

# 鉄道車両と線路構造物の連成応答解析法に関する研究

涌井 一<sup>1</sup>・松本信之<sup>2</sup>・松浦章夫<sup>3</sup>・田辺 誠<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 (財)鉄道総合技術研究所 構造研究室 室長 (〒185 国分寺市光町2-8-38)

<sup>2</sup>正会員 M.S. (財)鉄道総合技術研究所 構造研究室 主任研究員

<sup>3</sup>正会員 工博 金沢工業大学教授 土木工学科

<sup>4</sup>工博 神奈川工科大学教授 機械システム工学科

三次元ばね・マス・ダンパ系の車両モデルと三次元有限要素法による線路構造物モデルを用いた鉄道車両と線路構造物の動的相互作用解析法の構築を行った。本法では、車輪・レール間の非線形力を考慮し、車両の蛇行動も解析することができる。このような多自由度の解析を効率的に行うために、モード解析法を非線形問題に適用した解析法を用いた。本報では、これらの定式過程および数値解法を示す。

**Key Words :** *dynamic interaction analysis, mechanical model, vehicle, structure, mode superposition*

## 1. はじめに

我国における鉄道車両と線路構造物(軌道・土木構造物)の連成応答解析に関する理論的な研究は、東海道新幹線に関する検討に端を発して60年代後半より行われてきているが、系統的にまとめられた最初のものは松浦<sup>1),2)</sup>による研究で、ここではたわみ形状を直交関数で与えた桁と単軸およびボギー形式の質点系車両の相互作用を表す運動方程式を導き、主に単純支持の桁についての数値解析により動的応答を支配する因子およびその他の基本的な性状を明らかにしている。また、涌井<sup>3)</sup>は車両を定荷重列として取扱ったものの、松浦による理論展開を離散座標系に適用して、トラス橋部材の衝撃係数に関する検討を行っている。これらはいずれも二次元の車両と構造物を取扱ったものである。さらに、本四連絡橋を対象として、車両の走行性からみた長大橋の折れ角限度を検討するために、松浦<sup>4)</sup>、涌井<sup>4),5)</sup>は二軸貨車および新幹線車両をモデルとした三次元の結合構造による車両モデルを提案した。ここでは車輪・レール間に生じるクリープ力とフランジ衝突現象を簡略的に考慮した大振幅の蛇行動運動方程式を導き、数値解析により限度値の設定を行っているが、軌道は水平または鉛直角折れを有する平面線形として取扱われるに留まっている。

一方、道路橋の分野におけるこの種の研究は、山田<sup>6)</sup>、川谷<sup>7)</sup>、本田<sup>8),9)</sup>などにより行われており、これらにより各種道路橋の衝撃係数の検討がなされている。また、最近では自動車車両に三次元モデル<sup>10)</sup>を用いているものもあり、また、任意形式の構造物<sup>11)</sup>を用いた

走行荷重に対する応答解析を行っているものもある。

本研究では、このような情勢を踏まえて、鉄道車両と線路構造物を対象とした筆者らによる既往の研究を統括的に取入れた解析モデル、すなわち車両・線路構造物の連成をできるだけ精密に取扱うことが可能な三次元解析モデルを構築することを目的とした。さらに、車輪・レール間に生じる非線形のクリープ現象およびフランジ衝突現象などを含む多自由度の解析モデルを効率的に解くことができ、拡張性の優れた数値解析法を適用することとした。

## 2. 力学モデルと運動方程式

車両、線路構造物および車輪・レール間の相互作用力の力学モデルと、これらから導かれる運動方程式の概要を述べる。ただし、各々の力学モデルは、次に挙げるモデルを前提として構築した。

- ① 車両は一定速度でスムーズに線路構造物上を走行する。
- ② 車両モデルは、涌井<sup>5)</sup>により提案された三次元結合構造のばね・マス・ダンパ系の力学モデルを用いるが、一列車編成内の車両数は任意とする。
- ③ 線路構造物は、梁やシェルなどの三次元有限要素でモデル化する。
- ④ 軌道は線路構造物上の1つの走行ラインとして定義する。また、軌道不整も考慮可能とし、これは左右レール毎に独立に設定されるものとする。
- ⑤ 車輪とレール間の相互作用力モデルは松浦・涌

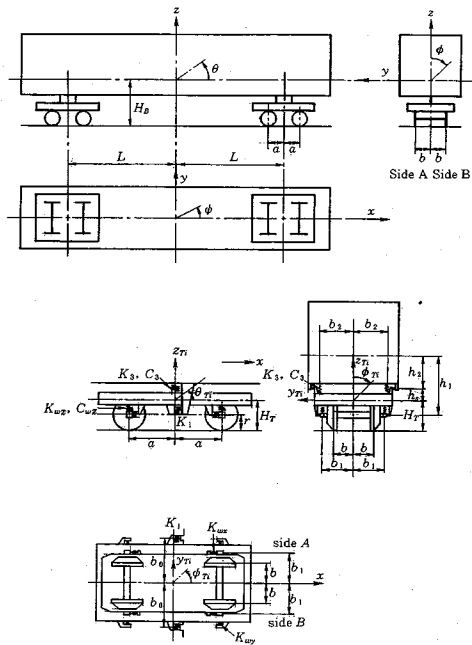


図-1 車両の力学モデル

井<sup>9)</sup>により提案された、車輪を円錐踏面とした簡略化クリープ理論モデルを用いる。

### (1) 車両の力学モデル

#### a) 結合構造

車両の力学モデルは図-1に示すように、一つの車両を、車体、台車わく、輪軸とに分け、各構成要素を剛体(質点)とし、これらがばねとダンパで互いに結合した構造としている。軽量車両等で車体が比較的柔らかい場合には、これを弾性体として取扱う必要があるが<sup>12)</sup>、ここでは車体等は十分に剛であるとして仮定してモデル化している。力学モデルに使用されている記号を表-1に示す。車両の座標系は、車両の長手方向を  $x$  軸、横方向を  $y$  軸、上下方向を  $z$  軸とした。

車両と台車わくの結合は、 $x$  軸方向はボルスタ・アンカ、 $y$  軸方向は左右まくらばね、 $z$  軸方向は上下まくらばねによっている。

また、台車わくは二つの輪軸と  $x$ 、 $y$  および  $z$  軸方向にそれぞればねとダンパで結合されている。

車両間の連結器は、上下方向のみをばねとダンパで結合することによりモデル化している。

#### b) 車両の自由度

車体は、車体重心位置で左右方向  $y$ 、上下方向  $z$ 、ローリング  $\phi$ 、ピッチング  $\theta$ 、およびヨーイング  $\psi$  の5自由度を有する。台車わくは車体と同様に、台車わく重心で各左右方向  $y_r$ 、上下方向  $z_r$ 、ローリング  $\phi_r$ 、ピッチン

表-1 車両の力学モデルに用いた記号

名 称	記 号	数 値*
前後台車心ざら間距離/2	$L$	8.750 m
軸距/2	$a$	1.250 m
車輪・レールの左右接触点間隔/2	$b$	0.750 m
ボルスタアンカ左右間隔/2	$b_0$	1.420 m
軸バネの左右間隔/2	$b_1$	1.050 m
まくらばねの左右間隔/2	$b_2$	1.225 m
レール面上車体重心の高さ	$H_b$	1.825 m
レール面上台車重心の高さ	$H_r$	0.655 m
車軸中心-車体重心間高さ	$h_1$	1.370 m
まくらバネ中央-車体重心間高さ	$h_2$	0.750 m
台車重心-まくらバネ中心間高さ	$h_3$	0.420 m
車輪の公称半径	$r$	0.455 m
車両長/2	$L_c$	12.500 m
半車体重量	$m$	2.203ts <sup>2</sup> /m
車体 $x$ 軸廻りの慣性モーメント/2	$I_x$	5.856ts <sup>2</sup> m
車体 $y$ 軸廻りの慣性モーメント/2	$I_y$	102.8 ts <sup>2</sup> m
車体 $z$ 軸廻りの慣性モーメント/2	$I_z$	102.8 ts <sup>2</sup> m
台車わく質量	$m_r$	0.567ts <sup>2</sup> /m
台車わく $x$ 軸廻りの慣性モーメント	$I_{rx}$	0.204 ts <sup>2</sup> m
台車わく $y$ 軸廻りの慣性モーメント	$I_{ry}$	0.817 ts <sup>2</sup> m
台車わく $z$ 軸廻りの慣性モーメント	$I_{rz}$	0.817 ts <sup>2</sup> m
輪軸質量	$m_w$	0.246ts <sup>2</sup> /m
輪軸 $x$ 軸廻りの慣性モーメント	$I_{wx}$	0.138 ts <sup>2</sup> m
輪軸 $z$ 軸廻りの慣性モーメント	$I_{wz}$	0.138 ts <sup>2</sup> m
ボルスタアンカ弾性 (1台車片側)	$K_1$	500.0 t/m
左右まくらバネ定数 (1台車片側)	$K_2$	35.0 t/m
左右まくらバネ減衰係数	$C_2$	3.570 ts/m
上下まくらバネ定数 (1台車片側)	$K_3$	57.02 t/m
上下まくらバネ減衰係数	$C_3$	4.986 ts/m
前後バネ定数 (1台車片側)	$K_{w2}$	1750.0 t/m
左右バネ定数 (1台車片側)	$K_{wy}$	658.15 t/m
軸バネ定数 (1台車片側)	$K_{wz}$	115.3 t/m
軸バネ減衰係数	$C_{wz}$	4.000 ts/m
静輪重	$P_s$	7.995 t
連結部上下バネ定数	$K_c$	100.0 t/m
連結部上下バネ減衰係数	$C_c$	0.05 ts/m

\*数値は、200系新幹線車両をモデルとしたもの

グ  $\theta_r$ 、およびヨーイング  $\phi_r$  の5自由度を有する。輪軸は、各々の輪軸重心で左右方向  $y_w$ 、上下方向  $z_w$ 、ローリング  $\phi_w$ 、ヨーイング  $\psi_w$  の4自由度を有する。

したがって、1車両あたりの自由度は31となるが、輪軸の上下方向およびローリングは線路構造物の変位に従属することとなり、独立した自由度は23である。

以下では、これらの自由度に対し、車両番号には  $n$  ( $=1 \sim N$  (車両数)), 各車両内の台車わく番号に  $i$  ( $=1, 2$ ), 各台車わく内の輪軸番号に  $j$  ( $=1, 2$ ) の添字をつけて示す。

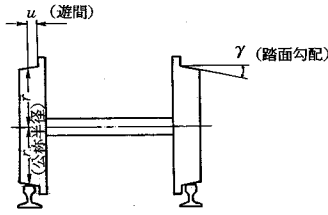


図-2 輪軸モデル

c) 輪軸の蛇行動による上下およびローリング運動

車輪の蛇行動を正確に表現するためには、円弧の組み合わせによる車輪踏面およびレール頭面形状を再現し、逐次の接触点の変化を考慮する必要があるが、非常に複雑な計算を要する<sup>13)</sup>。このため、ここでは車輪の形状を図-2に示すように、一定勾配を有する円錐踏面に鉛直のフランジが付いたものとして簡略化している。

これより車輪の公称半径を  $r$ 、車輪の踏面勾配を  $\gamma$  とすると、左右の車輪の実質半径  $r_{iA}$ 、 $r_{iB}$  は、輪軸とレールの横方向の相対変位の値により、式(1)で表される。(ここで添字  $A$ 、 $B$  は、それぞれ車両進行方向の左右を意味し、複合は同順とする)

$$\begin{cases} r_{iA} = r + \gamma \cdot y_{iA} & (y_{iA} \leq u \text{ のとき}) \\ r_{iB} = r + \gamma \cdot u & (y_{iA} > u \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $u$  は車輪とレールの遊間、 $y_{iA}$ 、 $y_{iB}$  はそれぞれ左右の車輪とレールの横方向の相対変位を表す。

これより輪軸中心は、車輪とレールの横方向相対変位に応じて、式(2)、(3)に示す上下およびローリングの運動  $e_{zij}$ 、 $e_{\phi ij}$  を生じる。

$$e_{zij} = (r_{iA} + r_{iB}) / 2 - r \quad (2)$$

$$e_{\phi ij} = (r_{iA} - r_{iB}) / (2b) \quad (3)$$

これらは、変位ベクトル  $e_R$  として構造物との連成に用いる。

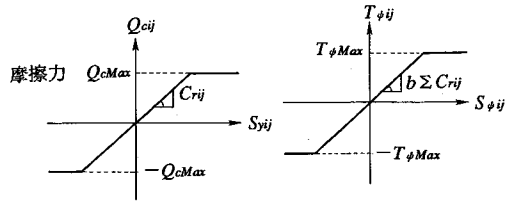
(2) 車輪とレール間の相互作用力

車輪とレールの間の相互作用力としてクリープ力とフランジがレールと衝突する場合のフランジ圧を考慮する。

a) クリープ力

車輪とレール間のクリープ力  $Q_c$  は、車輪踏面とレール頭面の接触点に対して輪軸の左右変位により生じる横クリープ力と輪軸のヨーイングにより生じる縦クリープ力のみを考慮し、これらは車輪のすべり率と Chartet<sup>14)</sup> によるクリープ係数との積の形で表されると仮定したモデルを用いた。このため接触面の法線方向まわりの回転に対するスピンモーメントはヨーイング角速度が小さいことを前提に無視している。

左右車両の横方向のすべり率  $S_{yij}$ 、 $S_{\phi ij}$  および車両



(a) クリープ力  $Q_c$  (b) クリープ力によるヨーイングモーメント  $T_\phi$

図-3 クリープ力とすべり率

の縦方向のすべり率  $S_{\phi ij}$  は、車両の走行速度を  $v$ 、車両の公称半径を  $r$ 、車両とレールの左右接触点間隔の  $1/2$  を  $b$  とすると、それぞれ式(4)、(5)により表される。

$$S_{yij} = (\pm \dot{y}_{ij} + r \dot{\phi}_{wij} - v \phi_{wij}) / v \quad (4)$$

$$S_{\phi ij} = (\dot{\phi}_{wij} + (v/r) \phi_{wij}) b / v \quad (5)$$

ただし、 $\dot{y}_{ij}$  は、左右の車輪とレール間の相対速度で左右レールの横方向の速度を  $\dot{y}_{RiA}$ 、 $\dot{y}_{RiB}$  として式(6)で表される。

$$\dot{y}_{ij} = \pm \dot{y}_{wi} \mp \dot{y}_{RiA} \quad (6)$$

また、動輪重に対するクリープ係数は式(7)で与えられる。

$$C_{rij} = C_r \cdot (1 + (\Delta P / P_s)_{ij})^{2/3} \quad (7)$$

ここで、 $C_r$  は静輪重に対するクリープ係数、 $(\Delta P / P_s)$  は輪重変動率を表す。

これより横方向クリープ力  $Q_c$  および縦方向クリープ力によるヨーイングモーメント  $T_\phi$  はそれぞれ式(8)、(9)により表される。

$$Q_{cij} = -C_{rij} \cdot S_{yij} \quad (8)$$

$$T_{\phi ij} = -b \cdot (C_{riA} + C_{riB}) \cdot S_{\phi ij} \quad (9)$$

ただし、すべり率が大きくなるとクリープ力  $Q_c$  は飽和し摩擦力に移行する。また、クリープ力によるヨーイングモーメント  $T_\phi$  についても、摩擦力に対応した限界値に移行する。クリープ力とすべり率との関係を模式的に図-3に示す。

b) フランジ圧

車輪とレールとの相対変位が遊間  $u$  を超えると、フランジはレールにぶつかり、レールの小返り変位に比例する反力としてフランジ圧  $Q_f$  が発生する(図-4)。

車輪とレールとの相対変位  $y_{iA}$ 、 $y_{iB}$  は、レール中心の横方向変位を  $y_R$  とし、クリープ力  $Q_{ciA}$ 、 $Q_{ciB}$  によるレールの変形を考慮すると、縮みを正として次式で表される。

$$y_{iA} = \pm y_{wi} \pm Q_{ciA} / K_p \mp (y_{Rij} + e_{yij}) \quad (10)$$

ここで、 $K_p$  はレールの小返りばね定数、 $e_{yij}$ 、 $e_{yijB}$  は左右のレールの狂い ( $y$  軸正方向を正)

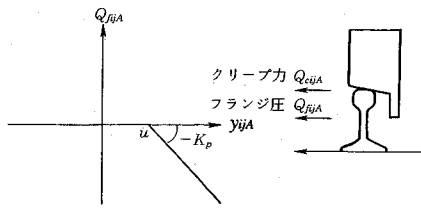


図-4 車輪とレールの相対変位とフランジ圧 (左側)

これより、フランジ圧  $Q_f$  は、式 (11) により得られる。

$$\begin{cases} Q_{fijA} = \mp K_b \cdot (y_{ijA} - u) (y_{ijA}, y_{ijB} > u) \\ Q_{fijB} = 0 & (y_{ijA}, y_{ijB} \leq u) \end{cases} \quad (11)$$

### c) 横 圧

各車輪に作用する横圧  $Q$  は、横方向クリープ力  $Q_c$  とフランジ圧  $Q_f$  の和として式 (12) により与えられる。

$$Q_{ijA} = Q_{cijA} + Q_{fijA} \quad (12)$$

## (3) 車両の運動方程式

直線走行の場合の車両の運動方程式を車体、台車わく、輪軸に分けてそれぞれを次に示す。ただし、すべての方向の変位は微小であるとし、その微小振動を扱う。また、車体、台車わく、輪軸それぞれの慣性主軸はすべてそれぞれの座標軸に一致するものとする。

### a) 車体の運動方程式

車体  $n$  の重心位置での左右、上下方向、ローリング、ピッチングおよびヨーイングの運動方程式は、それぞれ式 (13)~(17) に示すとおりである。

$$2M\ddot{y} - \sum_{i,m} (-1)^m C_2 \dot{q}_{yim} - \sum_{i,m} (-1)^m K_2 q_{yim} = 0 \quad (13)$$

$$2M\ddot{z} + \sum_{i,m} C_3 \dot{q}_{zim} + C_c (\dot{q}_{c2n-1} - \dot{q}_{c2n}) + \sum_{i,m} K_3 q_{zim} + K_c (q_{c2n-1} - q_{c2n}) = -2Mg \quad (14)$$

$$2I_x \ddot{\phi} - \sum_{i,m} (-1)^m C_3 \dot{q}_{zim} b_2 - \sum_{i,m} (-1)^m K_3 q_{zim} b_2 - \sum_{i,m} (-1)^m C_2 \dot{q}_{yim} h_2 - \sum_{i,m} (-1)^m K_2 q_{yim} h_2 = 0 \quad (15)$$

$$2I_y \ddot{\theta} + \sum_{i,m} (-1)^i C_3 \dot{q}_{zim} L - C_c L_c (\dot{q}_{c2n} + \dot{q}_{c2n-1}) + \sum_{i,m} (-1)^i K_3 q_{zim} L - K_c L_c (q_{c2n} + q_{c2n-1}) = 0 \quad (16)$$

$$2I_z \ddot{\psi} + \sum_{i,m} (-1)^{i+m} C_2 \dot{q}_{yim} L + \sum_{i,m} (-1)^{i+m} K_2 q_{yim} L + \sum_i 2K_1 (\psi - \phi_{Ti}) b_0^2 = 0 \quad (17)$$

ここで、 $M$  は半車体の質量、 $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$  はそれぞれ車体の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸まわりの慣性モーメント、 $g$  は重力加速度、 $q_{xim}$ 、 $q_{yim}$ 、 $q_{zim}$  はそれぞれ車体と台車わく  $i$  の  $m$  側 ( $m=1$  で左側、 $m=2$  で右側) の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向のばねの伸びで、式 (18)~(20) による。 $q_{c2n}$  は車両  $n$  と  $n+1$  間の連結器の上下方向のばねの伸び、 $L_c$  は車両半長

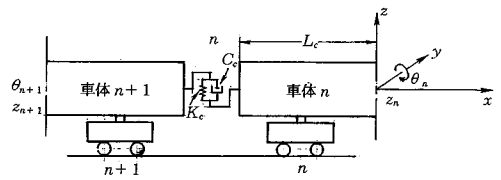


図-5 連結器の力学モデル

を示す。

$$q_{xim} = (-1)^m (\psi - \phi_{Ti}) b_0 \quad (18)$$

$$q_{yim} = -(-1)^m y + (-1)^m y_{Ti} + (-1)^{i+m} \phi L - (-1)^m \phi h_2 - (-1)^m \phi_{Ti} h_s \quad (19)$$

$$q_{zim} = z - z_{Ti} + (-1)^i \theta L - (-1)^m \phi b_2 + (-1)^m \phi_{Ti} b_2 \quad (20)$$

$$q_{c2n} = (z_{n+1} - z_n) - L_c (\theta_{n+1} + \theta_n) \quad (21)$$

ただし、 $N$  を車両数とすると  $q_{c2N} = 0$  である。

### b) 台車わくの運動方程式

台車わく  $i$  の重心位置での左右、上下、ローリング、ピッチングおよびヨーイングの運動方程式は、 $M_T$  を台車わくの質量、 $I_{Tx}$ 、 $I_{Ty}$ 、 $I_{Tz}$  を台車わくの  $x_T$ 、 $y_T$ 、 $z_T$  軸まわりの慣性モーメントとして (22)~(26) のように表される。

$$M_T \ddot{y}_{Ti} + \sum_m (-1)^m C_2 \dot{q}_{yim} + \sum_m (-1)^m K_2 q_{yim} - \sum_{j,m} (-1)^m K_{wy} q_{wym} = 0 \quad (22)$$

$$M_T \ddot{z}_{Ti} - \sum_m C_3 \dot{q}_{zim} - \sum_m K_3 q_{zim} + \sum_{j,m} K_{wz} q_{wzjm} + \sum_{j,m} C_{wz} q_{wzjm} = -M_T g \quad (23)$$

$$I_{Tx} \ddot{\phi}_{Ti} + \sum_m (-1)^m C_3 \dot{q}_{zim} b_2 + \sum_m (-1)^m K_3 q_{zim} b_2 - \sum_{j,m} (-1)^m C_{wz} \dot{q}_{wzjm} b_1 - \sum_{j,m} (-1)^m K_{wz} q_{wzjm} b_1 - \sum_m (-1)^m C_2 \dot{q}_{yim} h_s - \sum_m (-1)^m K_2 q_{yim} h_s - \sum_{j,m} (-1)^m K_{wy} q_{wym} (H_T - r) = 0 \quad (24)$$

$$I_{Ty} \ddot{\theta}_{Ti} + \sum_{j,m} (-1)^j C_{wz} \dot{q}_{wzjm} a + \sum_{j,m} (-1)^j K_{wz} q_{wzjm} a - \sum_{j,m} (-1)^j K_{wx} q_{wxjm} (H_T - r) = 0 \quad (25)$$

$$I_{Tz} \ddot{\psi}_{Ti} + \sum_{j,m} (-1)^{j+m} K_{wy} q_{wym} a + \sum_{j,m} (-1)^{j+m} K_{wx} q_{wxjm} b_1 + 2K_1 (\psi_{Ti} - \psi) b_0^2 = 0 \quad (26)$$

ただし、 $q_{wxjm}$ 、 $q_{wym}$ 、 $q_{wzjm}$  はそれぞれ台車わく  $i$ 、輪軸  $j$  の  $m$  側の前後ばね ( $x_w$  方向)、左右ばね ( $y_w$  方向) および軸ばね ( $z_w$  方向) の伸びで、式 (27)~(29) による。

$$q_{wxjm} = (-1)^{j+m} (\phi_{Ti} - \phi_{wij}) b_1 \quad (27)$$

$$q_{wijm} = -(-1)^m y_{Ti} + (-1)^{j+m} \phi_{Ti} a \\ + (-1)^m y_{wij} - (-1)^m \phi_{Ti} (H_T - r) \quad (28)$$

$$q_{wzijm} = z_{Ti} - z_{wij} + (-1)^j \theta_{Ti} a - (-1)^m (\phi_{Ti} - \phi_{wij}) b_1 \quad (29)$$

### c) 輪軸の運動方程式

台車わく  $i$ ・輪軸  $j$  の重心位置での左右、上下、ローリングおよびヨーイングの運動方程式は、 $M_w$  を輪軸の質量、 $I_{wx}$ 、 $I_{wz}$  をそれぞれ輪軸の  $x_w$  軸、 $z_w$  軸まわりの慣性モーメント、 $Q_{ij}$  を横圧として以下のように表される。

$$M_w \ddot{y}_{wij} + \sum_m (-1)^m K_{wz} q_{wzijm} = \sum_m Q_{ijm} \quad (30)$$

$$M_w \ddot{z}_{wij} - \sum_m C_{wz} \dot{q}_{wzijm} - \sum_m K_{wz} q_{wzijm} = -M_w g \quad (31)$$

$$I_{wz} \ddot{\phi}_{wij} + \sum_m (-1)^m C_{wz} \dot{q}_{wzijm} b_1 \\ + \sum_m (-1)^m K_{wz} q_{wzijm} b_1 = 0 \quad (32)$$

$$I_{wx} \ddot{\psi}_{wij} - \sum_m (-1)^{j+m} K_{wz} q_{wzijm} b_1 = -T_{\phi ij} \quad (33)$$

### d) 車両の運動方程式

各車両の運動方程式は、式 (18)~(21)、式 (27)~(29) を式 (13)~(17)、(22)~(26)、(30)~(33) に代入して、これらを座標変換しながら整理すると式 (34) のようにマトリックス表示することができる。

$$M_V \ddot{x}_V + C_V \dot{x}_V + K_V x_V = F_V \quad (34)$$

ここで、 $x_V$  は 31 自由度からなる車両の変位ベクトル、 $M_V$ 、 $C_V$ 、 $K_V$  は、それぞれ車両の質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックス、また、 $F_V$  は車両への荷重ベクトルを表し、 $F_V$  には横圧およびローリング力の反力としての荷重ベクトル  $Q_V$  を含む。

### (4) 線路構造物の運動方程式

レールが固定されている線路構造物は、梁・シェルなどの有限要素によりモデル化される。全体座標系における運動方程式は式 (35) のようにマトリックス表示することができる。

$$M_B \ddot{X}_B + C_B \dot{X}_B + K_B X_B = F_B \quad (35)$$

ここで、 $X_B$  は線路構造物の節点変位ベクトル、 $M_B$ 、 $C_B$ 、 $K_B$  はそれぞれ線路構造物の質量マトリックス、減衰マトリックス、および剛性マトリックス、また  $F_B$  は線路構造物の節点荷重ベクトルを表している。

## 3. 運動方程式の連成とモード解析法の適用

前章に示した車両および線路構造物の各々の系の運動方程式の連成は、式 (34)、(35) に示した各運動方程式を重ね合わせるにより得られるが、ここで対象としている連成応答解析は、次のような特徴がある。

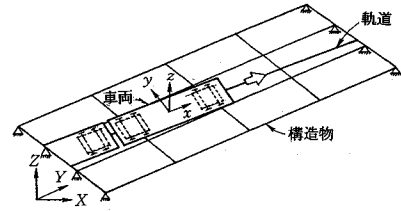


図-6 各座標系における車両および線路構造物

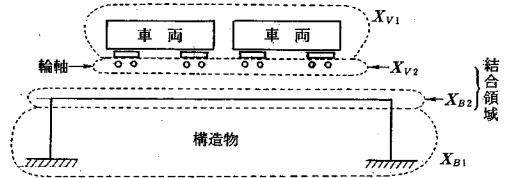


図-7 連成を考慮する車両と線路構造物の結合領域

- ① 線路構造物は FEM でモデル化されるため、一般に自由度が大きくなる。
- ② 車両およびレール車輪間の力学モデルに非線形要素が含まれる。
- ③ 車両は時々刻々移動する。

このような非線形項を含む運動方程式の解法としては、一般には直接積分法が用いられ、既往の研究 4)~6) においてもこの方法を採用しているが、解析モデルの自由度が大きくなると全体系の運動方程式を直接積分する解法では、収束に必要な時間ステップ幅との関係から計算時間が過大となり、実用に適さない場合も生じる。

一方、線路構造物の動的応答は、解析モデルの自由度が大きい場合でも、一般に幾つかの低次モード成分により支配されることが多く、高次モード成分を無視できる場合が多い。また、支配モードに関する検討も構造特性を把握するために有益であるので、ここではモード解析法を非線形応答問題に応用した手法<sup>15)</sup>を用い、解析の効率化を図ることとした。

このため車両と線路構造物の運動方程式の連成方法は、図-6、図-7 に示すように、車両が設定された軌道上を移動することを考慮して、両系が互いに接する結合領域内の変位の連続条件および力の釣合条件に関して定式化を図り、これを基に全体運動方程式を誘導することとした。

さらに、誘導された全体運動方程式の各項は、モード解析法を利用するために線形項と非線形項とに分離されるが、この過程で特性マトリックスは、車両と線路構造物が各々独立したサブストラクチャーとして固有値解析が可能な形態となり、計算の効率化のみでなく、車両と線路構造物の振動モードを分けた取扱いが可能となる利点を有する。

以下にこれらにより構成される解析法を示す。

(1) 運動方程式の連成

車両と線路構造物の運動方程式の連成は、図-7に示すように各系の要素のうち、両者が互いに接する結合領域の変位の連続条件および力の釣合条件を満足させることにより図られる。ただし、ここでの変位の連続条件は、車両が刻々移動するため、車輪が接している左右レールの中心位置に仮想節点を設定して、これに関して検討することとした。

車両の変位ベクトル  $x_v$  を、線路構造物との結合領域となる輪軸の上下とローリングの変位からなるサブベクトル  $x_{v2}$  と、 $x_{v2}$  以外のサブベクトル  $x_{v1}$  の二つに分割する。

$$x_v = \begin{bmatrix} x_{v1} \\ x_{v2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

ただし、

$$x_{v1} = \{y, z, \phi, \theta, \psi, y_{Ti}, z_{Ti}, \phi_{Ti}, \theta_{Ti}, \psi_{Ti}, y_{wij}, \psi_{wij}\}^T$$

$$x_{v2} = \{x_{wij}, \phi_{wij}\}^T \quad (i, j=1, 2) \quad (37)$$

また、線路構造物の節点変位ベクトル  $X_B$  を、車輪が接している左右レールの中心位置での線路構造物の仮想変位ベクトル  $U_B$  を得るために必要な節点変位ベクトル  $X_{B2}$  と、 $X_{B2}$  以外の  $X_B$  のサブベクトル  $X_{B1}$  の二つに分割する。

$$X_B = \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

これより車両系の結合領域と線路構造物系の結合領域とは、車輪がレール上をスムーズに進行するという条件の下で線路構造物系による仮想節点変位ベクトル  $U_B$  と車両系による仮想節点変位ベクトル  $u_B$  を介して、変位の連続条件のもとに次に示す関係式により結ばれる。

まず、 $U_B$  を線路構造物系の結合領域サブベクトル  $X_{B2}$  から得るための補間関数を  $N$  とし、線路構造物系(全体系)から車両系への座標変換マトリックスを  $T$  とすると、

$$U_B = NX_{B2} \quad (39)$$

$$u_B = TU_B \quad (40)$$

となる。ただし、車輪近傍の節点番号およびその節点からの距離は、車輪の移動により変化するため、 $N$  は時刻  $t$  の関数である。

さらに、車両系での仮想節点変位ベクトル  $u_B$  は、レールの不整量と輪軸の蛇行によって生じる輪軸の上下およびローリング運動(式(2), (3)参照)を加えたベクトル  $e_R$  を用いて車両系の結合領域サブベクトルの  $x_{v2}$  と次のように結ばれる。

$$x_{v2} = u_B + e_R \quad (41)$$

式(39)~(41)より、式(42)を得る。

$$x_{v2} = RX_{B2} + e_R \quad (42)$$

$$\text{ただし、} \quad R = TN \quad (43)$$

これをマトリックス表示すると次式が得られる。

$$x_v = A\tilde{X}_v + w \quad (44)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} I & O \\ O & R \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\tilde{X}_v = \begin{bmatrix} x_{v1} \\ X_{B2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$w = \begin{bmatrix} O \\ e_R \end{bmatrix} \quad (47)$$

式(44)およびその時間微分(式(48)(49))を式(34)に代入し、前方より  $A^T$  を掛けて整理すると、式(50)に示す線路構造物と連成した車両の運動方程式が得られる。

$$\dot{x}_v = A\dot{\tilde{X}}_v + A\ddot{\tilde{X}}_v + \dot{w} \quad (48)$$

$$\ddot{x}_v = A\ddot{\tilde{X}}_v + 2A\dot{\tilde{X}}_v + A\ddot{\tilde{X}}_v + \ddot{w} \quad (49)$$

$$\bar{M}_v \ddot{\tilde{X}}_v + \bar{C}_v \dot{\tilde{X}}_v + \bar{K}_v \tilde{X}_v = \bar{F}_v \quad (50)$$

ただし、 $\bar{M}_v$ 、 $\bar{C}_v$ 、 $\bar{K}_v$ 、 $\bar{F}_v$  は、それぞれ式(44)の制約条件を導入した車両の質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックス、および荷重ベクトルであり、次に示すとおりである。

$$\bar{M}_v = A^T M_v A \quad (51)$$

$$\bar{C}_v = A^T C_v A + 2A^T M_v \dot{A} \quad (52)$$

$$\bar{K}_v = A^T K_v A + A^T M_v \ddot{A} + A^T C_v \dot{A} \quad (53)$$

$$\bar{F}_v = A^T F_v - A^T M_v \ddot{w} - A^T C_v \dot{w} - A^T K_v w \quad (54)$$

式(50)と式(35)を重ね合わせることにより、車両と線路構造物の連成を考慮した全体の運動方程式が式(55)のように得られる。

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (55)$$

ここに、

$$X = \begin{bmatrix} x_{v1} \\ X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

また、 $M$ 、 $C$ 、 $K$ 、 $F$  はそれぞれ全体質量マトリックス、全体減衰マトリックス、全体剛性マトリックスおよび全体荷重ベクトルであり、次に示すとおりである。

$$M = \begin{bmatrix} M_{v11} & O & M_{v12}R \\ O & M_{B11} & M_{B12} \\ R^T M_{v21} & M_{B21} & M_{B22} + R^T M_{v22}R \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{v11} & O & C_{v11}R + 2M_{v12}\dot{R} \\ O & C_{B11} & C_{B12} \\ R^T C_{v21} & C_{B21} & C_{B22} + R^T C_{v22}R + 2R^T M_{v22}\dot{R} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{V11} & 0 & K_{V12}R + M_{V12}\ddot{R} + C_{V12}\dot{R} \\ 0 & K_{B11} & K_{B12} \\ R^T K_{V21} & K_{B21} & K_{B22} + R^T K_{V22}R + R^T M_{V22}\ddot{R} \\ & & + R^T C_{V22}\dot{R} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{V1} - M_{V12}\ddot{e}_R - C_{V12}\dot{e}_R - K_{V12}e_R \\ F_{B1} \\ F_{B2} + R^T F_{V2} - R^T M_{V22}\ddot{e}_R - R^T C_{V22}\dot{e}_R \\ + R^T K_{V22}e_R + \tilde{Q} \end{bmatrix}$$

ただし、 $M_V$ は対角マトリックスのため $M_{V12}$ 、 $M_{V21}$ は $0$ である。 $N$ には線形補間関数を用いており、定速走行ゆえに $\ddot{R}$ も $0$ となる。

また、 $\tilde{Q}$ は、式(34)中の $F_V$ に含まれる $Q_V$ の反力を座標変換し、関係節点に比例配分したものである。

## (2) 非線形応答に対するモード解析の適用

モード解析法は、通常、線形問題の解析法として利用されるのが一般であるが、運動方程式を線形項と非線形項に分離した後に非線形項を外力項に加え、線形項のみから得られる固有モードによる一般化座標系を利用して非線形項に対する収束計算を行うことにより、非線形振動の解析を行うことができる。

これより、式(55)において時間依存の非線形マトリックスである $M$ 、 $C$ 、 $K$ を次に示すように線形部分(定数)と時間依存の非線形部分(応答の関数)に分ける。

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_n \\ C &= C_0 + C_n \\ K &= K_0 + K_n \end{aligned} \quad (57)$$

ここで、マトリックスの添字 $0$ 、 $n$ はそれぞれ、線形項および非線形項を表す。

式(57)を式(55)に代入し、非線形項を右辺に移項すると式(58)に示すようになる。

$$M_0\ddot{X} + C_0\dot{X} + K_0X = F - M_n\ddot{X} - C_n\dot{X} - K_nX \quad (58)$$

ここに、

$$M_0 = \begin{bmatrix} M_{V11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{B11} & M_{B12} \\ 0 & M_{B21} & M_{B22} \end{bmatrix}$$

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^T M_{V22} R \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_{V11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{B11} & C_{B12} \\ 0 & C_{B21} & C_{B22} \end{bmatrix}$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{V11}R + 2M_{V12}\dot{R} \\ 0 & 0 & 0 \\ R^T C_{V21} & 0 & R^T C_{V22}R + 2R^T M_{V22}\dot{R} \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{V11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{B11} & K_{B12} \\ 0 & K_{B21} & K_{B22} \end{bmatrix}$$

$$K_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{V12}R + C_{V12}\dot{R} \\ 0 & 0 & 0 \\ R^T K_{V21} & 0 & R^T K_{V22}R + R^T C_{V22}\dot{R} \end{bmatrix}$$

変位ベクトル $X$ を式(59)に示すように $p$ 個の固有ベクトル $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ の線形結合で近似してモード座標に変換すれば式(60)を得る。

$$X = z_1\phi_1 + z_2\phi_2 + \dots + z_p\phi_p \quad (59)$$

$$X = \Phi z \quad (60)$$

ただし、

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p] \quad (61)$$

$$z = [z_1, z_2, \dots, z_p]^T \quad (62)$$

これより、式(60)を式(58)に代入し、 $\Phi^T$ を前方より乗じれば $\Phi$ は式(63)、(64)を満足するため、線形部分には固有モードの直交性が成立し、式(65)を得る。

$$\Phi^T M_0 \Phi = I \quad (63)$$

$$\Phi^T K_0 \Phi = \text{diag}[\omega_i^2] \quad (64)$$

$$\ddot{z} + \tilde{C}_0 \dot{z} + \text{diag}[\omega_i^2] z = \tilde{F} \quad (65)$$

ここで、 $I$ は単位マトリックス、 $\text{diag}[\omega_i^2]$ は $i$ 番目の対角成分が $\omega_i^2$ である対角マトリックスを表わし、 $\omega_i$ は $i$ 次の固有角振動数である。

ただし、

$$\tilde{C}_0 = \Phi^T C_0 \Phi \quad (66)$$

$$\tilde{F} = \Phi^T (F - M_n \ddot{X} - C_n \dot{X} - K_n X) \quad (67)$$

固有モード $\Phi$ は、 $\lambda$ を固有値とすると式(68)により得られる。

$$K_0 \Phi = \lambda M_0 \Phi \quad (68)$$

さらに、 $K_0$ 、 $M_0$ のスパース性、すなわち、これらのマトリックスにおける車両の変位ベクトル $x_{V1}$ と線路構造物の変位ベクトル $X_{B1}$ 、 $X_{B2}$ とのクロス部分は、すべて $0$ であることから、式(68)は、車両と線路構造物に関係した独立の固有値問題として扱うことができる。

$$K_{V0} \Phi_V = \lambda_V M_{V0} \Phi_V \quad (69)$$

$$K_{B0} \Phi_B = \lambda_B M_{B0} \Phi_B \quad (70)$$

ここに、 $K_{V0}$ 、 $M_{V0}$ はそれぞれ $K_0$ 、 $M_0$ の $x_{V1}$ に対応したサブマトリックス、 $K_{B0}$ 、 $M_{B0}$ はそれぞれ線路構造物の変位ベクトル $X_{B1}$ 、 $X_{B2}$ に対応したサブマトリックスを表す。

式(65)は、数値積分法により式(71)に示すように

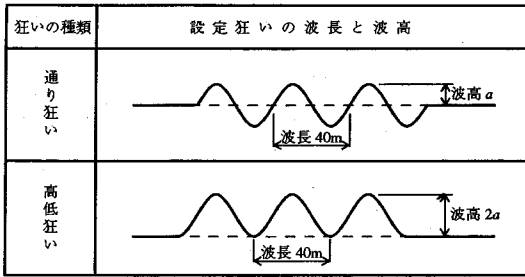


図-8 軌道不整の形状

計算ステップ時間  $\Delta t$  内の反復計算として解くこととなり、ここでは Newmark の  $\beta$  法 ( $\beta=1/4$ ) を用いて求めた。

$$z_{i+\Delta t, r} = f(z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i, z_{i+\Delta t, r-1}) \quad (71)$$

ここに、 $f$  は関数、 $r$  は反復回数

#### 4. 解析例

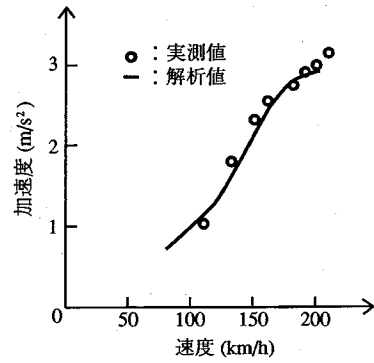
前章までに示した手法に基づいて、解析プログラム「DIASTARS (Dynamic Interaction Analysis for Shinkansen Train And Railway Structures)」を構築しており、これを用いた車両走行シミュレーション解析の例を次に示す。

##### (1) 不整がある軌道上を走行する場合の車体振動

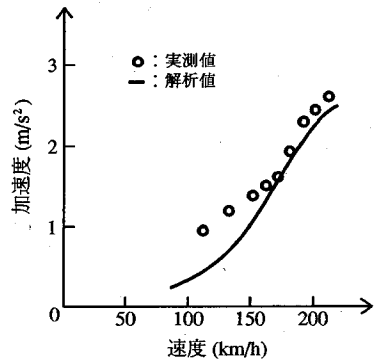
一定の波長と波高を有する不整がある軌道上を車両が走行する場合の解析結果を示す。車両モデルには東北・上越新幹線車両 200 系の諸元<sup>6)</sup>を用いている (表-1 参照)。

不整の形状は、図-8 に示すような上越新幹線において行われた設定軌道不整に対する実測結果のある正弦波波形を用いた。その波長および波数は、左右(通り狂い)、上下(高低狂い)ともにそれぞれ 40 m、3 波で、波高は通り・高低に対してそれぞれ 8 mm、6.9 mm とした。

列車速度と先頭車両の後台車直上位置の車体最大応答加速度(全振幅値)との関係を図-9 に示す。同図には同位置での車体応答の実測値(数値解析と同条件下のもの)も示してある。通り狂いに対する左右加速度においては実測値と解析値はよい一致を示しており、簡略な車輪・レール間のクリープ力モデルを用いても車両応答が比較的精度よく求められることが得られた。一方、高低狂いに対する上下加速度をみると、170 km/h 以上の領域では実測値と解析値はよい一致を示しているが、110 km/h~170 km/h の領域で実測値の方が大きな値を示している。これは、解析では純粋に高低狂いのみが与えられているが、実測では車体重量による軌道支持物の弾性変形も付加されており、特にこの速度領域で台車直上位



(a) 左右加速度(後台車位置)



(b) 上下加速度(後台車位置)

図-9 列車速度と車体最大応答加速度との関係

置の応答に比較的大きな影響を与えるピッチングのモードを刺激したものと考えられる。

これらの結果から本解析法よりに車両応答が比較的精度よく求められることが得られた。

##### (2) 高架橋上を走行する場合の車体振動

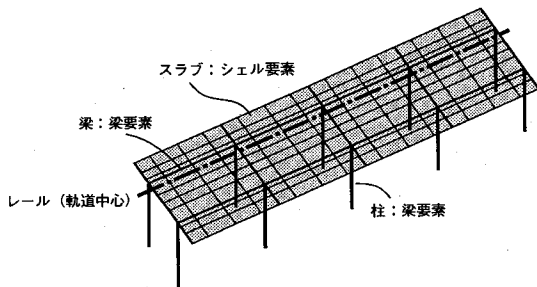
次に構造物の方も振動体として取り扱った例としてビームスラブ式ラーメン高架橋上を車両が高速で走行する場合の解析結果を示す。

車両モデルは前出の新幹線車両 200 系の諸元を用いており、編成両数は 12 両、走行速度は 350 km/h とした。高架橋はスパン 8 m、高さ 7 m の一般的な複線ラーメン高架橋(4 径間)の諸元を用い、図-10 に示すようにスラブ部分はシェル要素で、梁および柱部分は梁要素でそれぞれモデル化した。

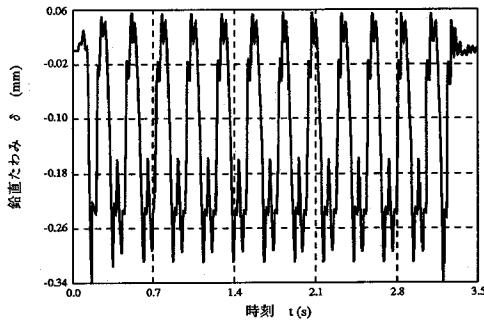
ここで軌道は直線とし、不整はないものとした。

図-11 に第 2 径間スパン中央(スラブ)での鉛直たわみ波形を、図-12 に先頭車両の後台車直上位置での車体鉛直応答加速度波形をそれぞれ示す。図-11 では不静定構造物であるため比較的複雑な応答波形が生じているが、最先頭および最後尾台車以外は連結器を挟む 2

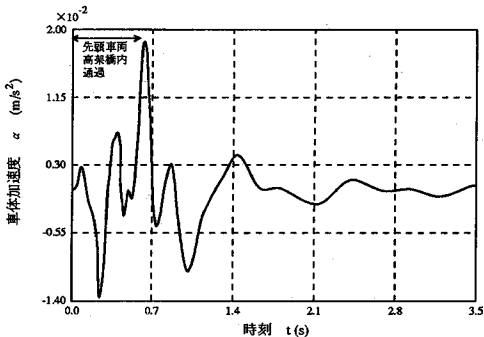




図一10 高架橋モデル



図一11 第2径間スパン中央の鉛直たわみ波形



図一12 先頭車両の車体鉛直応答加速度波形

台車毎のたわみ波形が生じていることがみられる。一方、最大値をみると、たわみ量は最大でも約0.4 mmと小さく、ラーメン高架橋では新幹線の高速走行に対しても過度の振動が生じないことが分かる。また、車体鉛直応答加速度では、着目台車が高架橋へ進入した時点と高架橋から進出した時点にピークが生じるが、最大値は片振幅で0.02 m/s<sup>2</sup>と小さく、非常にスムーズな走行が確保され、将来の高速運転においても十分良質な乗心地が確保されることが分かる。

## 5. まとめ

(1) 鉄道車両が軌道・線路構造物上をスムーズに走行

する場合の連成応答を求めるために、車両を三次元のばね・マス・ダンパ系の結合構造でモデル化し、軌道・線路構造物を三次元の有限要素でモデル化し、さらに、レール・車輪間の非線形力を考慮した定式化を行い、全体系の運動方程式を導いた。

(2) 多自由度の編成車両および線路構造物を扱う実用解析においても利用可能とするために、数値解析法としてモード解析を非線形解析に応用した手法を採用し、さらに、特性マトリクスのスパース性を考慮して、全体系の運動方程式を解くにあたり、車両および線路構造物に関して独立した固有値問題として取扱うことを可能とし、解析の効率化を図った。

(3) 本法を用いた解析プログラムによる計算結果から、軌道不整を含む区間における車両運動について比較的高精度の算出が可能であることが確かめられた。これにより高速走行時の列車走行性評価を行うのに有効な手法を得た。

## 参考文献

- 1) 松浦章夫：高速鉄道における橋桁の動的応答に関する研究，鉄道技術研究報告，No.1074，1978.3.
- 2) 松浦章夫：高速鉄道における橋桁の動的挙動に関する研究，土木学会論文報告集，第256号，1978.12.
- 3) 涌井一，小林隆：高速鉄道におけるトラス橋部材の衝撃係数に関する理論的研究，鉄道技術研究報告，No.1220，1982.7.
- 4) 松浦章夫，涌井一：二軸貨車の走行性からみた長大吊橋の折れ角限度，鉄道技術研究報告，No.1086，1978.7.
- 5) 涌井一：新幹線車両の走行性からみた長大吊橋の折れ角限度，鉄道技術研究報告，No.1087，1978.7.
- 6) 山田善一，小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数に関する考察，土木学会論文集，第148号，pp.40-50，1967.12.
- 7) 川谷充郎，小松定夫，佐々木孝：走行自動車荷重を受けるプレートガーダー橋の動的応答特性に関する研究，土木学会論文集，No.392/I-9，pp.351-358，1988.4.
- 8) 本田秀行，小堀為雄，山田善一：多径間連続桁橋の動的応答と衝撃係数に関する考察，土木学会論文集，第331号，pp.65-73，1983.3.
- 9) 本田秀行，小堀為雄，山田善一：道路鋼桁橋の走行荷重による動的影響評価，土木学会論文集，第350号，pp.359-362，1984.10.
- 10) 田中孝義，本田秀行：タンデム型ダンブトラック車の3次元振動モデル化に関する一考察，土木学会第48回年次講演会概要集，I-293，pp.734-735，1993.9.
- 11) 梶川康男，村田幸一：走行荷重による高架橋の環境振動シミュレーション解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第16巻，pp.243-248，1992.7.
- 12) 鈴木康文，阿久津勝則：車体の曲げ振動解析—車体曲げ剛性と振動乗り心地に関する一考察—，鉄道総研報告，第3巻，第2号，pp.44-50，1989.2.
- 13) 宮本昌幸，松尾雅樹，谷藤克也：軌道狂いに対する輪軸挙動のシミュレーション—車輪・レール接触力のモデル

- 化レベルの影響一, 日本機械学会講演論文集, No. 840-16, pp. 17-20, 1984. 11.
- 14) Chartet, A. : Acad. Sci., 225, p.986, 1947.
- 15) Nickell, R.E. : Nonlinear dynamics by mode superposition, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 7, pp.107-129, 1976.
- 16) 谷藤克也: 鉄道車両の乗心地管理と強制振動計算法に関する研究, 鉄道技術研究報告, No. 1321, 1986. 3. (1993. 12. 20 受付)

## DYNAMIC INTERACTION ANALYSIS FOR RAILWAY VEHICLES AND STRUCTURES

Hajime WAKUI, Nobuyuki MATSUMOTO, Akio MATSUURA  
and Makoto TANABE

A simulation method which can solve the dynamic interaction problem between high speed railway vehicles and railway structures was developed using a three dimensional mass-spring-damper linked vehicle model and a finite element structure model. In this method, a simplified model of the creep phenomenon between wheel and rail is adopted, and the lateral elasticity of rail is also taken into account to simulate rolling action of wheelsets. A modal superposition method is adopted to solve this problem efficiently. The formulation and numerical techniques are described in this paper.