

# 粒状体が作る斜面の勾配について

阪口 秀<sup>1</sup>・村上 章<sup>2</sup>・長谷川 高士<sup>3</sup>・五十嵐 徹<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 農修 神戸大学助手 農学部生産環境情報学科 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)

<sup>2</sup>正会員 農博 京都大学助教授 農学部農業工学教室 (〒606-01 京都市左京区北白川追分町)

<sup>3</sup>正会員 農博 京都大学教授 農学部農業工学教室

<sup>4</sup>学生会員 神戸大学大学院 農学研究科

粒状体をまきこぼして作る斜面について、その勾配が示す本質的な意味を実験的事実に基づいて考察した。実験では、テーブル上にホッパーから粒子を落下させて山を作り、動的及び静的な状態での斜面勾配を測定した。また、テーブルの材質の違いによる摩擦特性の影響が、山の斜面勾配に与える影響を調べた。また、粒子を落下させる位置をテーブルの中心から偏心させることによって、テーブル上の山の大きさや形に変化が見られたので、これについて詳しく調べた。さらにこれらの結果から、すべり面勾配や限界勾配を推定する方法を見い出した。

**Key Words :** granular materials, angle of repose, sandpile avalanches, slope stability, failure surface, shear resistance

## 1. はじめに

水を水平に置かれたテーブルの上に滴下すると、水とテーブル間のメニスカスによって図-1(a)のように少し厚みを持った水膜を作る。さらに水を供給すると、やや盛り上がりながら流れるが、供給を止めると、水は供給した分だけ水平方向に広がってしまい、結局水膜の厚さは変化しない(図-1(b)参照)。ところが、水のような流体の代わりに砂のようないわゆる「乾いた粒状体」を落下させると(図-1(c))、初期の段階で水と同じように飛び散りながら流れるが、継続した粒子の供給によって高さを増し、やがて斜面勾配が一定の山ができる(図-1(d))。この粒状体の山は、粒子の供給を止めても山としての形を保つ。

このような流体と粒状体の性質の違いは、両者が持つせん断抵抗と自重の関係によるものと一般に考えられている。すなわち、流動中の流体には、速度勾配に比例する粘性によるせん断抵抗が生じるが、静的な状態ではメニスカスなどの界面力が働くだけで、実質的なせん断抵抗は0である。よって、膜に厚みを持つと自重によって内部にせん断応力を生じるが、これには何ら抵抗できないため、水圧と表面張力が釣合うまで水平方向に広がる。

一方、粒状体については、斜面表層の流動域では粒子間の動摩擦や転がり摩擦が働き、流動中の斜面内部の非流動域や粒子の供給を停止してからの静的な状態でも、個々の粒子の静止摩擦と、多数の粒子が組み合わさることによるインターロッキングとダイラタンシーのためにせん断抵抗が働く。この結果、粒状体は重力下において斜面を形成し、山型の堆積層として安定できる

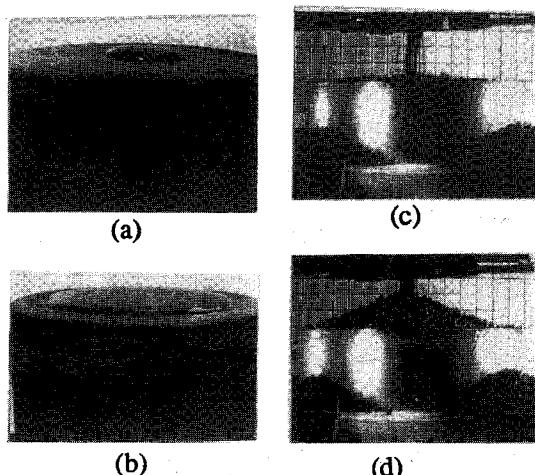


図-1 水と粒状体

ものと一般に理解されている。この理解に従うと、粒状体が作る斜面の勾配は粒状体のせん断抵抗に支配されていることになる。

ところで土質工学の分野では、砂や礫などの粘着力のない土の斜面が土をまきこぼした状態で安定を保ち得る最も急な勾配を安息角と呼んでいる<sup>1)</sup>。では、図-1(d)に見られる斜面の勾配は、繰り返し同じ実験を行なっても常にほぼ一定の値を示すが、果たして安息角と呼べる値なのだろうか? また、安息角の値は、低拘束圧下での緩詰めの礫や砂のせん断抵抗を表す内部摩擦角φにほぼ等しいものと考えられていて<sup>2)</sup>、現場や低拘束圧のせん

断試験が困難な場合、安息角試験によって $\phi$ を推定することがある<sup>3)</sup>。では、図(d)に見られる斜面の勾配は、その材料の $\phi$ を表しているのだろうか？

本論文の目的は、実験的事実に基づいてこうした間に答えることにある。従来の視点だけでは、このような間に答えることは、実は不可能であることを認識しなければならない。なぜなら、前述の定義に基づいて安息角を測定する試験方法は多種多様考えられ、どの方法によっても一定の値を与えるとは限らない<sup>1), 4)</sup>からである。つまり、どの値をもって正確に安息角とするべきなのかが全く明確でないため、ある斜面の勾配について安息角であるか否かを判断しようにもできない。また $\phi$ は、粒子の密度に依存するが、系の大きさや境界の条件には依存しないいわゆる物性定数であり、現状でこのように不明確な安息角と $\phi$ を結び付けること自体に無理がある。

結局のところ、図-1(c)のような方法(まきこぼしによる方法)で作られる粒状体の斜面(図-1(d))を考えるに当り、実験条件とその結果である勾配との関係についての知識の整理がなされていないことが大きな問題なのである。安息角とせん断抵抗との関係は、この知識の上に位置すべきものである。

以下では、上記の問題の解決を念頭において、鉛玉をテーブルの上にまきこぼして斜面を作るいくつかの実験を行ない、特に1) テーブルの摩擦の影響(境界条件)、2) 斜面の大きさ(寸法効果)が、斜面の勾配に与える影響について調べる。また、粒子の供給終了後安定して静止している状態の斜面の勾配が示す意味について考え、これを安息角と呼ぶべき値であるか否かという点について議論する。また、一連の実験結果の中から、物性として粒状体のせん断抵抗特性を陽に表現している幾何学的な量について探る。

## 2. まきこぼしによる粒状体の斜面の形成

### (1) 実験概要

実験は、図-2に示すように、円形のテーブルの上に粒子を供給するホッパーを所定の高さにセットし、所定量の粒子を落下させて、テーブルの上に山を形成させるものである。ホッパーの下端には流れを整えるためのノズルが設けられ、ノズルの中心はテーブルの中心の真上にある。実験に用いた粒子と実験装置、テーブル及びホッパーに関する諸元を表-1に与える。

ホッパー内に粒子を充填後、ホッパー下端のノズルを開き、60秒間粒子を供給する。このときのテーブル上で粒子堆積する様子を高速シャッターのビデオカメラで撮影する。なお、現象は3次元的に展開するが、以下の考察は、側面からのビデオ画像より得られた2次元情報

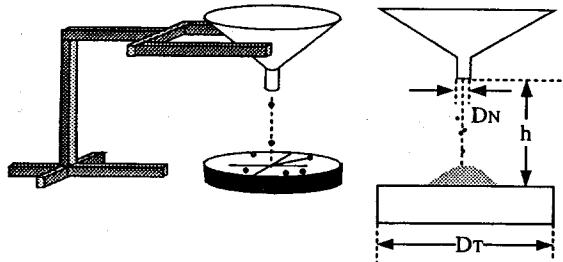


図-2 実験装置概要

表-1 粒子及び実験装置諸元

粒子	散弾(鉛) 粒径 d $1.686 \pm 0.3\text{mm}$ 質量 $0.0285 \pm 0.005\text{g}$
テーブル	表面材料 (a) アルミブロック (b) サンドペーパー(100番) 直径 DT $100.0\text{mm} = 59.3\text{d}$
ホッパー	ノズル径 DN $11.0\text{mm} = 6.52\text{d}$ ノズル高さ h $31.0\text{mm}, 39.0\text{mm}, 55.0\text{mm}$ $= 18.4\text{d} = 23.1\text{d} = 32.6\text{d}$

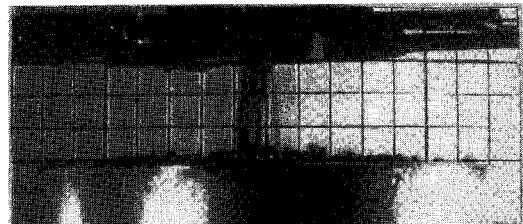


図-3 粒子の広がり

に基づいている。

### (2) 山の成長と斜面形状の変化

粒子の供給を開始すると、最初に粒子はテーブルに叩き付けられ、跳ね返って散乱する。粒子の落下地点に小さな山ができることがあるが、上から供給される粒子によって容易にたたきつぶされてしまい、あたかも水のようにテーブルを粒子1層の厚さで広がってゆく(図-3)。テーブル全体が粒子で埋め尽くされると、縁から粒子が落下を始める。同時にテーブルの中心に山が形成され始める(図-4)。

ノズルから落下してくる粒子の流れは、厳密に言うとその流線も流量も常にゆらいでいる。これは、ホッパー内での粒子の動き方に由来しているものと考えられる<sup>5)</sup>。パイプ内の流動にもゆらぎが認められているよう<sup>6)</sup>に、粒状体の流動には本質的にゆらぎが伴い、粒子

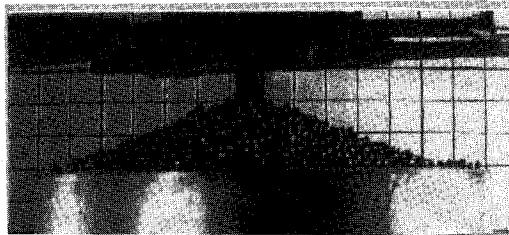


図-4 山の形成開始



図-5 アルミブロック境界

を一粒づつコントロールしない限りこれを避けることはできない。このため、粒子の供給量も供給される場所も時間に対して一定ではなくゆらぐため、山の成長は非対称なモードで進展する。しかし、時間平均をとると山はその傾斜を一定に保ちながら相似拡大していることが確認できた。

山は堆積、崩壊を繰り返しながら成長し、粒子の供給開始後、約4秒で斜面がテーブルの端に到達する。この間の斜面の勾配この後、56秒間粒子を供給し続けて、斜面形状の変化を詳しく観察し、また粒子の供給を止めてから最終的に落ち着いた状態での斜面の勾配を調べた。

### (3) 境界の影響

表-1に示すように、実験ではテーブル表面の材質として、1) 表面が滑らかなアルミブロックと2) その上に目の粗さ100番のサンドペーパーを貼り付けたものの2種類を用いて比較した。その結果は、図-5、図-6の2つを比較するとわかるように、明らかにアルミブロック上で斜面勾配 $\theta_{al}$ よりもサンドペーパー上に作られた斜面の勾配 $\theta_{sd}$ の方が大きかった。これは、サンドペーパーによって、粒子の転がり摩擦及びすべり摩擦が大きくなり、斜面法尻からテーブル外に飛び出そうとする粒子の運動が抑制されて、法尻付近の領域に粒子の堆積が起こったためと考えられる。

このように、粒状体が作る斜面の勾配は境界の摩擦特性の影響を強く受けていることが確認された。したがって、斜面の勾配は、本質的に材料物性ではないことが確認された。



図-6 サンドペーパー境界

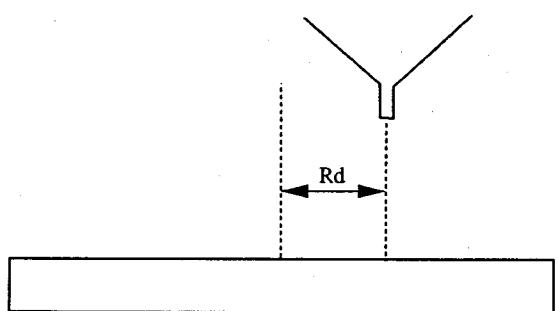


図-7 ノズル位置の偏心

### (4) 寸法効果

前述したように、ノズルから落下してくる粒子の流量や流線がゆらぐために、斜面勾配の変化は時間的にも空間的にもゆらいでいた。これまでに、Jaegerらや Heldら<sup>7),8)</sup>は筆者らと同じように粒子をまきこぼして山を形成する実験の中で、斜面勾配の変化のゆらぎ方がテーブルの大きさに依存することを見い出している。彼らはテーブルから左右から落下する粒子のそれぞれの数に対して時間変動を測定し、そのパワースペクトルを調べた。Heldら<sup>8)</sup>の結果によると、テーブルの大きさが平均粒径の50倍(50d)を境に挙動が大きく変化し、50dよりも小さいテーブル上でできる斜面の勾配は50dよりも大きなテーブルのものよりも小さくなるが変動の幅は逆に大きくなる傾向があると報告している。

このように、まきこぼしによる粒状体の斜面の勾配は、扱う系の大きさに依存する寸法効果の存在が認められている。今回の実験で用いたテーブルの大きさは60dであるため、この付近の系の大きさでは、寸法効果による影響が顕著に見られる可能性がある。ここでは、テーブルの大きさを変えずに、ノズルの位置をテーブルの中心から移動させることによって作る山の大きさを変化させ、斜面勾配に与える影響を調べた。

#### a) ノズルの偏心実験

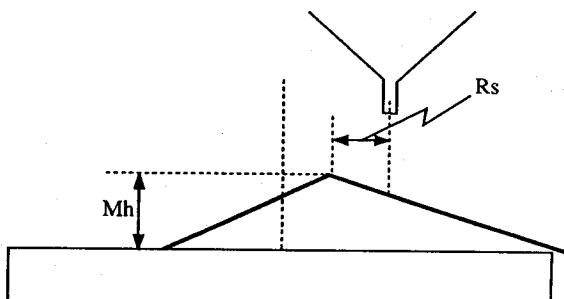


図-8 山の成長の停止

まず、図-7 のように、ノズル位置の偏心量  $R_d$  を与える。斜面の一端がテーブルの縁に到達するまでの山の成長パターンや勾配の変化等は  $R_d = 0$  の場合と同じである。しかし、斜面の一端がテーブルの縁に到達すると、そこから大きな斜面崩壊が始まり、以後ホッパーから供給される粒子はすべてテーブルの縁に向かって流れ落ちるため、成長が止ってしまう。この状態で粒子の供給を続けると、興味深いことに、山の頂点がノズルの真下から偏心し、図-8 の  $R_s$  を生じる。このときの山の高さを  $M_h$  とする。

#### b) 得られた種々の関係

まず、 $R_d$  を変化させたときの  $R_s$  の応答を調べてみた。図-9 に、3 種類のノズル高さと、サンドペーパーを貼り付けたケースの合計 4 種類の  $R_d$  と  $R_s$  の関係を与える。グラフの目盛は、縦軸、横軸のいずれも実際の長さを平均粒径で除した無次元量(粒子数  $d$ )で表されている。この図から、すべてのケースで  $R_d$  が増えるとそれに伴って  $R_s$  が増えていることがわかる。

なお、この図-9 で、いずれのケースでも、 $R_d$  が 0 の点で  $R_s$  が 0 になっていないことがわかる。これは図-10 に従って、次のように説明される。すなわち、非 0 の  $R_d$  を与えることで、斜面は先にテーブルの縁に到達した側のみのすべりが促進される。すると斜面の形状は図-10(a) のように左右非対称で、本来ノズルの真下の位置にあるべき山の頂点を切った形になりやすい。ところが  $R_d = 0$  の場合、斜面はテーブルの両端にほぼ同時に到達するわけで、このとき斜面は図-10(b) の点線に示すように、両側から山の頂点を切った形になる。すると、山の形は結果的に左右対称で、山の頂点がノズルの真下に位置することになって見かけ上  $R_s = 0$  となるが、本来は点線が示すように  $R_s$  は 0 ではない。

次に、 $R_d - R_s$ (山の頂点のテーブルの中心からの距離)と  $M_h$  の関係を図-11 に与える。この図から、 $R_d - R_s$  と  $M_h$  の関係は、ノズルの高さによる違いは殆ど見られ

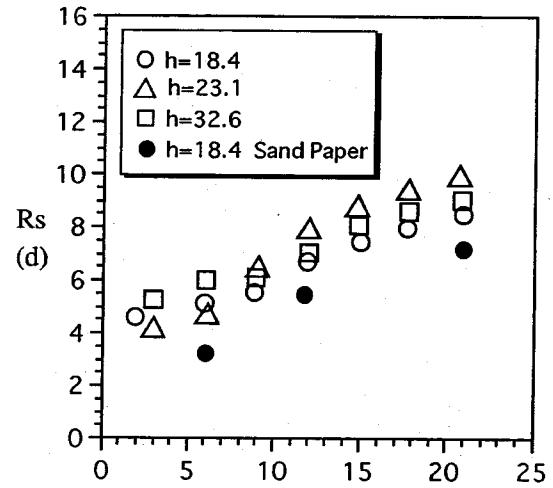


図-9  $R_d$  と  $R_s$  の関係

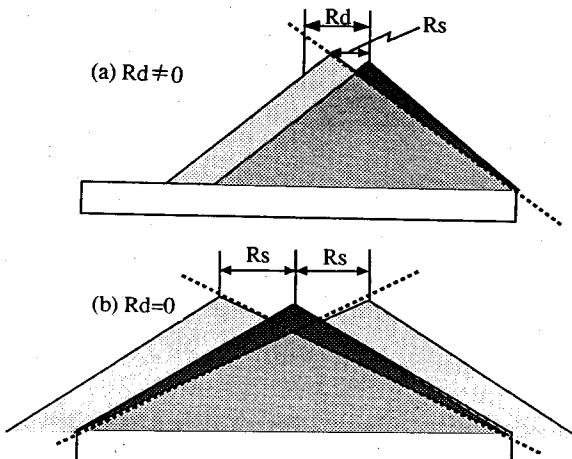


図-10  $R_d = 0$  のときの  $R_s$

ず、アルミのテーブルを用いた実験では、すべて点が一つの直線上に乗っている。また、サンドペーパーを貼り付けたケースについても同様に直線関係が見出すことができる。さらに、興味深いことに、この 2 本の直線は、 $M_h = 0$  を示すときの  $R_d - R_s$  の値が等しい。

#### (5) 考 察

図-11 は見方を変えると、テーブルの中心を原点とする座標系の上で、山の頂点の位置を与えていることがわかる。このとき、斜面の法尻はテーブルの縁に到達しているので、図上で  $R_d - R_s = 29.65d$ ,  $M_h = 0d$  の点(ただしテーブルの直径は  $59.3d$ ) と各プロットを結ぶ直線は、図-12 に示すようにそれぞれの山の斜面勾配を表すことになる。図-11 ではテーブル表面がアルミブロックの場合とサンドペーパーの場合で 2 本の別々の直線

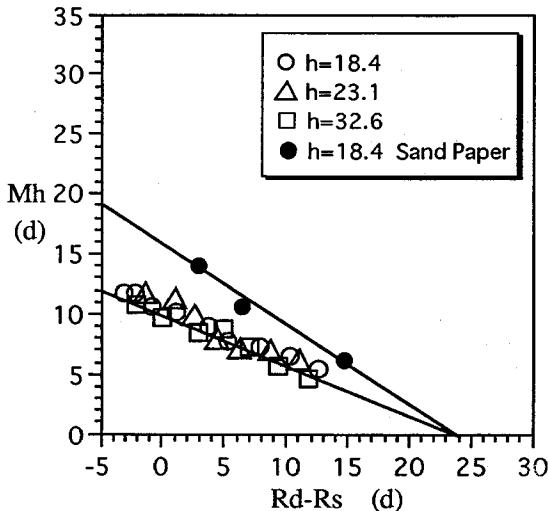


図-11  $R_d - R_s$  と  $M_h$  の関係

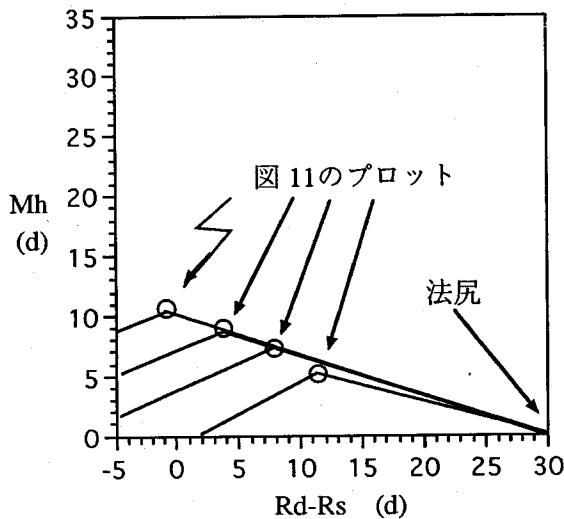


図-12  $R_d - R_s$  と  $M_h$  の関係と斜面勾配

が描かれていることから、斜面勾配には境界の影響が表れていることがわかる。また、 $R_d - R_s$  が小さいほど、つまり山が大きくなると斜面勾配も大きくなることがわかる。

また、図-11 のプロットを外挿する直線を左側に延ばしてゆくと（これはより大きな山を考えることになる）、この直線の勾配（図-13 の実線）とその大きな山の斜面勾配（図-13 の破線）がだんだん近づいてゆくことがわかる。図-13 の実線で示された直線（図-11 の直線の一つ）の勾配は、テーブル表面の材質を決めると山の大きさに関係なく一定であるので、これを安息角と仮定すると都合が良い。なぜなら、既存の理論<sup>9)</sup>では、無限斜面における安息角は限界斜面勾配に等しいものと解釈

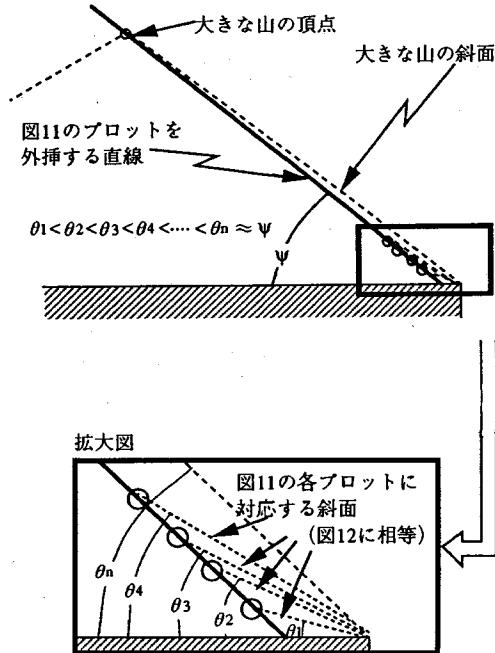


図-13 山の大きさと斜面勾配の関係

されており、このことは図-13 に示されるように、山が十分に大きくなるとその斜面勾配が図-11 で定義される直線の勾配と一致する事実と矛盾しないからである。

### 3. 検証実験

前節で得られた考察と推論を検証するために、鉛玉を2枚のガラス板の間に降り積もらせて斜面を作る2次元状態を想定した実験を行なった。テーブルとして直方体のアルミブロックをガラス板の間にはさみ込んである。実験装置の概要を図-14 に示す。実験内容は円形テーブルを用いて行なったものに準ずる。このタイプの実験装置に球形粒子を用いることには、奥行き方向の粒子運動やガラス板と粒子間の摩擦等の問題があるが、斜面内部の流動状態やすべり線を容易に確認できる利点がある。

ここでは特に、ノズル位置の移動による山の大きさと斜面勾配の変化に注目し、流動域と非流動域の位置の変化と、できた山の頂点の位置について詳しく調べた結果について述べる。

#### (1) $R_d - R_s$ と $M_h$ の関係

まず、円形テーブルを用いた実験結果との整合性を確かめるために、この実験装置を用いて得られる  $R_d - R_s$

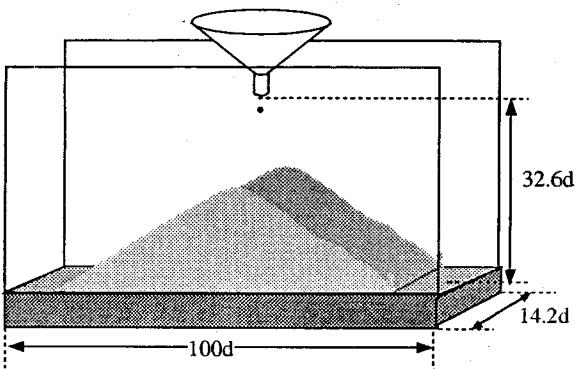


図-14 2次元実験の概要

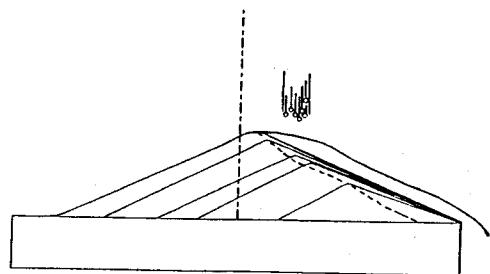


図-16 すべり面の位置

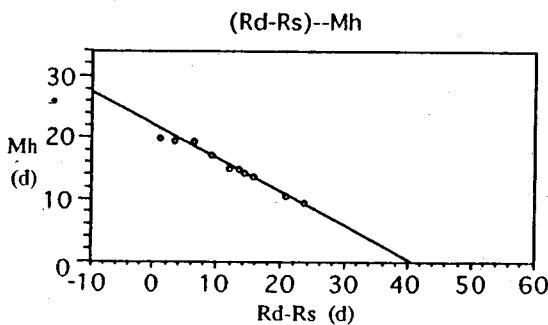


図-15  $R_d - R_s$  と  $M_h$  の関係 (2次元実験)

と  $M_h$  の関係を調べた。実験方法や結果の整理について前節の(4)で述べた方法と同じであるため、ここでは図-15にプロットされた結果のみを示す。

図-15と図-11を比較すると、実験装置が違っていても、両者は共に直線関係になる傾向を示す。このことから、 $R_d - R_s$  と  $M_h$  の関係は実験装置に依存しない重要な性質であると言える。

## (2) すべり面と限界勾配

この実験の様子をシャッター速度を遅くしてビデオ撮影すると、斜面内部で粒子が流動している領域と、流動が殆ど無い領域がある面を境にくっきりと分けられる。ノズルの位置を移動させながら、このすべり面の位置を重ねて描くと、図-16の点線のように一本の線になる。この図から、すべり面は山の大きさに依存しない不变の勾配を持っていることがわかる。

すべり面より、内側では斜面は安定し、一定の勾配を保っていることから、実はこのすべり面の勾配は粒状体

斜面の限界勾配ではないかと考えられる。

また図-16に、図-15のプロットに対応する山を描いてみると、非常に興味深いことに、すべての山の頂点を結ぶ線は、このすべり面と一致することが認められた。

図-16を見ると、すべり面の下端は斜面の法尻と完全には一致しておらずテーブル上の境界面で水平にすべりが生じていることがわかる。テーブルの材質による影響は、実はこのわずかな境界面上のすべりに出ていたのである。この境界面におけるすべり面の長さは、境界の材質に関係なく一定であることもこれらの図から確認できる。

## (3) 考・察

この2次元の実験によって、流動域と非流動域の境界面、いわゆるすべり面を見ることができた。そして、驚くことに、ノズルを動かすことによって得られた大小様々な山の頂点を連ねた直線と、このすべり面が一致することが実験によって確かめられた。

2節の実験のように、まきこぼしによる3次元斜面を作るときは、2次元実験の場合のように、流動している斜面の内部が見えないため、すべり面の位置を正確に決定することは困難である。また、すべった粒子がすべて流亡するならば、すべりが完全に終了してからすべり面を確認することができるが、斜面と水平面との境界から粒子がすべり面上に堆積してしまいやすく、やはりすべり面を探すことは難しい。ところが、今回の3次元及び2次元の実験結果から見い出された性質を使って、粒子のまきこぼし位置を変化させ大きさの異なるいくつかの山を作って図-11または図-15のようなプロットを得ることができると、図-16のように、図面からすべり面の位置やその勾配を求めることができる。

すべり面の勾配は、よりも直さず限界勾配であり、これを安息角とすることが、このまきこぼしによる方法で

粒状体の斜面を作る際には有効である。

#### 4. まとめ

一連の実験から、粒状体をまきこぼして作る斜面の勾配について、以下に述べることを見い出した。すなわち、

- (a) ホッパーからの粒子の供給によって、粒子は下方に流動しながらある一定勾配の斜面を自動的に作るが、流動中の斜面の勾配は、粒子の供給量と斜面法尻における粒子の動き方の関係によって変化する。
- (b) 粒子の供給を停止してから静止した状態での斜面の勾配は、斜面法尻付近における粒子と境界とのせん断抵抗に強く依存するため、粒子自身のせん断抵抗だけで定まる量ではない。また、水平界面(今回の場合はテーブル)からすべり面上にかけて流動した粒子が堆積している場合、斜面の勾配は限界の勾配(すべり面の勾配)よりも緩くなっている。
- (c) したがって、斜面長が斜面法尻付近におけるテーブルと粒子の水平すべりの幅よりも十分に大きいならば、斜面勾配とすべり面勾配が近似的に等しいと考えることができる。また、同時にその勾配は限界勾配であるので、冒頭の安息角の定義に従えば、これを安息角とすることができます。

粒子のまきこぼしているときに斜面内部に発生するすべり面の位置と、粒子の供給終了後の山の幾何形状との興味深い関係を見い出した。実は、このすべり面の勾配は「1.はじめに」で述べた1) テーブルの摩擦(境界条件)の影響は受けるが、2) 斜面の大きさ(寸法効果)の影響はほとんど受けない真の斜面の限界勾配であり、安息角として相応しい角特性であることがわかった。材料のせん断抵抗を斜面勾配から推定することが可能となる。

今回、得られた結果には、傾斜箱を用いた松倉ら<sup>10)</sup>や、Carson<sup>11)</sup>の安息角の測定実験とは異なる傾向が見られた。松倉らの実験では、斜面長がおよそ100d以上にならないとすべりが見られないと報告している。

このことから、粒状体が作る斜面を考えるときには、斜面の作り方や崩壊のさせ方の違いによって、本質的にすべりのモード等が異なることがわかる。またすべりの結果として生じる斜面の勾配の意味も実験方法毎に異なるため、その勾配そのものをもって安息角として内部摩擦角と比較したりすることは安易にするべきではない。

謝辞： なお、本研究を進めるにあたり、神戸大学農学部尾崎叡司名誉教授よりご助言を賜わり、同4回生白井淳之君には実験の補助をして頂いた。また東京工業大学理学部物理学教室助手の田口善弘博士より有益な示唆を頂いた。記して感謝の意を表したい。

#### 参考文献

- 1) 土質工学会編：土質工学用語辞典, p.106, 1985.
- 2) Terzaghi, K.: *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, p.510, 1943.
- 3) 山口柏樹：土質力学，技報堂, p.178, 1984.
- 4) 川北公夫, 小石真純, 種谷真一：粉体工学, 横書店, p.105, 1987.
- 5) Sakaguchi, H. and Ozaki, E.: Analysis of the formation of arches plugging the flow of granular materials, *Powders & Grains 93*, Balkema, Rotterdam, pp.351-356, 1993.
- 6) Pöschel, T.: Recurrent clogging and density waves in granular material flowing through a narrow pipe, preprint *HLRZ 67/92*, 1992.
- 7) Jaeger, H. M., Liu, C. and Nagel, S. R.: Relaxation at the Angle of Repose, *Physical Review Letters*, Vol.62, No.1, pp.40-43, 1989.
- 8) Held, G.A., Solina, II, D.H., Keane, D.T., Haag, W.J., Horn, P.M. and Grinstein, G.: Experimental study of critical-mass fluctuation in an evolving sandpile, *Physical Review Letters*, Vol.65, No.9, pp.1120-1123, 1990.
- 9) Lambe, T.W. and Whitman, R.V.: *Soil Mechanics, SI Version*, John Wiley & Sons, New York, pp.191-193, 1979.
- 10) 松倉公憲, 恩田裕一, 井石博之：安息角の測定における斜面長の影響に関する予察的実験, 筑波大学水理実験センター報告, No.13, pp.37-44, 1989.
- 11) Carson, M.A.: Angles of repose, angles of shearing resistance and angles of talus slopes, *Earth Surface Processes*, Vol.2, pp.363-380, 1977.

(1994.7.29 受付)

## SLOPE ANGLE OF THE HEAP OF GRANULAR MATERIALS

Hide SAKAGUCHI, Akira MURAKAMI, Takashi HASEGAWA and Tohru IGARASHI

We have carried out an experiment in which heaps of granular materials are built up to a certain size by dropping of particles on the table from the hopper. During the failure of the surface of the slope by the flow of particles and after the relaxation of the pile, the slope angle and the crest point of the heaps are measured. Varying the dropping point of the particles on the table, we find some interesting relationships in the deviation of the crest point of each heap which corresponds to the slope of failure surface.