

# 摩擦性材料の構成則の定式化

岸野佑次<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

本論文においては、摩擦性材料などの非弾性挙動を解析するための構成則理論を提起し、応用例をもとに、粒状体の構成則に関する考察を示す。本理論の枠組みは塑性論に準じるが、流動則の誘導において材料の散逸機構を反映することの可能な散逸関数に基づく定式化を行なう。また、散逸ひずみ速度を主・従2つの部分に分けて考え、両者の間に誘導異方性を考慮し得る拘束条件を導入する。これにより、従散逸ひずみ速度をダイレイタンシー現象の一般的表現と位置づけることができる。散逸条件の微分より得られる適応条件を考慮すれば、最終的に散逸ひずみ速度が確定する。2種類の散逸関数を導入して粒状体の要素試験シミュレーションを行ない、既往の実験結果との適合性を示すとともに、考察を行なう。

**Key Words :** constitutive law, dissipative function, constraint condition, flow rule  
consistency condition, frictional materials, granular materials

## 1. はじめに

地盤や岩盤が変形を受けるとき、内部にすべり摩擦やクラックが発生し、これがエネルギー散逸の原因になる。ここでは、主として摩擦による非時間依存型のエネルギー散逸が生じる材料モデルを摩擦性材料と称し、これに対する構成則の理論とその応用について示す。従来より、摩擦性材料については、その散逸機構を意識した構成則の誘導が種々行なわれている<sup>1)~5)</sup>。ただし、それぞれ着目点が異なることから、2次元的である<sup>1),3),5)</sup>、体積変化がない<sup>1),4)</sup>、等方性を仮定している<sup>2),4)</sup>、等々の制約がある。このように、摩擦性材料の散逸機構は比較的明らかであるにもかかわらず、未だ塑性論に匹敵するような一般理論はないように思われる。

一方、材料内部のエネルギー散逸を散逸関数として反映させ、これをもとに構成則理論を組み立てようとする試みがいくつかなされている<sup>6)~9)</sup>。散逸関数は摩擦性材料に限らず材料の非弾性的性質をモデル化する上で重要である。これは、塑性論における塑性ポテンシャルが単に塑性ひずみの方向を数学的に決定するためのものであるのに比し、散逸関数は材料の散逸機構を表現するという物理的な意味を有しているからである。この散逸関数は塑性論においても弾完全塑性体極限定理にも用いられている概念であり<sup>10)</sup>、散逸エネルギー速度を表わす正值関数である。もし、散逸を伴う変形が、塑性論におけるよ

うに弾性部分と散逸部分に分けられるとすると、ひずみに対してなされる仕事の中、弾性部分は弾性ひずみエネルギー関数の形で材料要素内部に蓄えられ、散逸部分は散逸関数の形で材料要素内部で散逸されるとして定式化を行なうことは物理的に自然な考え方であろう。とくに、Zieglerは自由エネルギーおよび散逸関数に基づく熱力学的な構成則の定式化<sup>9)</sup>の提案を行っている。この提案は、当初主として流体に対するものであったが、Houlsby<sup>7)</sup>はこれを利用して非関連硬化モデルの例を示した。しかし、散逸関数に基づいて最終的応力増分ひずみ増分関係を定めるための標準的方法は未だ示されていない。

摩擦性材料の構成則理論の定式化において重要なもう一つの概念は材料内部の拘束条件である。金属塑性論において塑性体積ひずみがないとする仮定は拘束条件の一種である。金谷<sup>8)</sup>は、ダイレイタンシーに抵抗する応力成分を拘束応力と呼んで他の成分と区別した上で、拘束応力以外の成分に対して関連流動則を仮定して、粒状体の3次元的変位速度場の研究を行なっている。また、Rudnickiら<sup>2)</sup>は、散逸変形の偏差部分については  $J_2$  流動則を仮定し、体積ひずみ速度についてはせん断ひずみ速度との比を与えて変形局所化解析のための構成則を導いている。これらはいずれも構成則の中に具体的に拘束条件を導入した例である。

本論文は、以上のような背景を踏まえ、摩擦性材料の構成則に関する一般論の展開を行なった。また、

この理論を粒状体に適用して、既往の実験結果<sup>11)</sup>との適合性を示すとともに、誘導異方性や非関連型流動則が必然であることなど、粒状体の構成則が具备すべき性質の考察を行なった。

## 2. 散逸関数に基づく構成則理論

本論文においては、摩擦性材料などの非時間依存型非弾性挙動を対象として構成則理論の展開を行う。ここでは、塑性論に習って理論展開を行なうが、塑性論において用いられている基本概念や仮定を力学的により明確な意味をもたせて一般化する。なお、本理論においては、変形に含まれる非弾性部分を散逸変形または散逸ひずみと称することとする。

### (1) 散逸ひずみ速度と拘束条件

一般に、材料の非弾性挙動には、材料内部の不可逆的な微視構造変化とエネルギーの散逸が伴うが、このような材料内部の散逸機構をもとに構成則を定式化しようとする場合、何らかの散逸変形のモードをモデルに組み込むことが必要になると考えられる。このような散逸変形モードの中には、いわゆる拘束条件<sup>9)</sup>と呼ばれるものが含まれる。拘束条件の代表例には、金属塑性論における仮説「散逸変形に伴う体積ひずみは零」がある。一般に、拘束条件は個々の材料の特性に応じて設定する必要があるであろう。ここでは、このような拘束条件を含め、構成則の定式化に必要となる変形の分解について示す。

塑性論と同様に、ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  を弾性ひずみ速度  $\dot{e}$  と散逸ひずみ速度  $\dot{d}$  とに分けられるとして

$$\dot{\epsilon} = \dot{e} + \dot{d} \quad (1)$$

と表わす。以下、構成式を速度型で誘導するが、とくに時間微分としての実質的な意味はないものとする。式(1)の中、弾性ひずみ速度については応力速度  $\dot{\alpha}$  との間に通常の弾性的関係を仮定する。

散逸ひずみ速度については、図-1に示すように、散逸変形に主体的に関与する主散逸ひずみ速度  $\dot{d}'$  と、これに従属して生じる従散逸ひずみ速度  $\dot{d}''$  とに分解されるとして、次式のようにおく。

$$\dot{d} = \dot{d}' + \dot{d}'' \quad (2)$$

この分解の目的は、粒状体におけるダイレイタンシーのように、他の散逸ひずみ成分に従属して生じるひずみを表現することにある。金属塑性論においては、主散逸ひずみは塑性偏差ひずみ、従散逸ひずみは塑性体積ひずみに対応するが、後者は零である。ここでは、従散逸ひずみが、図-1のように、必ずしも等方的には生じないことを前提として、一般に非等方テンソルで表わされるものとする。さらに、偏差ひ

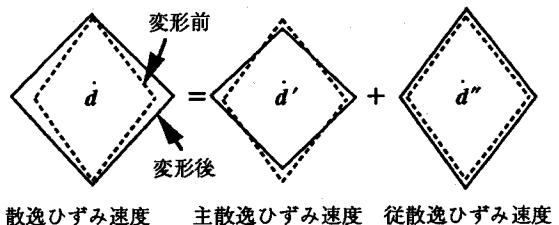


図-1 散逸ひずみ速度の分解

ずみと体積ひずみのテンソル表示の複内積は零、すなわち両ひずみ成分は直交するという性質を拡張して、主散逸ひずみ速度テンソルと従散逸ひずみ速度テンソルは次のように直交するとする。

$$\dot{d}' : \dot{d}'' = 0 \quad (3)$$

ここに、記号'::'はテンソルの複内積を表わす。

塑性体積ひずみが零であるという金属塑性論の拘束条件に代えて、ここでは、主散逸ひずみ速度と従散逸ひずみ速度の間に次の拘束条件を仮定する。

$$\dot{d}' = n \dot{\alpha}, \quad \dot{d}'' = C(\sigma, n, \alpha) l \dot{\alpha} \quad (4)$$

ここに、 $n$  および  $l$  は各ひずみ速度の方向を表わす単位のテンソルである。すなわち、

$$n : n = 1, \quad l : l = 1, \quad l : n = 0 \quad (5)$$

である。また、

$$\alpha = \int \dot{\alpha} dt \quad \dot{\alpha} = \dot{d} : n \quad (6)$$

は主散逸ひずみ速度の絶対値の積分であり、散逸変形の進行を表わす変形パラメータとして用いる。さらに、 $C(\sigma, n, \alpha)$  は主散逸ひずみ速度と従散逸ひずみ速度の間の比を表わすための関数であり、これを拘束関数と称する。従散逸ひずみを体積ひずみとする場合、 $C$  は膨張係数<sup>2)</sup>となる。本文においては、 $C$  により一般的な意味をもたせ、誘導異方性を伴う硬化・軟化などを表現できるようとする。 $l$  の方向や  $C$  の関数形は材料の散逸変形モードを反映させたものとする必要があるが、具体的には、実験等により直接的あるいは間接的に定めることとする。他の構成モデルでひずみ成分間の拘束条件を与える例としては、弾性体におけるボアソン比がある。 $l$  や  $C$  はボアソン比の役割と類似の役割を果たすが、一般に変形とともに変化する量とする。以上より、散逸ひずみ速度は次式のように与えられる。

$$\dot{d} = (n + Cl) \dot{\alpha} \quad (7)$$

上式中  $n$  に関しては、式(5)の制約があるのみであり、次節の流动則により初めて確定することになる。

なお、変形パラメータはいくつかの散逸変形モードに対応して複数混在することも考えられるが、ここでは、簡単のため1個として定式化を行なう。変形パラメータが複数の場合、個々の散逸変形モードを独立とすれば、式(1)で弾性部分と散逸部分が分

離されているように、各変形パラメータ毎に分けてコンプライアンスを求めるべきと考えられる。以上のように定義される散逸ひずみ速度に対して、散逸仕事速度は次式のように与えられる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (8)$$

ここに、

$$\omega = \sigma : (n + Cl) \quad (9)$$

は単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を表わす。

## (2) 散逸条件と流動則

まず、材料内部の要素に加わる応力のする仕事について、式(1)に対応して、弾性部分と散逸部分に分けて考える。材料要素に外部から作用する応力のする仕事の中、弾性ひずみ速度に対応する部分については弾性ひずみエネルギーとして材料内部に蓄えられる。一方、散逸ひずみ速度に対応する部分については、材料固有の散逸機構に従って、材料内部でエネルギーが消費される。散逸関数は、散逸ひずみが生じるとき、このひずみを生じさせるのに必要な単位体積・単位主散逸ひずみあたりのエネルギーを表わすものであり、次のように与えられる。

$$\varphi = \varphi(\sigma, n, \alpha) \geq 0 \quad (\text{for } n:n=1) \quad (10)$$

なお、本文の散逸関数の定義は、文献6などの定義と、主散逸ひずみで正規化する点が異なっている。

式(9)の散逸仕事速度は、実際に実現される  $n$  の方向と異なる場合、形式的には負にもなり得るが、式(10)の散逸関数は、熱力学法則より常に正值でなければならない。この様子を散逸ひずみ速度空間で示せば、たとえば、図-2のようになる。散逸関数を表わす面は散逸曲面、単位の主散逸ひずみあたりの仕事を表わす平面は散逸仕事面と表示されている。材料内部で散逸ひずみが生じるために、付帯条件式(5) ( $I$  は固定) の下に、散逸曲面と散逸仕事面が共通点をもつ必要がある。すなわち、この条件は次の散逸エネルギーに関する平衡条件を意味する。

$$f = \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } n:n=1) \quad (11)$$

図-2の場合、散逸曲面と散逸仕事面は  $n:n=1$  の条件下で共通点をもたず、散逸条件を満たしていない。 $\varphi$  の正値性より、散逸変形を生じる前の段階においては、同図に示されているように  $n:n=1$  となる全ての  $n$  に対して  $f > 0$  であることから、載荷により最初に式(11)が満たされる際には必ず  $f$  が極小となる。この条件式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad F = f + \frac{A}{2} n:n + BI:n \quad (12)$$

ここに、  $A, B$  はラグランジュの未定係数であり、式(12)と  $n$  および  $I$  との複内積を施せば、

$$A = \tau:n \quad B = \tau:I \quad (13)$$

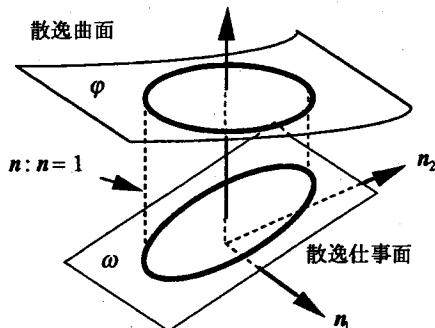


図-2 散逸関数の概念

$$\tau = \sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial n} + (\sigma:I) \frac{\partial C}{\partial n} \quad (14)$$

を得る。したがって、次の流動則を得る。

$$n = \frac{\tau - (\tau:I)I}{\tau:n} \quad (15)$$

または、  $\tau:n > 0$  のとき次式を得る。

$$n = \frac{\tau - (\tau:I)I}{\sqrt{\tau:\tau - (\tau:I)^2}} \quad (16)$$

一般に、  $\tau$  は  $n$  の関数であるので、式(16)は  $n$  を求めるための陽な式とはなっていない。したがって、流動則としては複雑である。

ここで、とくに  $C$  と  $\varphi$  が方向  $n$  に依存せず、

$$C = C(\sigma, \alpha), \quad \varphi = \varphi(\sigma, \alpha) \quad (17)$$

とおくことができる場合には、

$$\tau = \sigma \quad (18)$$

である。ここで、次の定義を行なう。

$$\sigma' = (\sigma:n)n, \quad \sigma'' = (\sigma:I)I \quad (19)$$

このとき、式(15)より流動則は次式で与えられる。

$$n = \frac{\sigma - \sigma''}{\sigma:n} \quad (20)$$

載荷の際に主散逸ひずみのする仕事は正であるので、上式の分母は

$$\sigma:n = \sqrt{\sigma:\sigma - \sigma'':\sigma''} \quad (21)$$

と表わすこともできる。式(19), (20)より、

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \quad (22)$$

が成立する。すなわち、式(17)を仮定した場合、上式と式(2)より「散逸変形が生じるとき、散逸ひずみテンソル  $\dot{d}$  および応力テンソル  $\sigma$  は、ともに、2つの単位のテンソル  $n, I$  のみを用いた線形結合で表わされる必要がある」という法則が得られる。この法則は、偏差応力と偏差散逸ひずみ速度の方向が一致するという金属塑性論流動則に対応したものである。しかし、この法則は塑性論における降伏条件や最大塑性仕事の原理などによって導びかれたものではないこと、また、金属塑性論流動則に比して、より一般的な流動則になっていることが注目される。

### (3) 硬化・軟化則

流動則により  $n$  が定まった後は、  $C, \varphi$  および式(9)の  $\omega$  は一般に  $\sigma$  と  $\alpha$  で表わされるので、 式(11)の散逸条件を改めて次式のように表わす。

$$f = f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (23)$$

図-2と、  $n$  が極値条件式(12)を満たすことより、 散逸が生じない状態は  $f > 0$  として判定されることになる。なお、  $f$  に含まれる  $I$  は、 流動則を決定する際には付帯条件を与えるために一定としたが、 以降の硬化・軟化則を決定する際には、  $I = I(\sigma, \alpha)$  として誘導異方性を考慮した定式化を行なう。

散逸が継続して生じるためにには、 この散逸条件を満たし続ける必要があるが、 この後のとり扱いは塑性論の適応の条件と同様である。すなわち、 式(23)の時間微分をとることにより、 次式が成立する。

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (24)$$

これより、 次の硬化・軟化則を得る。

$$\dot{\alpha} = \frac{m : \dot{\sigma}}{D} \quad (25)$$

ここに、

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &= \frac{\partial \sigma : n}{\partial \sigma} + \sigma : I \frac{\partial C}{\partial \sigma} + C \frac{\partial \sigma : l}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (26)$$

$$D = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \sigma : \left( \frac{\partial n}{\partial \alpha} + I \frac{\partial C}{\partial \alpha} + C \frac{\partial l}{\partial \alpha} \right) \quad (27)$$

である。なお、 式(21)より、

$$\frac{\partial \sigma : n}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{\sigma : n} - \frac{\sigma : l}{\sigma : n} \frac{\partial \sigma : l}{\partial \sigma} \quad (28)$$

となるので、  $m$  は次式のように表わされる。

$$m = \frac{\sigma}{\sigma : n} + \left( C - \frac{\sigma : l}{\sigma : n} \right) \frac{\partial \sigma : l}{\partial \sigma} + \sigma : l \frac{\partial C}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad (29)$$

以上より、 散逸ひずみ速度は

$$\dot{d} = \frac{(n + Cl)m : \dot{\sigma}}{D} \quad (30)$$

と与えられるが、 一般には  $m \neq n + Cl$  であり、 いわゆる関連流動則型の構成式にはなっていない。ただし、  $I, C, \varphi$  が全て  $\alpha$  のみの関数と考えられる特殊な場合には、  $m = n + Cl$  であることから、

$$\dot{d} = \frac{mm : \dot{\sigma}}{D} \quad (\text{for } I(\alpha), C(\alpha) \text{ and } \varphi(\alpha)) \quad (31)$$

となり、 関連流動則型の構成式を得る。このように、 関連・非関連の区別は、  $I, C, \varphi$  の関数形に依存しているが、 とくに、  $\varphi$  の応力依存性が鍵になると考えられる。たとえば、 摩擦性の散逸メカニズムが支配的な粒状体などにおいては、  $\varphi$  の応力依存性は不可避であり、 これだけで関連流動則型にはならないと言ふことができよう。

### 3. 粒状体の構成則の誘導とその考察

本章では前章で導いた構成則理論の粒状体への応用について述べる。具体的な構成式は2種類の散逸関数と拘束条件を仮定して導びく。また、 これらの構成式による要素試験シミュレーションをもとにして、 粒状体の構成則が具備すべき要件などの考察を示す。なお、 要素試験シミュレーションは中井・松岡の論文<sup>11)</sup>を参考として行なっている。

#### (1) Roscoe らの散逸関数による構成則

ここでは、 簡単なモデルの例として、 カムクレイモデルにおいてRoscoeらが仮定した散逸関数<sup>12)</sup>に基づいて構成則を誘導する。

弾性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  に対しては、 次の等方弾性体の構成式を仮定する。

$$\dot{\epsilon} = \{(1+\nu)\dot{\sigma} - \nu(\dot{\sigma}:I)I\}/E \quad (32)$$

ここに、  $E$  はヤング率、  $\nu$  はポアソン比である。

拘束条件を与えるための主散逸ひずみを偏差ひずみ、 従散逸ひずみを体積ひずみとし、  $I$  を

$$I = I/\sqrt{3} \quad (33)$$

とおく。ここに、  $I$  は単位テンソルである。また、 拘束関数  $C$  については、 散逸変形パラメーター  $\alpha$  のみの関数と考える。したがって、 散逸ひずみ速度は次式のように表わされる。

$$\dot{\epsilon} = (n + C(\alpha)l)\dot{\alpha} = (n + C(\alpha)I/\sqrt{3})\dot{\alpha} \quad (34)$$

散逸エネルギーは、 Roscoeらに習い、 平均応力と散逸偏差ひずみ速度の絶対値に比例して生じると仮定する。散逸関数は単位の主散逸ひずみあたりのエネルギーを表わす量として定義されているので、

$$\varphi = M \sigma : l = \sqrt{3} M p \quad (35)$$

とおけばよい。ここに、

$$p = \sigma : I / 3 \quad (36)$$

は平均応力である。このとき、 式(19)<sub>2</sub> は

$$\sigma' = \sqrt{3} p l = p I \quad (37)$$

となるので、 式(20)より、 主散逸ひずみ部分については  $J_2$  流動則

$$n = \frac{\sigma - p I}{\sqrt{\sigma : \sigma - 3 p^2}} \quad (38)$$

が成立する。すなわち、 偏差応力テンソルと偏差散逸ひずみ速度テンソルの方向は一致する。ここで偏差応力テンソルの方向を表わすためのLodeのパラメーターを、 主応力  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  に対し

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (39)$$

とおく。同様に、 主散逸ひずみ速度に対して

$$\mu_d = \frac{2\dot{d}_2 - \dot{d}_1 - \dot{d}_3}{\dot{d}_1 - \dot{d}_3} \quad (40)$$

表-1 Roscoeらの散逸関数による構成則に用いた諸定数

$E$	: 2,000 kgf/cm <sup>2</sup> (196 MPa) および 20,000 kgf/cm <sup>2</sup> (1,960 MPa)
$\nu$	: 0.3
$M$	: 0.5 $a$ : 420 $b$ : 220
$p$	: 4 kgf/cm <sup>2</sup> (392 kPa)

を定義すると、式(34), (38)より次式を得る。

$$\mu_\sigma = \mu_d \quad (41)$$

この式は金属塑性論において、シミラリティー則<sup>14)</sup>と呼ばれている等式であり、本節におけるような等方的構成則においては必然的に満たされることになる。

つぎに、硬化・軟化則を導入するために、式(38)を式(26), (27)に代入すれば、 $m$  および  $D$  が

$$m = \frac{\sigma - p I}{\sqrt{\sigma: \sigma - 3p^2}} - \frac{M - C}{\sqrt{3}} I \quad (42)$$

$$D = -\sqrt{3} p \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (43)$$

と算定される。これを式(30)に代入すれば、散逸ひずみ速度を応力速度に結びつける式が得られる。

以下に要素試験のシミュレーションの例を示す。応力制御の場合は、散逸ひずみ速度に対する式(30)を、弾性ひずみ速度に対する式(32)とともに式(1)に入れるにより直接ひずみ速度の表示式が得られるので、これを積分することにより応力ひずみ関係が得られる。ひずみ制御の場合は、ひずみ速度と応力の関係式の逆関係を求め、ひずみ速度に対する応力速度の式を積分することにより応力ひずみ関係が得られる。その他、応力制御とひずみ制御の混在した制御の場合も含め、式(32)および式(30)で定められるコンプライアンスをもとに種々の要素試験のシミュレーションを行なえばよい。ここでは平均応力  $p$  一定の3軸圧縮試験のシミュレーションについて示す。

拘束関数  $C$  の具体的な関数形は、現段階においては、これをもとに算定される応力ひずみ関係が実際と合うように定めること以外に適当な方法が見当たらないが、将来的には微視的立場からの決定法もあり得ると思われる。ただし、これはボアソン比を材料毎にどのように定めるべきかということと同種の問題と言ってもよいであろう。ここでは、応力ひずみ曲線が双曲型になるように、次式を仮定する。

$$C(\alpha) = M \frac{1 - b\alpha}{1 + a\alpha} \quad (44)$$

ここに、 $a, b$  は材料定数であり、 $M$  は式(35)にお

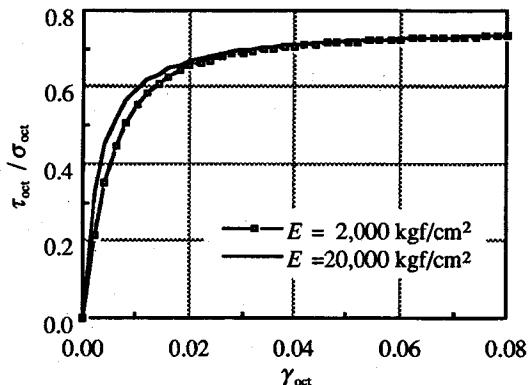


図-3 応力ひずみ関係

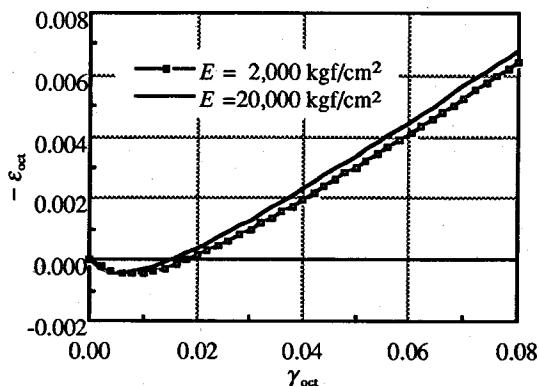


図-4 ダイレイタンシー曲線

ける定数と同一のものである。この仮定により、初期状態 ( $\alpha=0$ ) においても散逸条件式(23)が満たされることになる。

以上より、5つの材料定数  $E, \nu, M, a, b$  を定めれば、構成則が確定する。表-1に具体例として用いた諸定数の値を示す。これらの値は文献11)の3軸圧縮試験の結果を参考にして定めた。ヤング率の値は1桁異なる2通りの値を仮定した。結果の整理は、正8面体面における以下の変数を用いて行なった。

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (45)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (46)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\dot{d}_1 + \dot{d}_2 + \dot{d}_3) \quad (47)$$

$$\dot{\gamma}_{\text{oct}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{d}_2 - \dot{d}_3)^2 + (\dot{d}_3 - \dot{d}_1)^2 + (\dot{d}_1 - \dot{d}_2)^2} \quad (48)$$

図-3, 4に、それぞれ、応力ひずみ関係およびダイレイタンシー曲線を示す。これらの図に現れる曲線の形状は、はじめに仮定する拘束関数に大きく依存する。式(44)の仮定からは図-3にあるような双曲型

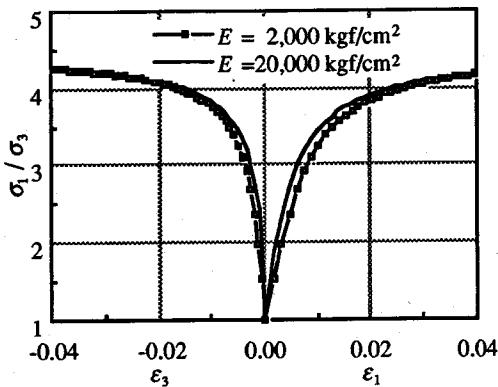


図-5 主応力比主ひずみ関係（3軸圧縮）

の応力ひずみ関係が得られることがわかる。また、これらの図より、応力ひずみ関係およびダイレイタンシー曲線におけるヤング率による差異はそれ程顕著には現れていない。これは、式(44)のような拘束関数を選んだ場合、変形初期より散逸変形を生じ、これが卓越するためである。図-5には3軸圧縮試験シミュレーションの主応力比主ひずみ関係を示した。

普通用いられる典型的な主応力比主ひずみ関係となっていることがわかる。この図においても、図-3, 4と同様にヤング率の影響はあまり顕著ではない。

図-6には応力比ひずみ速度比の関係を示した。この関係は、ほぼ散逸条件式(11)を表わしたものであるといえる。これは、次のようにして示される。式(5), (7)より、

$$C = \frac{\dot{d}:l}{\dot{d}:n} \quad (49)$$

であるが、これと、式(9), (11), (35)より次式を得る。

$$\frac{\sigma:n}{\dot{d}:n} = M - \frac{\dot{d}:l}{\dot{d}:n} \quad (50)$$

このモデルにおいては、 $l$  が式(33)で与えられるので、 $\sigma:n$  および  $\dot{d}:n$  は、それぞれ、 $\sigma$  および  $\dot{d}$  の偏差部分の大きさを表わす。よって、弾性ひずみが無視できる場合には、

$$\frac{\dot{d}:l}{\dot{d}:n} \approx \frac{2\dot{\epsilon}_{oct}}{\dot{\gamma}_{oct}}, \quad \frac{\sigma:n}{\dot{d}:n} = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} \quad (51)$$

であるので、これより近似的に次式を得る。

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} \approx M - \frac{2\dot{\epsilon}_{oct}}{\dot{\gamma}_{oct}} \quad (52)$$

しかし、図-6を見ると、この関係はヤング率が小さな場合には成立していない。体積ひずみ速度が圧縮側にあるときは、明らかに、ヤング率の影響を受けている。粒状体のヤング率をどのように定めるかは、構成則理論の用い方とも密接な関係があるが、Roscoeらの散逸関数を用い、かつ、文献11)で行わ

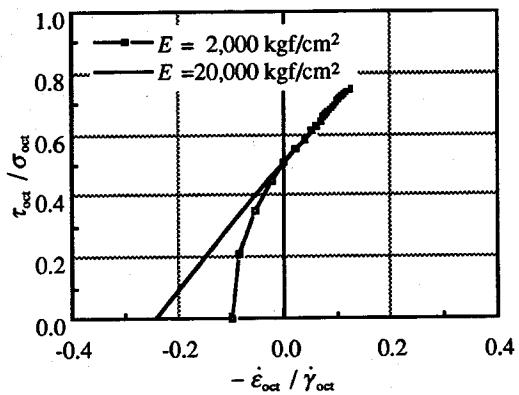


図-6 応力比ひずみ速度比関係

れた試験の応力比ひずみ速度比関係を説明するすれば、小さい方のヤング率を用いる必要がある。粒状体のヤング率は、粒状体を構成する実質部分の剛性のみで定まるものではなく、パッキングや噛み合せなどの構造的要因による複雑なメカニズムを反映したものであるので、今後とも詳細な検討を進められる必要があるであろう。

以上は3軸圧縮試験のシミュレーションについての結果を示したが、いま、用いる定数を表-1のままで3軸伸張試験のシミュレーションを行なったとする。このモデルの場合、上述のように、 $\sigma:n$  および  $\dot{d}:n$  は、それぞれ、 $\sigma$  および  $\dot{d}$  の偏差部分の大きさを表わすので、式(50)より、同一の応力レベルにおける散逸ひずみ速度比は3軸圧縮試験の場合と一致し、応力比ひずみ速度比関係、さらには、応力ひずみ関係やダイレイタンシー曲線は全く同一のものとなる。

これに対して3軸伸張試験に対する主応力比主ひずみ関係を求めるとき、図-7のような極端な結果になる。このことは、本節のモデルを用いた場合、表-1の材料定数が3軸伸張試験には適合したものではないことを示している。このような結果を与える理由は次のように説明される。いま、平均応力  $p$  と最大せん断応力  $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  を用いて3軸圧縮・伸張応力状態の主応力比を表わすと次のようになる。

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_{comp} = \frac{3p + 4\tau_{max}}{3p - 2\tau_{max}} \quad (53)$$

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_{ext} = \frac{3p + 2\tau_{max}}{3p - 4\tau_{max}} \quad (54)$$

これらの式より、本節のモデルの場合のように、あるひずみレベルにおいて3軸圧縮・伸張に対する応力が同一の値である場合には、主応力比が極端に異なることは明白である。

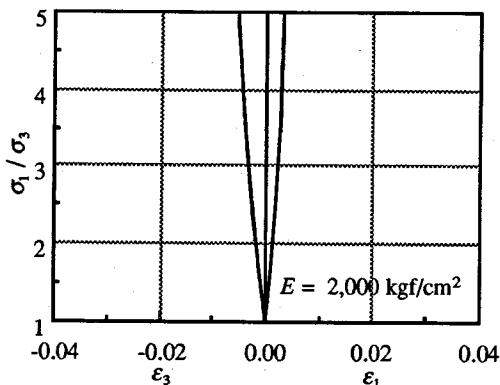


図-7 主応力比主ひずみ関係（3軸伸張）

以上の結果は、拘束条件や散逸関数に等方的で単純な形を仮定して導いたものであり、このようなモデルを実際に種々の載荷条件に対して応用するとき、材料定数を一定としておくことは難しいであろう。そこで、構成モデルの中に何らかの誘導異方性を導入することが必要であると考えられる。次節においてはより一般的な構成則を誘導する。

## (2) 誘導異方性を考慮した散逸関数による構成則

前節においては、散逸関数にRoscoeらの等方的な関数形を仮定するとともに、散逸変形を主散逸ひずみに対応する偏差ひずみと従散逸ひずみに対応する体積ひずみとに分解して構成則を誘導した。せん断ひずみによって生じるダイレイタンシーを論じるとき、せん断ひずみは偏差ひずみ、ダイレイタンシーは体積ひずみとすることは従来の一般的な考え方であり、前節においてもこの立場から定式化を行なった。しかし、粒状体内部におけるダイレイタンシー現象は、粒状体内部の散逸変形モードに従って生じるので、ダイレイタンシーの取扱いを等方的とすることには絶対的な根拠はない。したがって、ダイレイタンシー現象を表わすための一般的なひずみとして、等方的な体積ひずみ以外の表現を行なうことはより一般的であろう。

本節においては、ダイレイタンシー現象が応力状態の変化とともに異方的に生じるとし、このことを表現するために、従散逸ひずみ速度  $\dot{d}''$  の方向を表わす単位のテンソル  $I$  の主値を応力の関数として次式のように仮定する。

$$\ell_k \equiv \frac{1}{\sigma_k} \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} \quad (k=1,2,3) \quad (55)$$

ここに、誘導異方性の主軸は応力の主軸に一致するものとし、以下座標軸は応力主軸の方向とする。

この仮定はSMP理論<sup>11),13)</sup>を参考として設けたので、

SMP理論との関連について記す。もし、拘束関数  $C$  と散逸関数  $\varphi$  が応力  $\sigma$  と変形パラメータ  $\alpha$  のみの関数であるとすると、応力  $\sigma$  は式(19), (22)のように主・従散逸ひずみ速度の方向  $n, l$  に分解されることになる。このとき  $l$  に関する部分は

$$\sigma'' = 3 \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} l \quad (56)$$

であるが、 $\sigma$  によって規定されるSMP面におけるこの応力の垂直成分は次式で与えられる。

$$\sigma''_{SMP} = 3 \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3}\right)} \quad (57)$$

これは  $\sigma$  自身のSMP面における垂直応力  $\sigma_{SMP}$  に他ならない。したがって、式(22)より、主散逸ひずみに対応する応力  $\sigma'$  のSMP面における垂直応力については  $\sigma'_{SMP} = 0$  となる。しかし、SMP面上のせん断応力  $\tau'_{SMP}, \tau''_{SMP}$  については、一般に、どちらも零とはならない。同様に、散逸ひずみ速度についてもSMP面に沿うせん断ひずみは主・従両成分ともに値をもつが、すべり摩擦による散逸には主散逸ひずみ部分のみが関与すると考えるべきである。SMP理論においては、このような分離はなされていない。

本モデルにおける拘束関数  $C$  は、前節と同様、変形パラメータ  $\alpha$  のみの関数とし、単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を次式のようにおく。

$$\omega = \sigma : n + C(\alpha) \sigma : l \quad (58)$$

また、散逸関数については、次のような散逸機構モデルに基づいて定義する。

①粒状体内部における摩擦を伴うすべりは巨視的に主散逸ひずみ速度として現われ、これを拘束する従散逸ひずみ方向の応力  $\sigma : l$  に比例して散逸エネルギーが生じるとする（比例定数：  $M$ ）。

② $\sigma : l$  のする仕事の一部は粒状体内部の構造変化のために消費される。この散逸はダイレイタンシーを抑える方向に生じるとし、式(58)右辺第2項に比例するものとする（比例定数：  $-K$ ）。

このような仮定に基づいて、散逸関数を次のようにおく。

$$\varphi = (M - K C(\alpha)) \sigma : l \quad (59)$$

このとき、散逸条件式(11)より、応力と散逸ひずみ速度各々の主・従成分比間の関係は

$$\frac{\sigma : n}{\sigma : l} = M - (1 + K) \frac{\dot{d} : l}{\dot{d} : n} \quad (60)$$

と表わされる。この式はSMP面上の応力比および散逸ひずみ速度比に対する式と類似しているが、上述のように、 $\sigma : n$  や  $\dot{d} : n$  はSMP面上のせん断成分とは異なる意味をもっている。

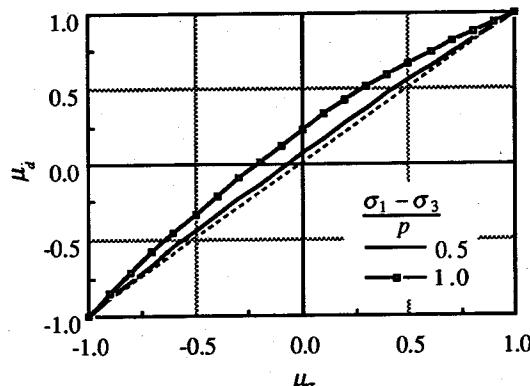


図-8 シミラリティー則との相違

$C$  と  $\varphi$  は応力  $\sigma$  と変形パラメータ  $\alpha$  のみの関数であるので、流動則は式(20), (21)により定めることができる。すなわち、主散逸ひずみ速度  $d'$  の方向を表わす単位のテンソル  $n$  の主値は

$$n_k = \frac{\sigma_k - \frac{3}{\sigma_k} / \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 9 / \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)}} \quad (k=1,2,3) \quad (61)$$

となる。この流動則には材料定数が関与していないことが注目される。

式(61)を、式(7)を介して、式(40)に代入して散逸ひずみ速度に対するLodeのパラメータを求める、これと応力に対するLodeのパラメータとの関係を示すと、図-8のようになる。同図の破線は金属塑性論や前節のモデルにおけるシミラリティー則を示している。この図より、応力比の増加とともにシミラリティー則から離れていく様子がわかる。シミラリティー則からのずれは金属材料の実験結果においても認められている<sup>14)</sup>。ただし、金属材料においては、純粹せん断応力 ( $\mu_\sigma = 0$ ) に対して純粹せん断ひずみ速度 ( $\mu_d = 0$ ) が対応するが、粒状体については、たとえば、文献11)や粒状体モデル3次元シミュレーション<sup>15)</sup>からもわかるように、このことは認められない。図-8に示される性質は、誘導異方性のもたらす典型的な挙動の一つと考えてよいと思われる。

拘束関数は、前節と同様に変形パラメータのみの関数とし、初期載荷においても散逸ひずみが生じるように次式を仮定する。

$$C(\alpha) = \frac{M}{1+K} \frac{1-b\alpha}{1+a\alpha} \quad (62)$$

以上の仮定より、散逸ひずみ速度を与える式(30)の中の  $m$  および  $D$  が、式(29)および式(27)より、

表-2 誘導異方性を考慮した散逸関数による構成則に用いた諸定数

$$E : 2,000 \text{ kgf/cm}^2 (196 \text{ MPa})$$

$$\nu : 0.3$$

$$M : 0.55 \quad K : 0.3 \quad a : 240 \quad b : 650$$

$$p : 4 \text{ kgf/cm}^2 (392 \text{ kPa})$$

次のように算定される。

$$m = \frac{\sigma}{\sigma \cdot n} - [M - (1+K)C + \frac{\sigma \cdot l}{\sigma \cdot n}] \frac{\partial \sigma \cdot l}{\partial \sigma} \quad (63)$$

$$D = -(1+K)\sigma \cdot l \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (64)$$

ここに、

$$\frac{\partial \sigma \cdot l}{\partial \sigma} = 3l^3 \quad (65)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = -\frac{M}{1+K} \frac{a+b}{(1+a\alpha)^2} \quad (66)$$

である。

以上より、このモデルにおいては、6つの材料定数  $E$ ,  $\nu$ ,  $M$ ,  $K$ ,  $a$ ,  $b$  を定めることにより、構成則が確定する。表-2に例として用いた諸定数の値を示す。要素試験のシミュレーションは、平均応力  $p$  一定の3軸圧縮試験と3軸伸張試験の2つについて行なった。以下の全ての図に両者の比較を示す。

図-9, 10に、それぞれ、応力ひずみ関係およびダイレイタンシー曲線を示す。3軸圧縮の応力ひずみ関係は前節と類似の関係にある。また、3軸伸張の場合については、ピーク値が低いことなど、より現実的な結果になっている。なお、文献11)などに比べるとダイレイタンシー曲線における差が若干大きめである。今後定数等の検討も必要であろう。

図-11には主応力比主ひずみ関係を示した。前節の結果と異なり、3軸圧縮・3軸伸張ともに、通常用いられる典型的な関係を与えている。このように、比較的少ない数の材料定数により、載荷方法の異なる要素試験に対応したシミュレーションが可能となっている。ここでは、3軸圧縮と3軸伸張の中間の状態についての結果は示さないが、流動則が図-8のようにスムーズな関係として与えられるので、妥当なシミュレーション結果を得ることができる。

図-12には正8面体せん断面における応力比とひずみ速度比の関係を示した。Roscoeらの散逸関数を用いた前節の場合と異なり、載荷方法により異なる関係を与える妥当な結果となっている。なお、ひずみ速度の中の散逸部分のみを取り出し、式(60)に従ってグラフを描くと図-13のようになり、載荷方法

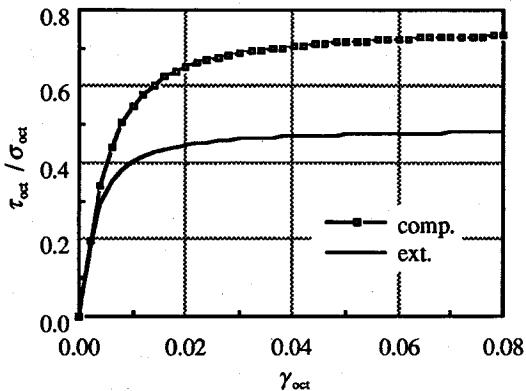


図-9 応力ひずみ関係

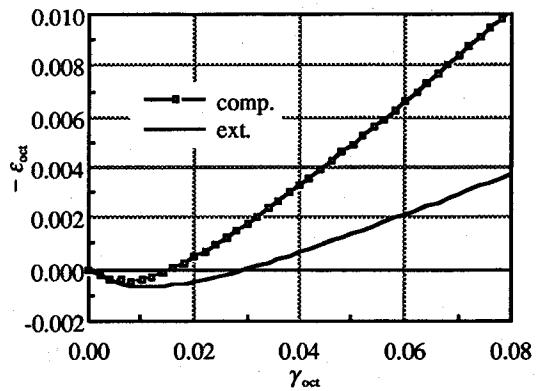


図-10 ダイレイタンシー曲線

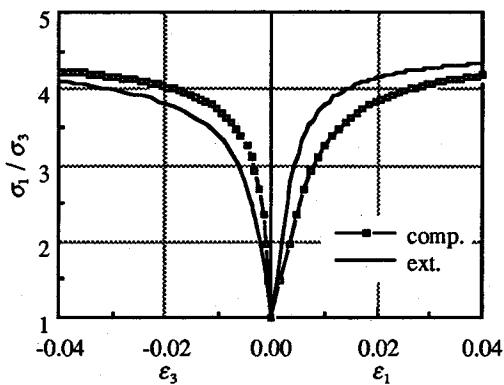


図-11 主応力比主ひずみ関係

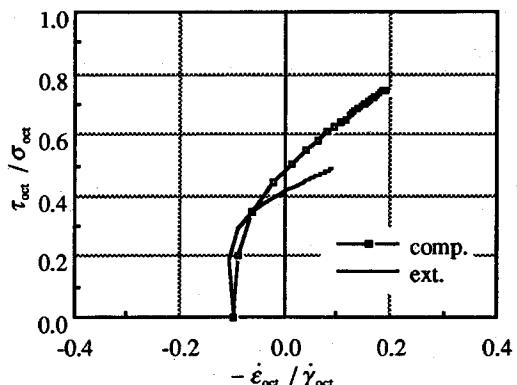


図-12 応力比ひずみ速度比関係

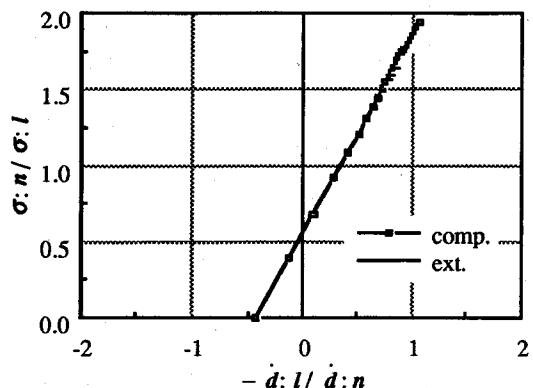


図-13 式(60)のグラフ

によらない直線関係が得られる。

図-14に主応力比と体積ひずみの関係を示した。この図においても、3軸圧縮と3軸伸張とで異なる関係を与える、妥当な結果となっている。SMPのオリジナルの理論<sup>13)</sup>においてはこのような差を表わすことができず、その後の修正理論においてはじめて差

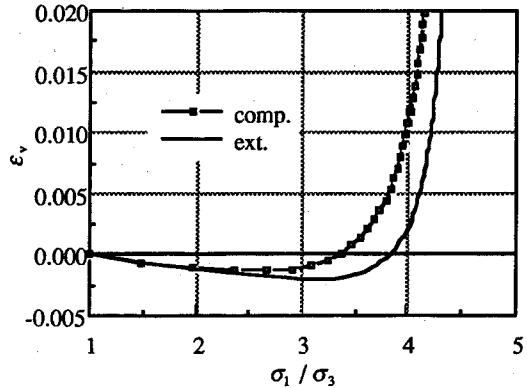


図-14 ダイレイタンシー応力比関係

を生じるようなモデル化がなされている<sup>11)</sup>。本論文においては、ひずみの分解を主散逸ひずみとこれにテンソル的に直交する従散逸ひずみとに分けるという考え方に基づいて以上のような結果を得たが、このような定式化は物理的かつ数学的に自然なものであると考えられる。

#### 4. あとがき

本文においては、摩擦性材料の構成則について、エネルギーの散逸機構に着目した理論展開を行った。また、粒状体への応用により本理論の有用性を示した。とくに、理論上ダイレイタンシーを非等方的テンソルとして定義することが有用であることを示した。その他、粒状体の構成則には誘導異方性や非関連型流動則が不可避であることなどを考察した。

本理論は、摩擦性材料以外の材料に対しても有効に応用することが可能であろう。その際、①材料固有の散逸変形モードを支配する主散逸ひずみ速度とそれに従属する従散逸ひずみ速度の関係を拘束条件としてどのように定めるか、②その散逸変形モードを生じさせるのに必要な散逸エネルギーを散逸関数としてどのように表現するか、という2点が鍵となるであろう。

本文においては、理論の基本的枠組みについての展開がなされたが、今後さらに理論を発展させる必要がある。以下に、今後の主な課題を列挙する。

①散逸関数に基づくエネルギー原理としての理論構成、上下界定理、安定性の考察、②有限変形としての定式化、変形局所化解析のための構成式の誘導、③増分非線形性のとり扱い、式(17)を仮定しない場合の流動則の一般的誘導方法、④散逸変形モードが複合している場合や散逸変形モードが変化する場合のとり扱い、⑤異方性を表現するためのより一般的なパラメータの導入など。

その他、応用面での検討事項として、拘束条件や散逸関数を具体的にどのように選択するかという課題があるが、本理論における散逸条件等は物理的な意味を有するので、マイクロメカニクスや破壊力学などと連携させることも可能であると思われる。

#### 参考文献

- 1) Spencer, A.J.M.: A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.12, pp.337-351, 1964.

- 2) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 3) Mehrabadi, M.M. and Cowin, S.C.: Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.26, pp.269-284, 1978.
- 4) 金谷健一：粒状体の速度場の理論-関連流動則と特性曲面-, 土質工学論文報告集, Vol.19, No.4, pp.103-112, 1979.
- 5) Nemat-Nasser, S. and Balandran, B.: Micromechanics of flow and failure modes of particulate media over a wide range of strain rates, *Advances in Micromechanics of Granular Materials*, Shen, H.H., Satake, M., Mehrabadi, M., Chang, C.S. and Campbell, C.S. eds., Elsevier, Amsterdam, pp.21-30, 1992.
- 6) Ziegler, H. and Wehrli, C.: The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.25, pp.183-238, 1987.
- 7) Housby, G.T.: A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermomechanics, *Deformation and Failure of Granular Materials*, Vermeer, P.A. and Luger, H. J. eds., Balkema, Rotterdam, pp.109-118, 1982.
- 8) Chandler, H.W.: A plasticity theory without Drucker's postulate suitable for granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.33, pp.215-226, 1985.
- 9) 岸野佑次：散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導、土木学会論文集, No.394/III-9, pp.115-122, 1988.
- 10) Martin, J.B : *Plasticity/Fundamentals and general results*, The MIT Press, 1975.
- 11) 中井照夫, 松岡 元: 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的解釈, 土木学会論文報告集, No.303, pp.65-77, 1980.
- 12) Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A.: Yielding of clays in states wetter than critical, *Géotechnique*, No.13, pp.211-240, 1963.
- 13) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. of JSCE*, No. 232, pp.59-70, 1974.
- 14) Kachanov, L.M.: *Foundations of the theory of plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- 15) 土倉 泰, 岸野佑次, 佐武正雄: 粒状要素法による粒状体の3次元変形機構の解析, 土木学会論文集, No.436/III-16, pp.111-120, 1991.

(1994. 6. 23 受付)

#### FORMULATION OF CONSTITUTIVE LAW FOR FRICTIONAL MATERIALS

Yuji KISHINO

A basic framework is proposed for the constitutive modeling of frictional materials. The theory has capability to reflect dissipation mechanism in terms of the dissipation condition, which is a generalization of the yielding condition. The dissipative strain-rate in this theory consists of two parts; the primary and subordinate strain-rates. The subordinate strain-rate, a generalized form of instantaneous dilatancy, is related anisotropically to the primary strain-rate, while the total strain-rate is determined with an energetically-derived flow rule as well as the associated consistency condition. Through examples, it is shown that the frictional dissipation condition leads to a reasonable constitutive law for granular materials.