \dots, [(\tilde{\Gamma}_k^\mu)^{-1} (H^\mu)^T \mathbf{f}]^T \right)^T \quad (27)$$

であり、行列 \tilde{B}_j^μ は、

$$\begin{aligned}\tilde{B}_j^\mu &= -(\tilde{\Gamma}_k^\mu)^{-1} \tilde{\Gamma}_j^\mu \\ &= -((H^\mu)^T \Gamma_k H^\mu)^{-1} ((H^\mu)^T \Gamma_j H^\mu) \\ &= -(H^\mu)^{-1} \Gamma_k^{-1} [(H^\mu)^T]^{-1} (H^\mu)^T \Gamma_j H^\mu \\ &= -(H^\mu)^T \Gamma_k^{-1} \Gamma_j H^\mu \\ &= (H^\mu)^T B_j H^\mu\end{aligned}\quad (28)$$

である (式 (19) 参照)。制御系の微分方程式 (18) の解は式 (25) の解 $\hat{\mathbf{w}}^\mu$ を式 (9) により重ね合わせることで求まる。また、直接 $N \times N$ の座標変換行列 H を用いて B_j は

$$\tilde{B}_j = H^T B_j H = \text{diag}[\dots, \tilde{B}_j^\mu, \dots] \quad (29)$$

とブロック対角化できる。このように本手法を用いると非対称な行列 A の固有値解析をサイズが小さい複数の行列 \tilde{A}^μ の固有値解析に置き換えることができ、数値解析の効率化が図れる。

4. 制御系の行列の固有値解析効率の評価

この章では振動問題における制御系の行列 A の固有値解析アルゴリズムの数値解析効率を従来の直接的な解法とブロック対角化法について比較する。行列 A の固有値解析手法として下記の手順を考える。

- i) LU 分解による逆行列 Γ_k^{-1} の計算²,
- ii) Schur 分解³に基づく行列 A の Hessenberg 行列⁴への変換,
- iii) QR 反復法による非対称行列 A の固有値・固有ベクトル解析。

これらの総演算量の主要項は行列サイズ N に対し、

$$p = aN^3 \quad (30)$$

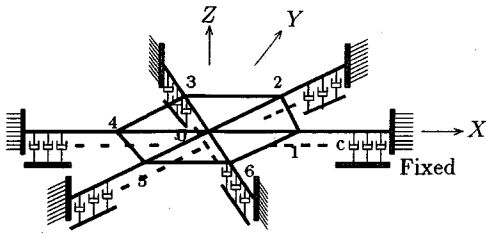
と表される。ここに、 a はある定数とする。これに対し、ブロック対角化法における演算量の主要項は

$$\tilde{p} = \sum_{\mu \in R(G)} a(N^\mu)^3 \quad (31)$$

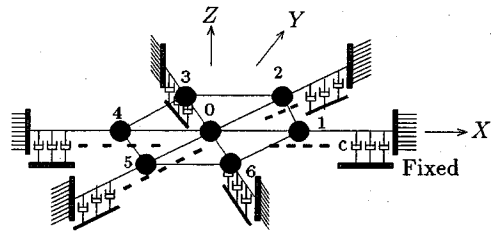
² LU 分解による逆行列の計算法は、一般によく用いられる Gauss-Jordan 法に比べ計算効率が 30% ほど良い¹³⁾。

³ Schur 分解とはある適当な直交変換により、Hessenberg 行列を導く方法である。

⁴ Hessenberg 行列は上 (下) 三角と対角項の下 (上) の 1 番目の成分がゼロでない行列である。



(a) 整合質量系



(b) 集中質量系

図-1 D_6 不変な構造モデル

となる。ここで、 N^μ は各既約表現空間の行列サイズを表す。式(28)の座標変換に伴う演算量は、文献⁹⁾で定義した局所変換を用いれば、この固有値解析のコストに比べ微小である。

ところで、ブロック $\tilde{\Gamma}_j^\mu$ のサイズ N^μ が全て同一であると仮定し、 N^μ を

$$N^\mu \approx \frac{N}{q(G)} \quad (32)$$

と近似しよう。ここで、 $q(G)$ は群 G のブロックの全個数を表す。また、式(32)を式(31)に代入することにより、

$$\tilde{p} \approx a \left(\frac{N^3}{[q(G)]^2} \right) \quad (33)$$

と近似でき、本手法と従来の方法の演算コストの比も式(30)と(33)より、

$$\frac{\tilde{p}}{p} \approx \frac{1}{[q(G)]^2} \quad (34)$$

と近似できる。ただし、次章で示すように N も $q(G)$ の関数であるので、構造物毎の詳細な検討が必要である。

5. D_n 不変な構造系への適用

本理論の数値解析例として、正 n 角形状(D_n 不変)の構造系の振動方程式

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (35)$$

に限定する。ここに、 $M = \Gamma_2$, $C = \Gamma_1$, $K = \Gamma_0$ である。群 D_n の定義と D_n 不変系のブロック対角化法に関する詳細は文献^{8),9)}および付録に譲ることとする。

群 D_6 の既約表現の集合は、付録から

$$R(D_6) = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2)\} \quad (36)$$

であり、 (d,j) は j 番目の d 次既約表現を表す。また、これらの既約表現に対応する座標変換行列は

$$H = [H^{(1,1)}, H^{(1,2)}, H^{(1,3)}, H^{(1,4)}, H^{(2,1)}, H^{(2,2)}] \quad (37)$$

という形になる。ここに、2次既約表現のブロックはさらに

$$H^{(2,j)} = [H^{(2,j)+}, H^{(2,j)-}], \quad j = 1, 2 \quad (38)$$

という2つのブロックに分かれることには注意を要する。 H の各ブロック行列の対称性は

$$\begin{aligned} \sum H^{(1,1)} &= D_6, & \sum H^{(1,2)} &= C_6 \\ \sum H^{(1,3)} &= D_3, & \sum H^{(1,4)} &= D_3^2 \\ \sum H^{(2,1)+} &= D_1, & \sum H^{(2,1)-} &= D_1^4 \\ \sum H^{(2,2)+} &= D_2, & \sum H^{(2,2)-} &= C_2 \end{aligned} \quad (39)$$

である。ここに、 $\sum(\cdot)$ は括弧の中の行列の列ベクトルの対称性を表す群を意味する。この座標変換に対応する座標系を

$$w = [(w^{(1,1)})^T, \dots, (w^{(1,4)})^T, (w^{(2,1)+})^T, (w^{(2,1)-})^T, (w^{(2,2)+})^T, (w^{(2,2)-})^T]^T \quad (40)$$

と定義する。例えば、式(11)の行列 Γ_j はこの座標変換により、

$$H^T \Gamma_j H = \text{diag} [\tilde{\Gamma}_j^{(1,1)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,2)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,3)}, \tilde{\Gamma}_j^{(1,4)}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,1)+}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,1)-}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,2)+}, \tilde{\Gamma}_j^{(2,2)-}] \quad (41)$$

$j = 0, 1, 2$

とブロック対角化される。2次既約表現 $(2,1)$, $(2,2)$ に対しては

$$\tilde{\Gamma}_i^{(2,j)+} = \tilde{\Gamma}_i^{(2,j)-}, \quad i = 0, 1, 2; \quad j = 1, 2 \quad (42)$$

という2個の同一のブロックがそれぞれ対応する。行列演算にあたり、どちらか一方のみを解析すればよいので計算量を低減できる。この他、行列 B_j や $S(\lambda)$ も式(41)の形にブロック対角化されるので、同じ議論が成り立つ。

(1) D_6 不変正六角形はり構造物

図-1(a)に示す D_6 不変な整合質量系モデルの行列 Γ_j ($j = 0, 1, 2$)および図-1(b)に示す D_6 不変な集中質量系モデルの非対称行列 B_j を本手法によりブロック対角化する。この系は Z 方向変位のための1節点1自由度の合

表-1 D_6 不変な座標変換行列 H^μ (Z方向成分)

No.	(1,1)	(1,3)	(2,1)+	(2,1)-	(2,2)+	(2,2)-
0	1	0	0	0	0	0
1	0	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$
2	0	$1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$\sqrt{3}/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/6$
3	0	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/6$
4	0	$1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$
5	0	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/6$
6	0	$1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$\sqrt{3}/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/6$

計7自由度を持つ。この場合には十分な自由度がないために群 D_6 の1次既約表現 (1, 2), (1, 4) の空間は退化してしまい、残りの4個の既約表現 (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2) に対応する6個のブロック行列が存在する。

a) 各種の行列の同時ブロック対角化

図-1(a) の D_6 不変構造系モデルの行列 K, C, M を以下に示す。

$$K = K_0 \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & & & & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & & & \\ -1 & & -1 & 4 & -1 & & \\ -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\ -1 & & & & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$C = C_0 \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & & & & & \\ -1 & & 2 & & & & \\ -1 & & & 2 & & & \\ -1 & & & & 2 & & \\ -1 & & & & & 2 & \\ -1 & & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$M = M_0 \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & & & & -1 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & & & \\ -1 & & -1 & 8 & -1 & & \\ -1 & & & -1 & 8 & -1 & \\ -1 & & & & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & & & & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad (45)$$

ここに、 $K_0 = 12EI/\ell^3, C_0 = \nu A\ell, M_0 = \rho A\ell/6$ である。この減衰行列 C は proportional damping でも Rayleigh damping でもないので、一般的なモード解析では取り扱いが難しいものである。これらの行列は表-1に示す座標変換行列 H により、

$$\tilde{K} = H^T K H$$

$$= K_0 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 6 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{matrix} & & & & & & \\ & 6 & & & & & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\tilde{C} = H^T C H = C_0 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 6 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{matrix} & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\tilde{M} = H^T M H = M_0 \begin{bmatrix} \begin{matrix} 12 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 6 \end{matrix} & & & & & & \\ & 10 & & & & & \\ & & 7 & & & & \\ & & & 7 & & & \\ & & & & 9 & & \\ & & & & & 9 & \\ & & & & & & 9 \end{bmatrix} \quad (48)$$

と同時にブロック対角化される。また、微分方程式(3)は

$$\tilde{M}^\mu \ddot{w}^\mu + \tilde{C}^\mu \dot{w}^\mu + \tilde{K}^\mu w^\mu = (H^\mu)^T f \quad (49)$$

$$\mu = (1, 1), (1, 3), (2, 1)\pm, (2, 2)\pm$$

と既約表現毎の式に分解できる(2次既約表現に対応する式はさらに2つに分かれている)。

b) 減衰を持たない集中質量系の振動解析

図-1の構造モデルの複素固有振動数 λ は $|S(\lambda)| = 0$ の解として与えられる。この構造物の $S(\lambda)$ を表-1の座標変換行列 H を用いてブロック対角化すると、

$$\tilde{S}(\lambda) = \text{diag}[\tilde{S}^{(1,1)}, \tilde{S}^{(1,3)}, \tilde{S}^{(2,1)+}, \tilde{S}^{(2,2)+}] \quad (50)$$

となる。ここで、

$$\tilde{S}^{(2,j)} = \text{diag}[\tilde{S}^{(2,j)+}, \tilde{S}^{(2,j)-}] \quad (51)$$

$$\tilde{S}^{(2,j)+} = \tilde{S}^{(2,j)-}, \quad j = 1, 2 \quad (52)$$

であり、2次既約表現には2個の同一の細部ブロックがある。このように、関数 $|S(\lambda)|$ の解を求める問題は

$$|\tilde{S}^\mu(\lambda)| = 0, \quad \mu = (1, 1), (1, 3), (2, 1)+, (2, 2)+ \quad (53)$$

という4個の独立な方程式の解を求める問題と書き直せる。すなわち、 $|S(\lambda)| = 0$ の重根は $|\tilde{S}^{(2,1)+}| = 0$ か $|\tilde{S}^{(2,2)+}| = 0$ のいずれかの単純根となる。

さて、 M を単位行列とし非減衰とすると、 λ は実根となる。このときの $|S(\lambda)|$ と $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ を λ の関数としてそ

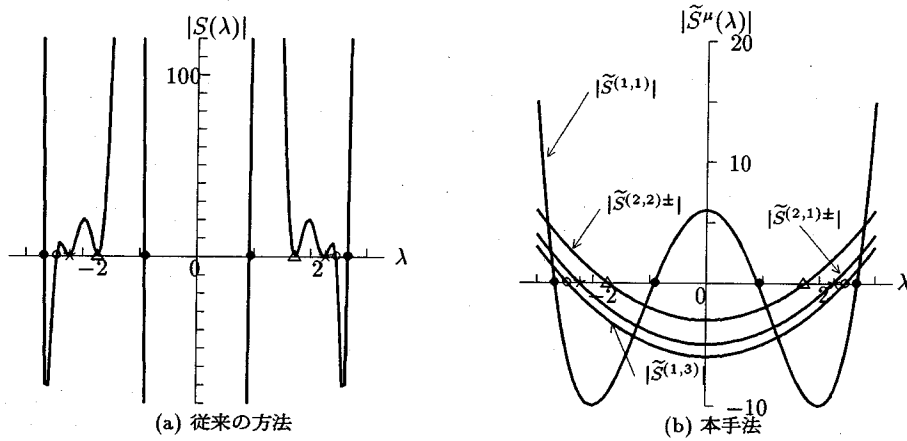
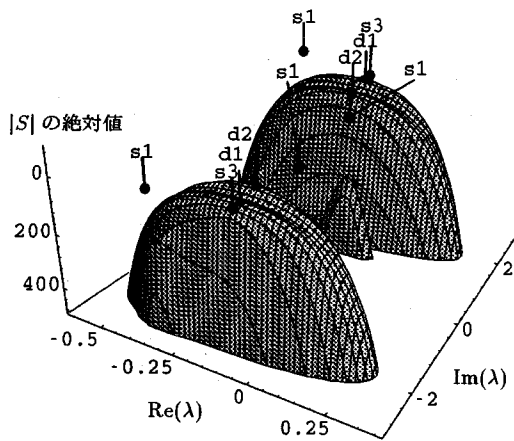
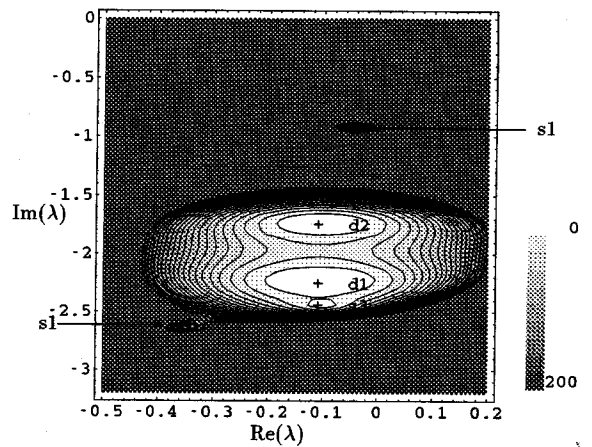


図-2 D_6 不変な集中質量系の行列式 $|S(\lambda)|$ と $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ の比較



(a) $|S(\lambda)|$ の絶対値の3次元図



(b) $|S(\lambda)|$ の絶対値の等高線図

図-3 複素固有値λに対する行列式 $|S(\lambda)|$ の絶対値の分布

それぞれ図-2(a) と (b) にプロットする。 $|S(\lambda)| = 0$ の解 λ は、いずれかの $|\tilde{S}^\mu(\lambda)| = 0$ の解に相当し、同一の固有値 λ を与えることは明らかである。 $|S(\lambda)|$ は $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ に比べ増減が激しく複雑な関数であり、重根の固有値の点では横軸と接している。このような性質は反復計算の不安定化要因となるものである。一方、 $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ は比較的単純で滑らかな関数であり、重根の固有値 λ は別のブロックに分散しているので、各ブロック毎の $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ は常に横軸と交叉している。このようにブロック対角化手法は $|S(\lambda)| = 0$ の特異性を分散させることにより、数値解析を安定化させる効果を持つ。またさらに高次の対称性を持つ系ではブロックが同一となるブロック数も増加するため非常に有利となる。

c) 減衰を持つ集中質量系の振動解析

図-1(b) に示す集中質量系モデルの複素動剛性行列 $S(\lambda)$ の複素固有値解析を行った (式 (43) と (44) の

$K_0 = 1(\text{N/m})$, $C_0 = 0.1(\text{Ns/m})$ とし $M = I(\text{kg})$ とした)。行列式 $|S(\lambda)|$ の絶対値を λ の実数部 $\text{Re}(\lambda)$ と虚数部 $\text{Im}(\lambda)$ に対して三次元的にプロットしたのが図-3(a) である。 $|S(\lambda)| = 0$ の解を図中に (●) 印で示す。また、図中の記号 s_1 と s_3 は 1 次既約表現 (1,1) と (1,3), d_1 と d_2 は 2 次既約表現 (2,1) と (2,2) に該当する解をそれぞれ表す。 2 次既約表現に対応する解は重根である。 $\text{Im}(\lambda) < 0$ 領域の $|S|$ の絶対値の等高線を図-3(b) に示す。明らかに $|S(\lambda)|$ は非常に複雑な関数となっている。

一方、ブロック毎に分解した式 (49) の複素動剛性行列 $|\tilde{S}^\mu(\lambda)|$ の絶対値を図-4(a)~(d) に示す。これらは図-3と比較して、どれも非常に滑らかな関数に分解されており、既存の解と当然一致している。重根の解はブロック対角化後は $|\tilde{S}^{(2,1)\pm}| = 0$ か $|\tilde{S}^{(2,2)\pm}| = 0$ の単根となっている (図-4(c),(d) 参照)。このように本手法は複素動剛性行列の行列式の関数系を大幅に簡略化する

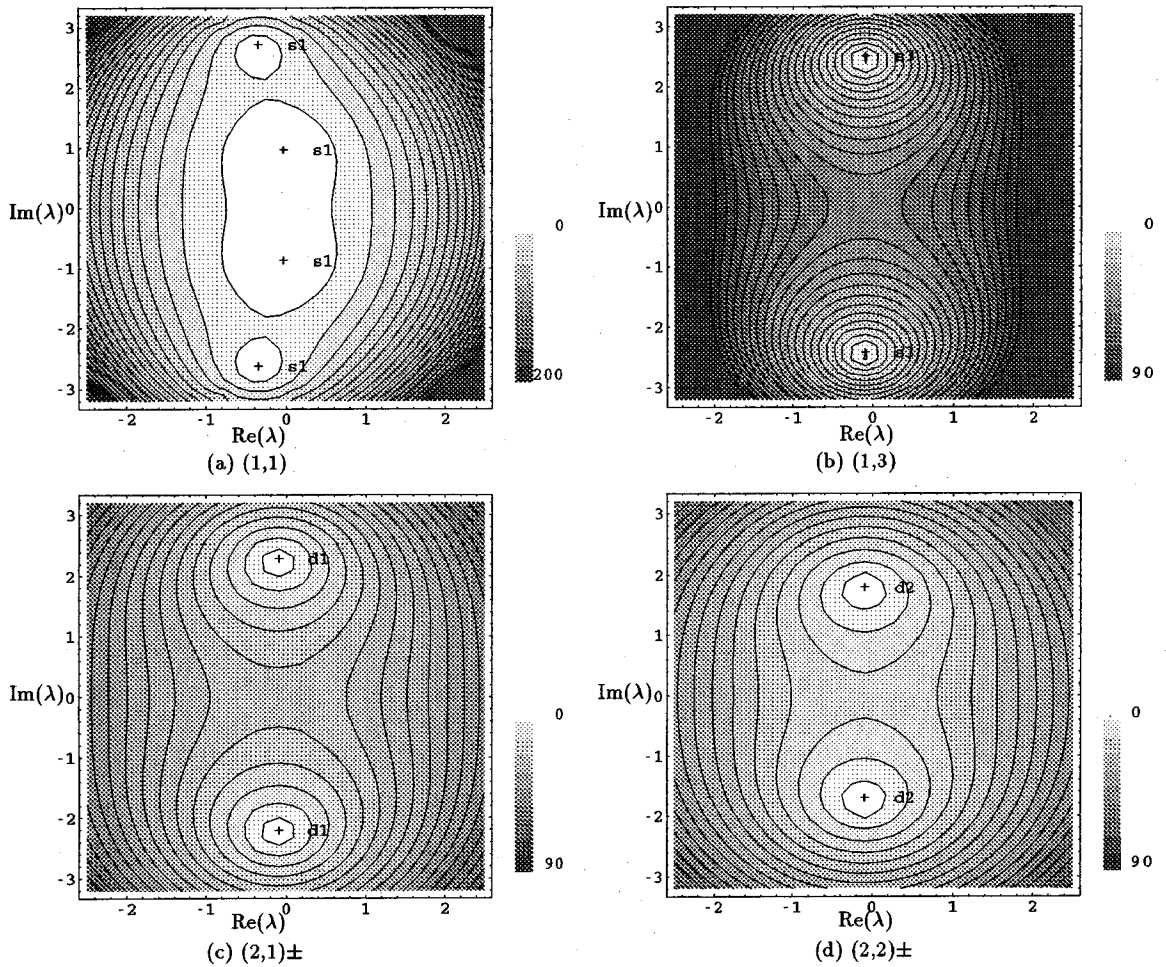


図-4 ブロック対角化後の複素固有値λに対する行列式 $|S^\mu(\lambda)|$

ことにより、その固有値解析の収束性・安定性を向上させるのである。 $S(\lambda)$ と $\tilde{S}^\mu(\lambda)$ の固有値解析の比較の一例として、各種の初期値に対するNewton-Raphson法の解の収束状態を図-5に示す。解の収束性は初期値に強く依存するが、本手法の解の収束性は従来の方法に比べておおむね良好である。

(2) D_n 不変正 n 角形 m 層構造の固有値解析

図-6に示す D_n 不変な正 n 角形 m 層構造（1節点1鉛直自由度）の制御用行列 A の固有値解析に本手法を適用する。分布減衰0.1(Ns/m)を放射線上の元素に配置する。これはproportional dampingでもRayleigh dampingでもない減衰である。

a) 演算効率の解析的評価

このモデルの固有値解析の効率を解析的に調べてみよう。この構造系の全自由度 N は

$$N = 2mn + 1 \simeq 2mn \quad (54)$$

と表され、群 D_n のブロックの個数 $q(G)$ は

$$q(D_n) = n + \frac{(-1)^n - 1}{2} \simeq n \quad (55)$$

となる（この式は空間の退化によるブロック数の減少を考慮に入れている）。式(55)を式(33)と式(34)に代入すると、

$$\tilde{p} = a \frac{N^3}{n^2}, \quad \frac{\tilde{p}}{p} \simeq \frac{1}{n^2} \quad (56)$$

となる。 n が十分大きい場合には本手法により演算コストをおおよそ $1/n^2$ に低減できる。

例えば、 n と m を

$$m = cn \quad (57)$$

を満足するように変化させてみよう。このとき式(54)は $N = 2cn^2$ となり、式(56)は

$$\tilde{p} = 2acN^2, \quad \frac{\tilde{p}}{p} = \frac{2c}{N} \quad (58)$$

となる。

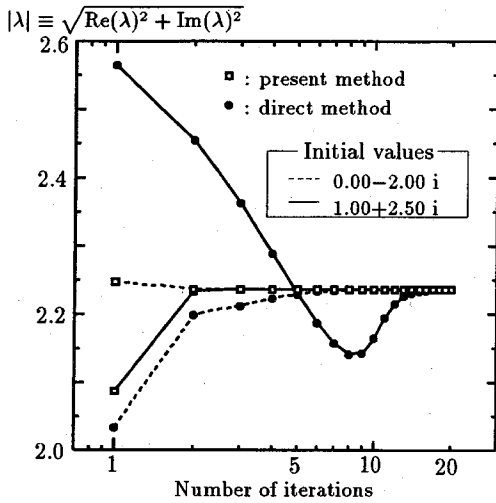


図-5 Newton-Raphson 法による収束性能の比較

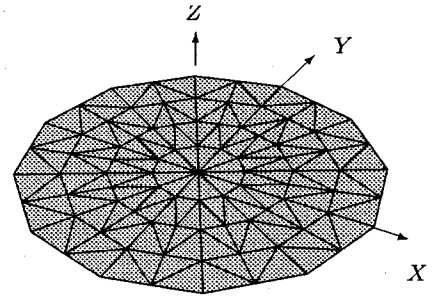


図-6 正 n 角形 m 層構造 ($n = 12, m = 4$)

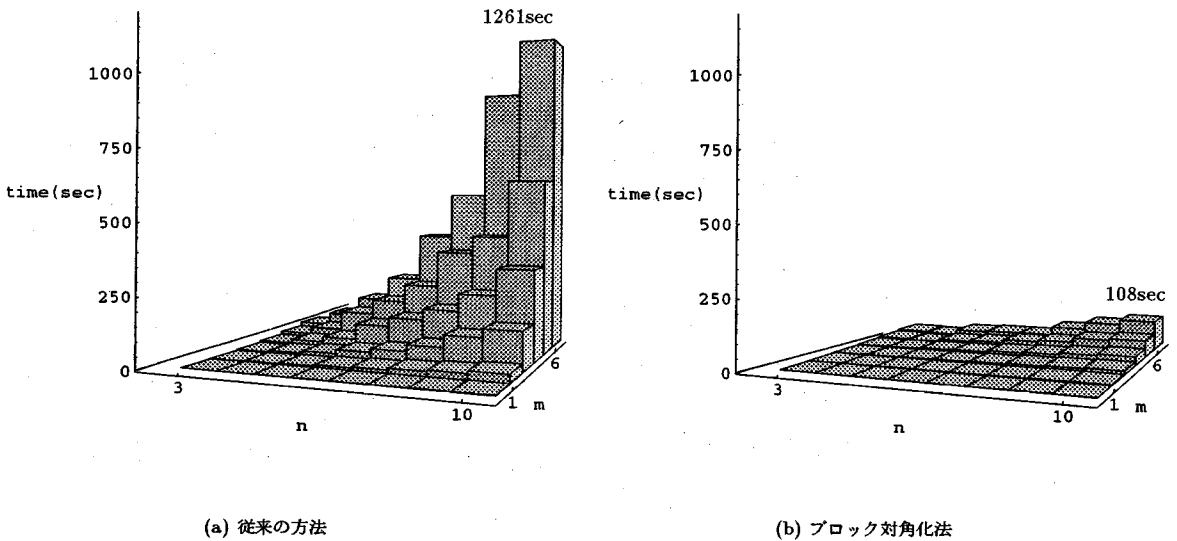


図-7 各種の n, m に対する解析所要時間

b) 実固有値解析の演算効率の評価

Sony 製ワークステーション NWS-1750 を用い、FORTRAN 77 によりプログラムを作成し、可能な限り同一条件で行列 A の固有値解析を行った。本手法による数値解析は座標変換行列 H の読み込みと式 (41) による行列 M, K, C の座標変換、LU 分解に基づく逆行列 $(\tilde{M}^\mu)^{-1}$ の計算、非対称行列 \tilde{A}^μ の組立、安定な数値解

を得るためのバランシング処理、行列 \tilde{A}^μ の Hessenberg 行列への変換、QR 反復法による非対称行列 \tilde{A}^μ の固有値・固有ベクトルの解析から成り立っている。このときの計算機環境は TSS のサーバ使用環境であるためシングルタスクではないことを付しておく。

パラメータ n および m を変化させたときの従来の固有値解析法と本手法の所要計算時間をそれぞれ求め、図

-7(a),(b) にそれぞれ示した. 例えば, $n = 10, m = 6$ の時には本手法の解析所要時間は従来の方法に比較して約 1/10 に短縮されており, ブロック対角化法は明らかに計算効率が良い. 式 (56) に示すように計算効率は n が増加するとさらに向上することが予想される.

図-8は行列 K, C, M のサイズ N と解析所要時間 (sec) を両対数グラフ上にプロットしたものである. 図中の直線は回帰直線を表わし, (●) 印は従来の方法のデータであり, (□) と (■) は本手法のデータである. 特に (■) 印は $n = m$ に満足するデータである (式 (57) において $c = 1$ とした). 本手法の回帰直線は, $n = m$ を満足するデータに対して求めた. 従来の方法のデータの傾きはおおよそ 3 であり本手法は 2 である. このことは従来の方法の演算コストはほぼ N^3 に比例し, 本手法のコストはおおよそ N^2 に比例することを表している. この結果は仮定 (57) に基づいて誘導した演算コストと, 従来の方法と本手法の計算時間の比に対する評価式 (58) の妥当性を裏付けるものである. その他のデータ (□) もおおよそ回帰直線に従っており, 上記の議論がそのまま成り立つものと考えられる.

6. 結論

本研究では, ブロック対角化法を減衰系の対称構造物の振動問題の複素固有値解析に適用し, 数値解析上の有用性と妥当性を示した. 構造物の幾何学的対称性は一般的な性質であり, 剛性行列, 減衰行列, 質量行列, 制御系の行列等々の各種の行列にまで行き渡っている. 本手法はこれらの行列を全て同時にブロック対角化でき, 対称性の利用の本質に迫るものである.

謝辞: 本論文をまとめるにあたり, 東北大学土木工学科の柳澤栄司教授, 岩熊哲夫教授, 中沢正利講師他の方々にご助言ご協力頂きましたことに厚くお礼申し上げます.

付録

(1) 二面体群 D_n に対するブロック対角化

正 n 角形状の対称性を表す二面体群 D_n は回転変換 r と鏡映変換 s から生成され,

$$D_n \equiv \{r^k, sr^k \mid k = 0, \dots, n-1\}, \quad (59)$$

$$C_n \equiv \{r^k \mid k = 0, \dots, n-1\} \quad (60)$$

と定義される. 群 D_n が表す変換に対して不変に保たれる構造系を D_n 不変系と呼ばれている. 変換 r^k により,

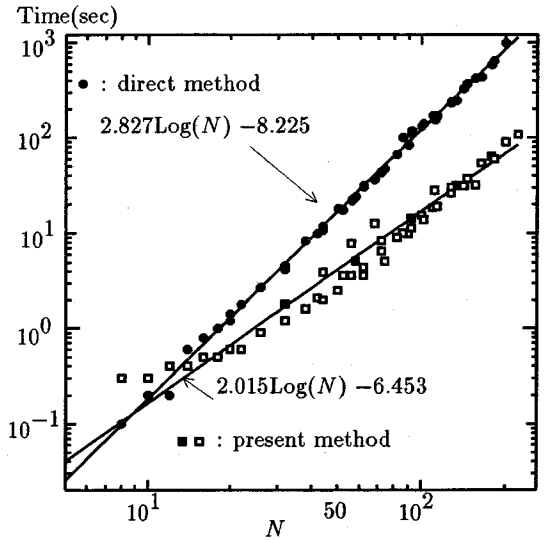


図-8 行列サイズ N に対する QR 反復時間の比較

ある原点を中心に反時計回りに回転する操作は

$$R^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta & 0 \\ \sin k\theta & \cos k\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\theta = 2\pi/n$$

と行列で表現でき, 3次元空間上の任意の点

$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$ はこの回転により

$$r: \boldsymbol{x} \longrightarrow R\boldsymbol{x} \quad (62)$$

と変換される. 変換 s により XZ 平面に関する鏡映操作は

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

という行列で表され, 点 \boldsymbol{x} は鏡映操作により

$$s: \boldsymbol{x} \longrightarrow S\boldsymbol{x} \quad (64)$$

と変換される. D_n 不変な構造物の変形パターンは,

$$D_m^j \equiv \{r^{kn/m}, sr^{kn/m+j-1} \mid k = 0, \dots, m-1\} \quad (65)$$

$$C_m \equiv \{r^{kn/m} \mid k = 0, \dots, m-1\} \quad (66)$$

という D_n の部分群により表される. ここで $D_m = D_m^1$, $C_1 = \{1\}$ とし, $m = \text{gcd}(j, n)$ は j と n の最大公約数を表す. 位数 m の二面体群 D_m^j は m 本の線対称軸を持つ線対称性を, 巡回群 C_m は角度 $2\pi/m$ に対する回転対称性を表す.

(2) 既約表現行列に対する座標変換行列

二面体群 D_n の既約表現の全体を

$$R(D_n) = \{\mu \equiv (d, j) \mid j = 1, \dots, m_d; d = 1, 2\} \quad (67)$$

と表すことにする (記号の詳細は Murota・Ikeda^{8),9)} を参照されたい). m_d は同値でない d 次既約表現の個

数であり,

$$\begin{cases} m_1 = 4, & m_2 = n/2 - 1, & \text{when } n = \text{even} \\ m_1 = 2, & m_2 = (n-1)/2, & \text{when } n = \text{odd} \end{cases} \quad (68)$$

と与えられる.

運動方程式 (3) を各既約表現毎に分解する座標変換行列を

$$\begin{aligned} H &\equiv [\dots, H^\mu, \dots] \\ &= [H^{(1,1)}, \dots, H^{(1,m_1)}, \\ &\quad H^{(2,1)+}, H^{(2,1)-}, \dots, H^{(2,m_2)+}, H^{(2,m_2)-}] \end{aligned} \quad (69)$$

と定義する. ここに $H^{(1,j)}$ は 1 次既約表現 $(1, j)$ に対応する部分ブロック行列を, $H^{(2,j)+}$ と $H^{(2,j)-}$ は 2 次既約表現 $(2, j)$ に対応する 2 個の部分ブロック行列をそれぞれ表す.

(3) 座標変換行列と対称性

座標変換行列 H の各既約表現のブロックは

$$\begin{aligned} \Sigma(H^{(1,1)}) &= D_n, & \Sigma(H^{(1,2)}) &= C_n \\ \Sigma(H^{(1,3)}) &= D_{n/2}, & \Sigma(H^{(1,4)}) &= D_{n/2}^2 \\ \Sigma(H^{(2,j)+}) &= D_{\text{gcd}(j,n)}^k \\ \Sigma(H^{(2,j)-}) &= \begin{cases} D_{\text{gcd}(j,n)}^{k+n'}, & \text{when } n' = \text{even} \\ C_{\text{gcd}(j,n)}, & \text{when } n' = \text{odd} \end{cases} \\ 1 \leq k \leq n', j &= 1, \dots, m_d, n' = n/[2\text{gcd}(j, n)] \end{aligned}$$

の対称性を持つことが分かっている^{9),10)}. ここに $\Sigma(\cdot)$ は括弧の中の行列の列ベクトルの対称性を表す群を意味する.

参考文献

- 1) Zloković, G. : Group Theory and G -vector Spaces in Vibrations, Stability and Statics of Structures, *ICS, Beograd*, (In English and Serbo-Croatian), 1973.
- 2) Zloković, G. : Group Theory and G -vector Spaces in Structural Analysis, John Wiley and Sons, 1989.

- 3) Dinkevich, S. : The spectral method of calculation of symmetric structures of finite size, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 8(4), pp.185-194, 1984.
- 4) Dinkevich, S. : Explicit Block Diagonal Decomposition of Block Matrices Corresponding to Symmetric and Regular Structures of Finite Size, *Courant Institute of Mathematical Sciences*, 1986.
- 5) Dinkevich, S. : Finite symmetric systems and their analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 27(10), pp. 1215-1253, 1991.
- 6) Healey, T.J. : A group theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67, pp.257-295, 1988.
- 7) Healey, T.J. and Treacy, J.A. : Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp.265-285, 1991.
- 8) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM Journal on Statistical and Scientific Computing*, 12(2), pp.273-297, 1991.
- 9) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.
- 10) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.
- 11) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.483/I-27, pp.27-36, 1994.
- 12) Cotton F.A. : Chemical Applications of Group Theory, 2nd edition, *John Wiley*, 1971.
- 13) 小国 力, 村田 健郎, 三好 俊郎, ドンガラ, J.J., 長谷川 秀彦 : 行列計算ソフトウェア WS, スーパーコン, 並列計算機, 丸善, 1991.

(1994.7.14 受付)

BLOCK-DIAGONALIZATION METHOD FOR DYNAMIC PROBLEMS OF DAMPED SYMMETRIC STRUCTURES

Ichiro ARIO, Kiyohiro IKEDA and Kunio TORII

The block-diagonalization method has come to be utilized to exploit the symmetry of structures. This paper applies this method to dynamic problems of damped symmetric structures. By means of a suitable transformation, we can simultaneously put the stiffness, the damping, the mass matrix, and the matrix of control system into block-diagonal forms. The equations of motion, accordingly, can be decomposed into a number of independent equations. This method, which is compatible with arbitrary damping matrix, is applied to a number of axisymmetric structures to show its numerical efficiency.