

飽和・不飽和領域における物質移動を伴う密度依存地下水水流の数値解析手法に関する研究

西垣 誠¹・菱谷智幸²・橋本 学³・河野伊一郎⁴

¹正会員 工博 岡山大学助教授 工学部土木工学科 (〒700 岡山県岡山市津島中3-1-1)

²正会員 工修 岡山大学大学院自然科学研究科 (株)イイコンサルタント (〒171 東京都豊島区池袋3-1-2)

³三菱マテリアル(株) 地球事業センター原子力環境部 (〒112 東京都文京区小石川1-3-25)

⁴正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科

オイラリアン-ラグランジアン法は地下水物質輸送解析手法として非常に有用な手法である。本研究では、オイラリアン-ラグランジアン法を密度依存を考慮した不飽和領域の2次元移流分散問題に拡張した。本手法による解析結果と理論解および実験結果との比較を行い、本手法の妥当性を検証した。また、本手法を用いることで、メッシュサイズに依存せず精度良くシミュレートできることを示した。

Key Words: eulerian-lagurangian, finite element method, groundwater flow, saturate-unsaturate, density dependent, mass transuport analysis

1. はじめに

放射性廃棄物、産業廃棄物等の地層処分技術の確立には、環境汚染に対する高度な配慮が必要となる。また、化学肥料や農薬、重金属等の汚染物質が降雨浸透によって地表面から不飽和帯を通過し、地下水中に溶けこんだ汚染物質が地下水水流によって移流分散し、地下水汚染を起こすことが懸念される。このため、地下水汚染問題に対する定量的な予測評価手法の確立が望まれており、これまで多くの研究がなされてきた。

一般に地下水中の物質移動解析は移流分散方程式によってモデル化される。移流分散方程式では、移流項と分散項という2つの性質の異なる項を含むため、解析手法により解析解の振動や数値分散が起こる。このため、解析モデルの特性に適した解析手法を用いる必要がある。従来の解析手法を検討すると、差分法、有限要素法(オイラーの方法)は分散卓越問題に有効である。しかし、移流卓越問題に適用する場合には解の安定性を保つためにメッシュサイズを極めて細かくする必要があるため、実規模の解析を行うことが困難である¹⁾。これに対して特性曲線法(ラグランジュの方法)は移流卓越問題に有効であるが、移動粒子の扱いの難しさや分散卓越問題における分散項に対する解析誤差が問題となる²⁾。実際の解析では、地盤の不均質性から、部分的に分散卓越であったり、移流卓越であったりするため、問題を特定

することが難しく、どのような問題に対しても精度良く安定に解析を行うことができる手法が望ましい。

このため、分散と移流卓越の両問題に対してオイラーの方法とラグランジュの方法を併用するオイラリアン-ラグランジアン法(Eulerian-Lagurangian Numerical Method)(以下EL法)がNeuman^{3)~6)}によって提唱されている。この解析手法は基本的に特性曲線型有限要素法(CFEM)⁷⁾と同様で、移流項を特性曲線法でラグランジュ的に求め、分散項を有限要素法によって求める手法である。このように移流項と分散項を分けて解くことにより両問題に対して精度良く安定に解析解を求めることができる。また、従来の手法では非対称であった係数マトリクスが対称となり、解析に必要な記憶容量が半分ですむという利点も持っている。

EL法は当初1次元問題だけであったが、Sorek⁸⁾によって2次元の不飽和領域に拡張された。しかし、濃度変化がシャープなフロントをもつ問題には適していなかった。その後、EL法はCady⁹⁾によって3次元場に拡張され、また、濃度変化がシャープなフロントをもつ問題に対して、計算途中で有限要素メッシュの細分割を行うことで、非常に精度の高い解析を可能にした。しかし、Cadyの手法では地盤の不均質性を考慮することができないため、実用上の問題が残された。また、国内においても寺脇¹⁰⁾や古市¹¹⁾がEL法を2次元に拡張し、メッシュ分割サイズや時間間隔の指標であるベクレ数やクーラン数につ

いて吟味している。また、小林^{12),13)}も同様に2次元に拡張し、移流計算の新しい補間法を提案しているが、基本的に有限要素メッシュサイズに補間精度が依存するため、メッシュが粗い領域では誤差が大きくなる可能性がある。また、小林はEL法での境界条件の処理について吟味し、境界近傍でメッシュサイズを細かくする必要性を示した。

本論文では、これらの課題を解決する一手法としてEL法を密度依存を考慮した不飽和領域の2次元移流分散問題に拡張し、理論解および実験結果との比較検討を行い、手法の妥当性の検証を行った。また、従来のEL法による解析解との比較検討を行い、有用性を示した。

2. 密度依存を考慮した浸透と移流分散の基礎理論

(1) 浸透の基礎理論

密度依存を考慮した飽和・不飽和浸透流方程式は、質量保存則とダルシーの方程式から次式で表される^{14),15)}。

$$\rho_i \theta \gamma \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \{ \beta Ss + Cs(\theta) \} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \rho K_i^s K_r(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \rho K_{i3}^s K_r(\theta) \rho_r \} \quad (1)$$

ここで、 φ ：圧力水頭、 θ ：体積含水率、 Ss ：比貯留係数、 $Cs(\theta)$ ：比水分容量、 K_i^s ：飽和透水テンソル、 $K_r(\theta)$ ：比透水係数、 c ：濃度 ($0 \leq c \leq 1$ 、飽和濃度を1として正規化)、 t ：時間、 ρ_i ：溶媒の密度、 ρ ：流体の密度、 ρ_r (ρ / ρ_i)：溶媒の密度 ρ_i に対する流体の密度比、 $\beta = 1$ ：飽和領域、0：不飽和領域、 γ ：溶質の密度比 (一般に海水で $\gamma = 0.025$)

また、(1)式での密度 ρ は次式で濃度 c と関連づけられる。

$$\rho = \rho_i (1 + \gamma c) \quad (2)$$

密度依存を考慮した移流分散解析では、濃度変化によって密度が変化する。すなわち、式(1)の左辺第1項の c と左辺第2項の ρ の値が変化し密度流が生じるため、式(1)と後述の移流分散方程式を2段階に連成させて解析を行う必要がある。一方、濃度変化による密度変化が生じないとすると、浸透と移流分散は別々の問題として取り扱うことができ、式(1)により、定常もしくは非定常浸透解析を行い、流速分布、体積含水率分布を求め、この値を用いて移流分散解析のみを実施することができる。

(2) 浸透の初期条件および境界条件

式(1)を解くための初期条件および境界条件を次のように定める。

a) 初期条件

解析領域における初期の圧力水頭分布が既知である。

$$\varphi(x_i, 0) = \varphi_0(x_i) \quad (3)$$

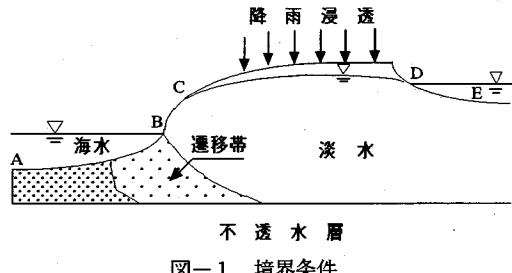


図-1 境界条件

b) 境界条件

境界条件としては、図-1に示すように次の3種類の条件が考えられる。

①境界面上で水頭が既知の境界

$$\varphi(x_i, t) = \varphi_b(x_i, t) \quad (4)$$

この境界条件は、境界面上で水頭が一定、あるいは時間の関数で与えられる境界条件であり、図-1の海底面(AB)、河川底面(DE)に用いられる。

②出入り流量が既知である境界

$$-\{K_i^s K_r(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + K_{i3}^s K_r(\theta) \rho_r\} \hat{n} = q_b(x_i, t) \quad (5)$$

ここで \hat{n} は境界面に対する法線ベクトルである。この境界は定流量での注入、あるいは揚水する場合や、図-1の降雨浸透面(CD)に用いられる。また、出入りが零である不透水境界条件もこの一つである。

③浸出面上の境界

$$\varphi(x_i, t) = 0 \text{ かつ } q_s(x_i, t) \geq 0 \quad (6)$$

図-1(BC)境界がこの条件に相当し、圧力水頭 $\varphi = 0$ かつ浸出流量が常に流出の符号である境界である。

(3) 移流分散の基礎方程式

移流分散の基礎方程式は、

$$R \theta \rho \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta \rho D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta \rho V_i c) - \theta \rho \lambda R c - Q_c \quad (7)$$

ここで、 R ：遅延係数、 D_i ：分散テンソル、 V_i ：実流速、 Q_c ：源泉項、 λ ：減衰定数

遅延係数 R は、土中での吸着による遅れを表すもので一般に次式で表される。

$$R = (1 + \frac{\rho_s}{\theta} K_d) \quad (8)$$

ここで、 K_d ：飽和土に対する吸着係数、 ρ_s ：土粒子の単位体積重量。また、分散テンソル D_i はBear¹⁶⁾が示した拡散係数も含めた流速に依存する次式を用いた。

$$D_i = \alpha_r \|V\| \delta_i + (\alpha_L + \alpha_r) \frac{V_i V_j}{\|V\|^2} + \alpha_m \tau \delta_i \quad (9)$$

ここで、 α_r ：横分散長、 α_L ：縦分散長、 V_i ：実流速ベクトル、 $\|V\|$ ：実流速のノルム、 α_m ：分子拡散係数、

τ : 屈曲率, δ_i : クロネッカのデルタ。

分散テンソル D_i は不飽和領域において、非線形性¹⁷⁾があると考えられるが、不飽和パラメータ等、未知なパラメータが多く、本論文では、不飽和領域においても飽和領域と同じとし、流速依存のみを考慮することとした。

次に、式(7)をNeumanの手法を用いて移流項と分散項を分離するため、次式に示すラグランジュ微分⁵⁾を用いる。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V_i}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (10)$$

式(7)に式(10)を用いると次のように表せる。

$$R\theta\rho \frac{dc}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta\rho D_i \frac{\partial c}{\partial x_j}) - \theta\rho\lambda R c - Q_c \quad (11)$$

ここで濃度 c を移流に関する濃度 \bar{c} と分散に関する濃度 \dot{c} に分ける。

$$c(x_i, t) = \bar{c}(x_i, t) + \dot{c}(x_i, t) \quad (12)$$

式(12)より、移流項に対する次式が得られる。

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = -\lambda c \quad (13)$$

また、式(11)より、移流による濃度を除いた分散方程式は次式となる。

$$R\theta\rho \left(\frac{dc}{dt} - \frac{d\bar{c}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta\rho D_i \frac{\partial c}{\partial x_j}) - \theta\rho\lambda R(c - \bar{c}) - Q_c \quad (14)$$

(4) 移流分散の初期条件と境界条件

式(13), (14)で分離された移流項と分散項に対して、移流に関する方程式から条件を与えていく。

a) 移流項について

① 初期条件

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = 0 \quad (15)$$

$$\bar{c}(x_i, 0) = c_0(x_i, 0) \quad (16)$$

とし、移流による濃度は全濃度の初期分布と等しいとする。

② 境界条件

$$V_i - n\bar{c}(x_i, t) + \alpha(\bar{c}(x_i, t) - c_b(x_i, t)) = Q_b(x_i, t) \quad (17)$$

c_b, Q_b が境界条件で、 $\alpha \rightarrow \infty$ で濃度既知境界となり、 $\alpha=0$ とすると流量既知境界となる。

b) 分散項について

① 初期条件

$$R\theta\rho \frac{d\dot{c}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta\rho D_i \frac{\partial \dot{c}}{\partial x_j}) - \theta\rho\lambda R \dot{c} - Q_c + \bar{g} \quad (18)$$

ここで、

$$\bar{g} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta\rho D_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j}) - \theta\rho\lambda R \bar{c} \quad (19)$$

$$\dot{c} = 0 \quad (20)$$

② 境界条件

$$-(\theta\rho D_i \frac{\partial \dot{c}}{\partial x_j} - V_i \dot{c}) \hat{n} + \alpha \dot{c} = (\theta\rho D_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j}) \hat{n} \quad (21)$$

このように移流項に対して、式(15)～(17)を先に満足させてから、式(18)～(21)を分散項に与えることで順次移流分散方程式を移流と分散それぞれの初期値・境界値問題に分離して解いて行く。

3. E-L 法による離散化

(1) 浸透方程式の離散化

式(1)を式(3)～(6)の条件のもとで満足させる解を求めるため、Galerkin法により離散化を行う。

$$A_{mn} \varphi_m + F_{mn} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + X_{mn} \frac{\partial c_m}{\partial t} - Q_n + B_n = 0 \quad (22)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \sum_{e=1}^N \rho_k K_{ij}^e K_l^e \int_V N_k^e N_l^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} \frac{\partial N_m^e}{\partial x_j} dv \\ F_{mn} &= \sum_{e=1}^N \rho_k \int_V N_n^e N_m^e N_k^e (C_{kl} N_l^e + \beta S_{kl}) dv \\ X_{mn} &= \sum_{e=1}^N \rho_k \theta_k \gamma \int_V N_k^e N_n^e N_m^e dv \\ Q_n &= - \sum_{e=1}^N \int_V \rho_k N_k^e V_i N_n^e d\Gamma \\ B_n &= \sum_{e=1}^N \rho_k K_{ij}^e K_l^e \int_V N_k^e N_l^e \rho_e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} dv \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで、 N は形状関数である。また、式(22)の時間項は次式のように差分近似を行った。

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{F_{mn}^{k+1/2}}{\Delta t} + \omega A_{mn}^{k+1/2} \right) \varphi_m^{k+1} = Q_n^{k+1/2} - B_n^{k+1/2} \\ & - \frac{C_m^{k+1}}{\Delta t} X_n^{k+1/2} + \left\{ \frac{F_{mn}^{k+1/2}}{\Delta t} - (1-\omega) A_{mn}^{k+1/2} \right\} \varphi_m^k \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここで、($n, m = 1, 2, 3, \dots$)、 $\omega = 0.5$: 中央差分、 $\omega = 1$: 後退差分。

(2) 移流方程式の離散化

移流による濃度を求めるため、Single-Step Reverse Particle Tracking (以下SRPT法) を用いる⁵⁾。以下に、その手順を示す。

まず、各節点の移流による濃度変化を求めるため、時間 t^{k+1} の時、節点 n に一致する座標 x_n^{k+1} に位置する粒子は、時間 t^k においてどの位置から移流してきたかを考えると、その初期座標 x_n^k は次式で与えられる。

$$x_n^k = x_n^{k+1} - \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{V}{R} dt \quad (25)$$

式(25)は、 dV/dt が一定と考えると、ルンゲ・クッタ法により積分が可能になり、 x_n^k を求めることができる。

本論文では、流速分布により2次もしくは4次のルンゲ・クッタ法¹⁸⁾を用いた。次に、座標 x_n^k を内包する要素に着目し、形状関数 N を用いた補間により初期濃度 c_n^k を求めることができる。

$$c_n^k(x_i, t) = \sum_{m=1}^M c_m(t) N_m(x_i) \quad (26)$$

しかし、上記の補間法では、メッシュサイズにより補間精度が依存するため、粗いメッシュ部では高精度な補間が望めない。このためCadyはContineous Forward Particle Traking(以下CFPT法)を併用した⁹⁾。CFPT法では濃度変化がシャープなフロントを持つ領域に初期濃度を持たせた移動粒子を配置し、濃度フロントとともに移流させ、移動後の移動粒子を含めた解析領域全体の有限要素メッシュの細分割により、式(26)の補間を用いることで精度の高い補間が可能になる。他に、シャープな濃度フロントに有効な手法として、Yen¹⁹⁾のZoomable Meshがある。Zoomable Meshでは、解析用のメッシュの他に、ズーミング用の細分割されたメッシュを二重に用意し、濃度フロント部を計算途中にメッシュを切り替え、フロントが移動するとメッシュを元に戻すことで高精度化を行っている。しかし、この手法ではメッシュの二重化という繁雑さが残る。このため、本論文では基本的にCadyの手法を用いたが、後述の理由により、細分割単位を要素毎に行うよう手法の修正を行った。

次に、式(13)に変数分離を施し、積分することで c_n^k を用いて \bar{c}_n^{k+1} を計算する。

$$\bar{c}_n^{k+1} = c_n^k \exp\left(-\int_k^{k+1} \lambda dt\right) \quad (27)$$

式(25)～(27)を用いてSRPT法により、全節点の移流による濃度を計算した後、CFPT法で配置した移動粒子の t^{k+1} における座標と濃度を同様に求める。

$$x_p^{k+1} = x_p^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{V}{R} dt \quad (28)$$

以上のような手順により、各節点の移流による濃度変化をラグランジュ的に処理することが可能になる。

(3) 分散方程式の離散化

分散方程式(14)を式(18)～(21)の条件のもとで満足させる解を求めるため、Galekin法を用いて離散化をおこなう。

$$W_m \left(\frac{dc_m}{dt} - \frac{d\bar{c}_m}{dt} \right) - G_m c_m + L_m (c_m - \bar{c}_m) - Q c_m = 0 \quad (29)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} G_m &= \sum_{i=1}^N \theta_i \rho_i D_i \int_V N_i^e N_i^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} dv \\ W_m &= \sum_{i=1}^N R^e \theta_i \rho_i \int_V N_i^e N_i^e N_n^e N_m^e dv \\ L_m &= \sum_{i=1}^N R^e \lambda^e \theta_i \rho_i \int_V N_i^e N_i^e N_n^e N_m^e dv \\ Q c_m &= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma} \hat{n} N_i^e \theta_i \rho_i \left(-N_i^e N_i^e D_i \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} \right) d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

また、式(30)の時間項は、式(24)と同様に差分近似を用いた。

$$\begin{aligned} \{ \omega(G_m + L_m) + \frac{W_m}{\Delta t} \} c_m^{k+1} &= -(1-\omega)(G_m + L_m) c_m^k \\ &+ (\omega L_m + \frac{W_m}{\Delta t}) \bar{c}_m^{k+1} + (1-\omega) L_m \bar{c}_m^k - Q c_m \end{aligned} \quad (31)$$

移流項と分散項を分離しない従来の手法では、式(30)の G_m に相当する係数マトリクスに式(7)右辺第2項の移流項が含まれるため非対称となるが、本手法では分散項のみの対称マトリクスとなり、全ての係数マトリクスが対称になるため、計算に必要なメモリ容量が半分となる。

式(29)を用いる場合、CFPT法による移動粒子濃度に分散項をどのように反映させるかが問題となる。Cadyは、移動粒子を含めて解析領域全体のメッシュの細分割を行い、式(29)を適用することで、移動粒子の分散項の評価を行っている。しかし、Cadyの提案する方法では解析領域全体を一括してメッシュ分割を行うため、材料境界を考慮した分割ができず、また、演算にきわめて大きい記憶容量が必要となり、実際の問題に適用することが困難である。このため、本論文では、分割を要素単位で行うこととした(Modified Contineous Forward Particle Traking)(以下、MCFPT法)。MCFPT法では、要素単位でメッシュの細分割を行うことで材料境界を保つことができ、不均質地盤に適用することが可能になる。メッシュ分割手法として、高澤^{20), 21)}の手法を用いた。この手法では、凸凹の境界を持つ領域の三角形によるメッシュ分割が可能であり、材料境界を考慮する際、通常のデラウニ一分割よりも取り扱いが容易である。

4. 解析手法

密度依存問題では、式(1), (7)で示すように圧力水頭と濃度の2変数を取り扱う必要がある。本論文では、解析効率および境界条件の取り扱いから2変数をそれぞれの支配方程式により、2段階に分けて求め、繰り返し計算により、連成させる2段階解析法を用いた。図-2に

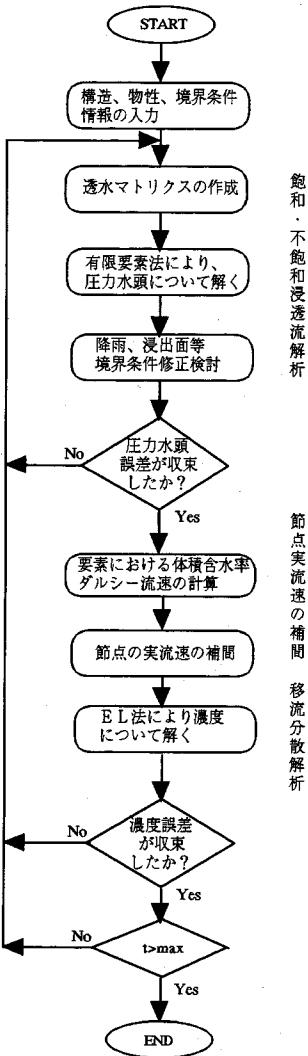


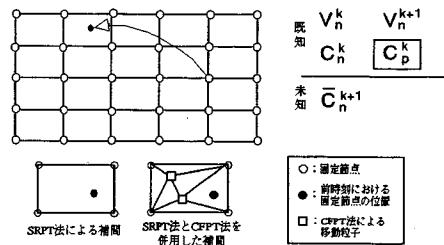
図-2 解析フロー図

数値解析手法の流れを示す。まず最初に、濃度を既知として飽和・不飽和浸透流解析を行い、要素重心におけるダルシー流速から、節点の実流速を求める。次に、流れ場既知として移流分散解析を行い、濃度分布を求める。この求められた濃度分布を既知条件として浸透流解析に戻り、濃度誤差に対する反復計算を行い、各時間ステップにおける収束解を得る。

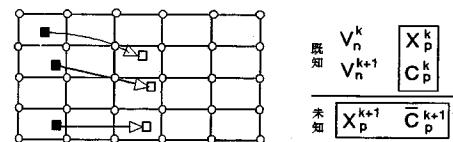
次に、EL法による数値解析法の概略を図-3に示し、概要を以下に示す。

- ①SRPT法により特性曲線上を運ばれた節点濃度を求める。濃度変化が急峻な領域にはCFPT法を併用し、移動粒子を含む要素を細分割し、濃度補間精度を向上させる。
- ②CFPT法による各移動粒子を特性曲線上で移動させる。
- ③CFPT法で移動粒子の分散項を計算するため、各要素単位にメッシュの細分割を行う。

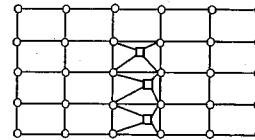
①SRPT法とCFPT法を併用した固定節点の移流による濃度分布計算



②CFPT法による移動粒子の特性曲線上の移動



③有限要素メッシュの細分割



④分散方程式を解く

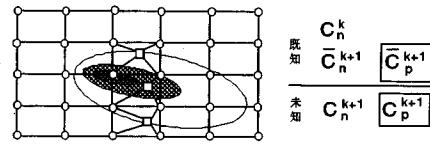


図-3 EL法による解析手法概略図

④分散の支配方程式を解き、各節点および移動粒子の全濃度を求める。

以上の手順で、①～②において、ラグラジュ的に移流による濃度変化を求め、③～④でオイラー的に分散による濃度変化を計算し、全濃度分布を求める。

従来のEL法では、移流卓越問題において①の濃度補間誤差と分散卓越問題において④の移動粒子の分散項の補間誤差が入るため解析精度が低くなっていた。しかし、本手法では、CFPT法を併用することで①、④における補間誤差がほとんど入らず高精度な解析が可能になる。

CFPT法では、移動粒子を高濃度な領域の周辺に初期配置し、また汚染物質が供給される部分とフレッシュな部分の境界周辺に、常に移動粒子を発生させ、解析精度を向上させる必要がある。この場合、時間ステップと共に移動粒子数が増加し、計算時間および容量の増加が見

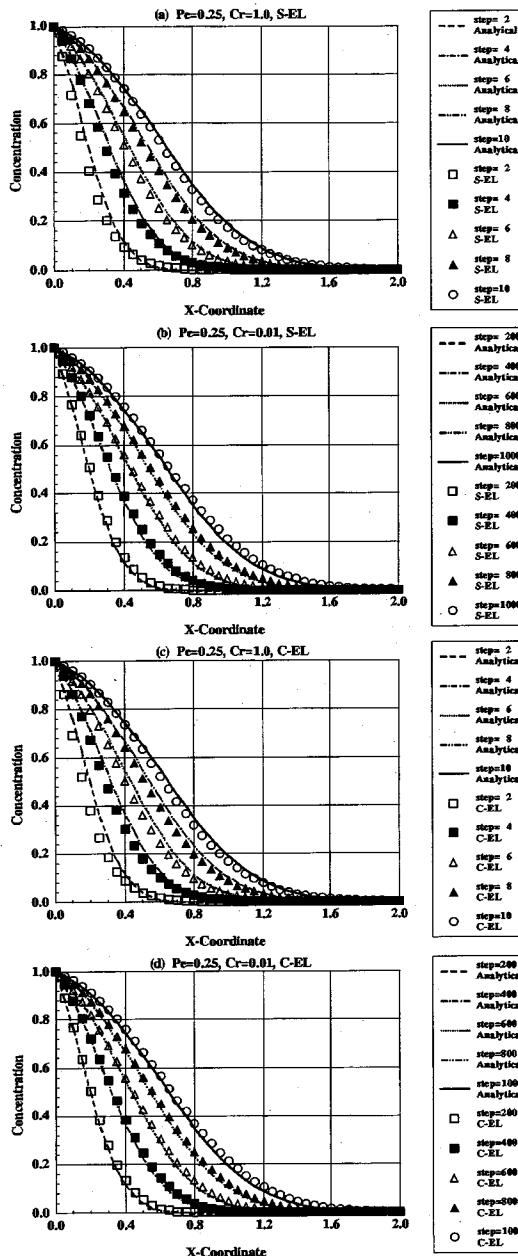


図-5 1次元理論解析との比較(分散卓越問題)

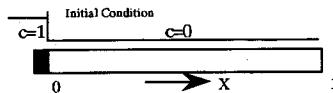


図-4 1次元理論解析初期条件

込まれるが、解析精度を保つためには元来必要なものと考えられる。また、最終的には移動粒子が解析領域から外側へ流出し、解析領域には一定の粒子数となり、増加が収束すると考えられる。

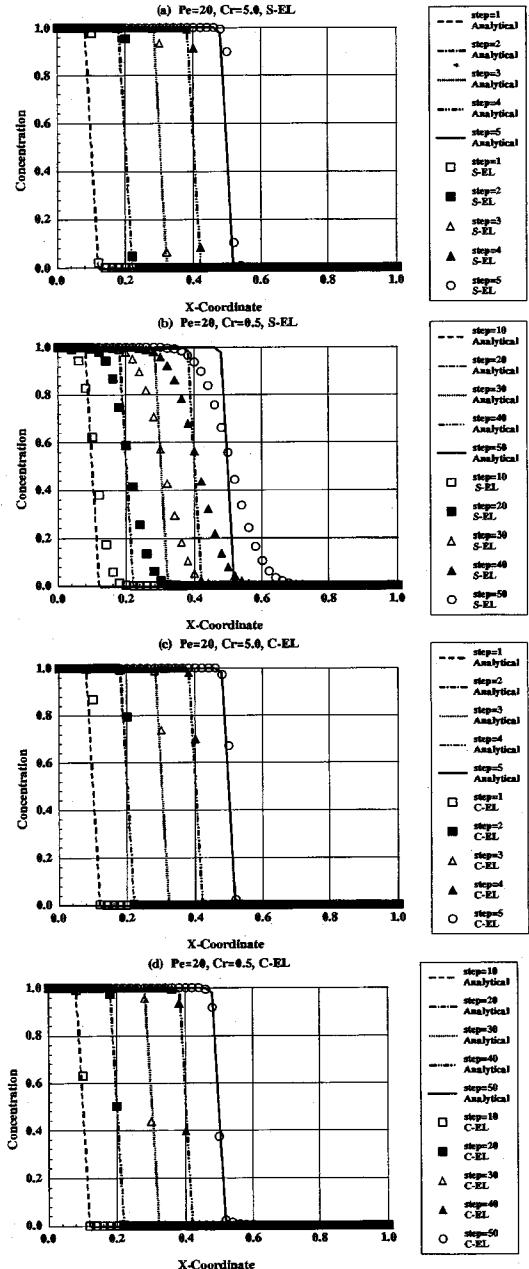


図-6 1次元理論解析との比較(移流卓越問題)

5. 解析手法の妥当性の検証

本EL法による数値解析の解の精度や妥当性を検証するため、理論解析解と過去に行われた移流分散に関する実験結果との比較検討を行った。

(1) 飽和1次元理論解との比較

図-4に示す1次元問題を用いて解析手法の検証を行った。理論解析の基礎方程式、初期条件および境界条

表-1 入力物性値²³⁾

透水係数(cm/sec)	0.02625
有効間隙率	0.38
縦分散長(cm)	0.0
横分散長(cm)	0.0
拡散係数(cm ² /sec)	0.07

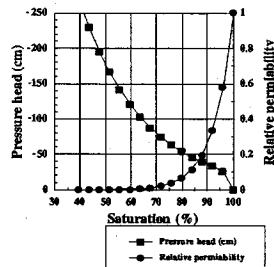
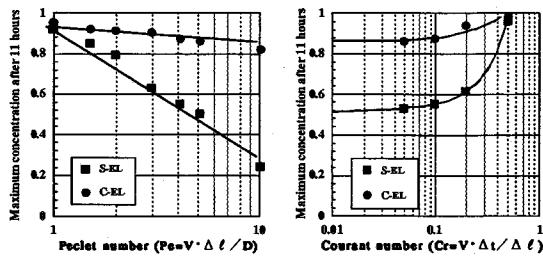
図-7 水分特性曲線²³⁾

図-8 ベクレ数-最大濃度

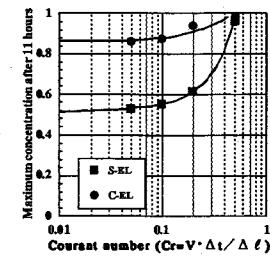


図-9 クーラン数-最大濃度

件を次に示す。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} \quad (32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.C. : } c(x,0) = 0.0 \\ \text{B.C. : } c(0,t) = 1.0 \\ c(\infty,t) = 0.0 \end{array} \right\} \quad (33)$$

この時の理論解は次式で与えられる⁵⁾。

$$c(x,t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}} \right) + \exp \left(\frac{vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+vt}{\sqrt{4Dt}} \right) \right\} \quad (34)$$

図-5 および図-6 の(a),(b),(c),(d)にベクレ数、クーラン数をそれぞれ変化させたときの解析結果を理論解と比較して示す。ベクレ数($Pe=V\Delta\ell/D$)は、この値が大きくなれば移流卓越、小さければ分散卓越となり、解析モデルの指標となる。また、クーラン数($Cr=V\Delta t/\Delta\ell$)は、流速に対する時間ステップ間隔の指標であり、通常の有限要素法では、安定に解析を行うためには $Cr < 1$ を満足する必要があるといわれている²²⁾。図の(a),(b)が従来のEL法（以下S-EL法）であり、(c),(d)がCFPT法を併用したEL法（以下C-EL法）によるものである。C-EL法では濃度=1の境界附近に、メッシュのもとべクレ数の1/2になるよう移動粒子を初期配置し解析を行った。図-5, 6は縦軸に濃度、横軸に1次元軸の座標を示しており、実線が理論解、セントシンボルが解析解を表している。図-5ではベクレ数が小さいため、どちらの手法においてもほとんど差がないが、図-6のようにベクレ数が大きい場合には、S-EL法ではクーラン数が小さくなると誤差が大きくなる。この現象は、前述のクーラン数の制約条件と相反するが、小林の研究²²⁾でも同様のことが指摘されており、これは、クーラン数が小さくなることで時間間隔が短くなり、濃度フロントがメッシュ間隔内で計算されるステップが増加し、離散化誤差が蓄積されることにより発生したものと考えられる。これに対して、C-EL法では、クーラン数に関係なく良い結果が得られている。

(2) 不飽和1次元物質輸送実験結果との比較

A.W.Warricらは、 CaCl_2 をトレーサーとして不飽和土中の物質移動の実験を行った²³⁾。実験では、原位置で初期

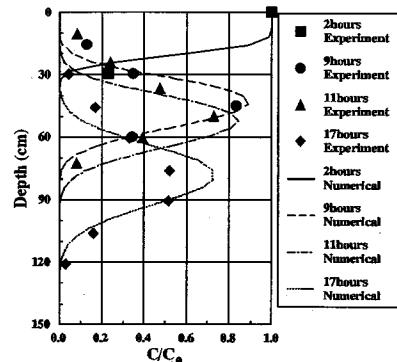


図-10 深度-濃度分布図(メッシュ幅=4cm)

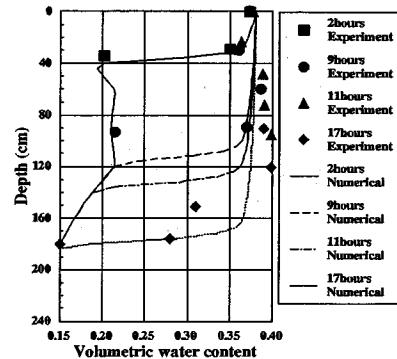


図-11 深度-体積含水率(メッシュ幅=4cm)

飽和度分布を測定し、不飽和状態の地表から CaCl_2 溶液を注入した後、真水に切り替えて注入を続け、17.5時間にわたって各深度毎の飽和度と濃度が測定された。この実験をシミュレートするため、メッシュサイズの異なる7モデル(メッシュ幅=1.0, 1.5, 2, 3, 4.5, 10 cm)を作成し、ベクレ数とクーラン数に対するパラメータスタディをS-EL, C-EL両手法について行った。表-1に入力物性値を、図-7に水分特性曲線を示す。また、C-EL法による解析では、移動粒子を局所メッシュサイズが1.0 cm程度になるよう配置した。

図-8に1例として11時間後におけるベクレ数と最大濃度(各時間における濃度の最大値)の関係を示す。

S-EL法では、ベクレ数が増加するに従って最大濃度

が大きく低下している。このことは、メッシュサイズが解析解に大きな影響を与えており、メッシュの分割が解析解を決めてしまうことを示している。これと比較してC-EL法では、ペクレ数によらずほぼ一定の最大濃度が得られている。原理的に流れ場が一定であれば、C-EL法ではペクレ数によらず一定の最大濃度が計算されるべきであるが、本解析では若干の最大濃度の低下が認められた。これは、本解析の流れ場が飽和・不飽和の非定常場であり、メッシュが粗くなることで発生した流れ場の計算誤差により、移流項に対する濃度低下が起こったと考えられる。また、図-9にクーラン数と最大濃度との関係の1例(11時間後)を示す。S-EL法ではクーラン数が小さくなるにつれて最大濃度が低下しており、1次元理論解同様の数値分散による濃度低下が認められた。これと比較してC-EL法では、クーラン数によらずほぼ同じ最大濃度が計算された。このようにC-EL法は、他の手法と比較してメッシュサイズ等解析条件によらず同様な解析解が得られることから、実用性の高い手法であると考えられる。

次に図-10, 11にメッシュサイズが4cmのモデルに対するC-EL法を用いた各時間における深度-濃度分布図と深度-体積含水率分布図を示す。両図ともに縦軸に地表からの深度を、横軸にそれぞれ濃度と体積含水率を、また、実験開始後2,9,11,17時間における実験値をセンタシンボルで示し、各線分が解析値を示している。図-10の濃度分布をみると各時間において実験結果に近い分布が得られた。また、図-11で浸潤面の位置に着目すると、9,11時間で差が認められたが、2,17時間では実験結果とほぼ一致した解析結果が得られた。

(3) 飽和2次元塩水浸入実験結果との比較

細川らは、被圧帶水層における塩水域の定常および非定常浸入・分散に関する室内実験を行った²⁴⁾。図-12に実験の概要を示す。帯水層をガラス球で作成し、着色した塩水を帯水層に浸入させ定常状態を作り出し、その後、境界の水深を下げ、非定常状態における塩水の浸入過程を目視するとともに濃度センサーによる濃度分布計測を行った。また、粒子追跡法(特性曲線法)による解析も行われ(20,301節点、20,000要素、80,000粒子)、実験結果によく適合した結果を得ている。本論文では、解析領域を1cmピッチ(5,151節点、5,000要素)に分割したモデルを用いて解析を行った。計算に用いた入力物性値および境界条件を表-2、図-13に示す。

図-14, 15に定常状態における濃度等価線図と各計測ラインにおける濃度分布を示す。図中の黒丸が実験結果を、実線が解析結果で、濃度0.9, 0.5, 0.1の等価線を示している。どちらも、計測値のシャープな濃度分布に一致した解析解が得られている。次に、図-16, 17に非定常状態の5分後における濃度等価線図と各時間毎の中間部の

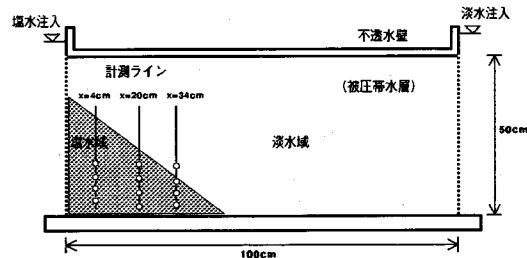


図-12 塩水浸入実験概要

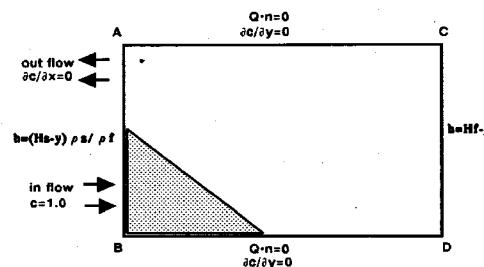


図-13 境界条件

表-2 入力物性値²⁴⁾

帯水層材質	ガラス球
透水係数 (cm/sec)	3.5
体積含水率	0.406
淡水密度 (g/cm ³)	1.000
塩水密度 (g/cm ³)	1.025
離分散長 (cm)	0.2196
横分散長 (cm)	0.0050
分子拡散係数 (cm ² /sec)	0.00001

計測ラインにおける濃度分布を示している。定常解析と比較して濃度分布の広がり幅が多くなっている。また、計測値に比較して解析結果は緩い濃度分布となっているものの、かなり良い近似結果が得られていると考えられる。

7. 結 論

本論文では、EL法を2次元飽和・不飽和領域における密度依存流を考慮した手法に拡張し、理論解析および実験結果と比較検討することで本手法の妥当性の検証を行った。

本論文で得られた成果および今後の課題をまとめると以下のようになる。

(1) EL法を2次元の不飽和領域における密度依存流を考慮した解析手法に拡張し、定式化を行った。

(2) 圧力水頭と濃度の2つの独立変数をもつ現象を浸透と移流分散方程式を2段階に求め反復することで連成させる手法を示すとともに、移流分散方程式にEL法を用いることで、係数マトリクスの対称性を保持し、解析に必要な計算メモリー容量を従来の半分にした。

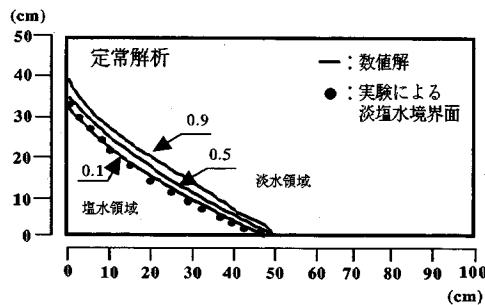


図-1-4 定常状態における濃度等価線図

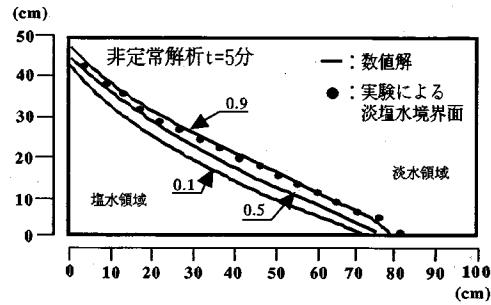


図-1-7 非定常状態(5分)における濃度分布

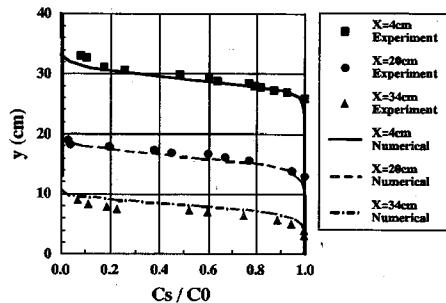


図-1-5 定常状態における濃度分布

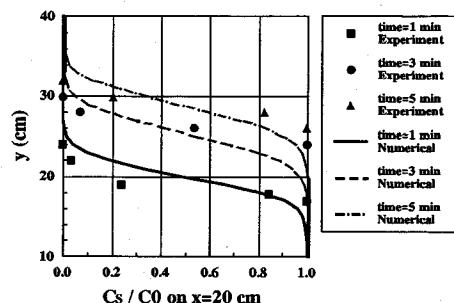


図-1-6 非定常状態(5分)における濃度等価線図

(3) 従来のEL手法では均質地盤にしか適用できなかつたContineous Forward Particle Traking法(CFPT法)を不均質地盤に適用できるよう部分要素分割法(MCFPT法)に改良した。

(4) 理論解析と比較して、従来のEL法では、ペクレ数が大きいか、クーラン数が小さいと誤差が大きくなっていたが、MCFPT法を用いることで、ペクレ数およびクーラン数に影響を受けることなく、安定かつ精度良く移流分散解析を行なえることが明らかになった。

(5) 不飽和領域における解析においても、MCFPT法を用いることでメッシュサイズ等、解析条件によらず実験結果と良い一致が得られた。

(6) 塩水浸入問題のように密度依存流を考慮した解析では、淡塩水境界で濃度分布が急激に変化するだけでなく、流速分布も急激に変化するため、MCFPT法では、十分なシミュレートが出来なかった。このため、MCFPT法を流れ場の計算過程にも応用し、シャープな濃度および流速分布に対処できるようにする必要があると考えられる。

MCFPT法では、初期粒子の配置が解析精度に影響を与える。本論文では、局所ペクレ数が2以下になるよう移動粒子を配置したが、今後、配置規準と解析精度および解析効率に対する研究が必要と考えられる。

本論文のEL法で併用したMCFPT法は、時間的にかつ空間的に解析状況に最適なメッシュ形状を計算過程の中で作

り出すことができる手法である。このため、従来の浸透流解析で収束性が悪く、シャープな浸潤線をもつ降雨浸透問題や気液2相解析等に非常に有効な手法に成り得ると考えられることから、本手法の今後の発展を期したい。

参考文献

- 1) 西垣誠:誌面講座 地下水数値計算法(13)2-4.物質輸送のその他の解析法—オイラリアンーラグラジアン法(EL法)—, 地下水学会誌, 第33巻, 第4号, pp.265~276, 1991.
- 2) 粉井和朗:誌面講座 地下水数値計算法(11)2-2.差分法と特性曲線法による物質輸送解析の応用, 地下水学会誌, 第33巻, 第3号, pp.177-184, 1991.
- 3) Shlomo P. Neuman:A Eulerian-Lagrangian Numerical Scheme for the Dispersion-Convection Equation Using Conjugate Space-Time Grids, *Journal of Computational Physics* 41, pp.270-294, 1981.
- 4) Shlomo P. Neuman and Shaul Sorec:Eulerian-Lagrangian Method for Advection-Dispersion, *Finite Elements in Water Resources Proceedings of the 4th International Conference*, Hannover, Germany, June., pp.14-41-14-68, 1982.
- 5) Shlomo P. Neuman:Adaptive Eulerian-Lagrangian Finite Element Method for Advection-Dispersion, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp.321-337, 1984.
- 6) Shlomo P. Neuman and T.N.Narasimhan:Mixed Explicit-Implicit Iterative Finite Element Scheme for Diffusion-Type Problems:I. Theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.11, pp.309-323, 1977.

- 7) 藤繩克之:誌面講座 地下水数値計算法(12)2-3.有限要素法と特性曲線法による物質輸送解析, 地下水学会誌, 第33巻, 第3号, pp.185-193, 1991.
- 8) Shaul Sorek:Eulerian-Lagrangian method for solving transport in aquifers, *Adv. Water Resources*, Vol. 11, June, pp.67-73, 1988.
- 9) R.Cady,S.P.Nueman:Three-Dimensional Adaptive Eulerian-Lagrangian Finite Element Method for Advection-Dispersion, *Computational Method in Water Resources Proceeding of the VII International Conference*, MIT, USA, June., pp.183-193, 1988.
- 10) 寺脇正文:割れ目系岩盤内の飽和浸透流と汚染物質移動に関する研究—有限要素ペナルティ法と2次元オイラー・ラグランジ法による数値解析-, 京都大学修士論文, 1984.
- 11) 古市徹, 徳丸英勝:移流拡散方程式の数値解析のための Euler的方法とLagrange的手法, 京都大学環境衛生工学研究会シンポジウム講演論文集, 7, pp.91-98, 1985.
- 12) 小林晃:オイラー-ラグランジ手法を用いた岩盤内の拡散挙動解析, 第7回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.241-246, 1987.
- 13) 小林晃:オイラー-ラグランジ手法に関する一考察, 土木学会第43回年次学術講演会, 第III部門, pp.874-875, 1988.
- 14) Jhon F. Pickens, Rovert W. Gillham, Douglas R. Cameron:Finite Element Analysis of The Transport of Water and Solutes in Tile-Drained Soil, *Journal Hydrogy*, Vol.40, pp.243-264, 1979.
- 15) 河野伊一郎, 西垣誠, 田中慎一:飽和・不飽和浸透流における非定常塩水化現象の有限要素法, 土木学会論文報告集, 第331号, pp.133-141, 1983.
- 16) J.Bear:*Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, pp.605-612, 1972.
- 17) E.Bresler, B.L.McNeal, D.L.Carter:*Saline and Sodic Soils Principles-Dynamics-Modeling*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, pp.85-89, 1982
- 18) Benku Thomas:The Runge-Kutta Methods(Approximating solution to ODEs), *BYTE*, April., pp.191-210, 1986.
- 19) Yeh,G.T.:A zoomable and Adaptable Hidden Fine Mesh Approach to Solving Advection-Dispersion Equations, *Proc, 7th. Inter. Conf. Computational Methods in Water Resources*, MIT, pp.69-74, 1988.
- 20) 高澤嘉光:Cと等高線, *bit*, Vol.19, No.2, pp.148-157, 1987.
- 21) 中野司, 藤井直之:二次元分布データの処理システム : (1) 二次元に不規則に分布する点の三角形分割, *情報地質*(13), pp.1-16, 1988.
- 22) Pinder, G.F. and Gray W.G.:*Finite Element Simulation in Surface and subsurface Hydrology*, Academic Press, Inc., pp.163, 1977.
- 23) A. W. Warrick, J. W. Bigger and D. R. Nielsen:Simultaneous Solute and Water Transfer for Unsaturated Soil, *Water Resources Reserch*, Vol. 7, No. 5, pp.1216-1225, 1971.
- 24) 細川土佐男, 他4名:被压带水層における塩水混合域の分散特性に関する実験及び数値解析による検討, 第33回水理講演論文集, pp.193-198, 1989.
- 25) Mark Reeves, Rovert M. Crnwell:*User's Manual for the Sandina Waste-Isolation Flow and Transport Model (SWIFT) Release 4.81*, U. S. Nuclear Regulatory Commission NUREG/CR-2324 SAND81-2516 GF, 1981.
- 26) INTERA Environmental Consultants, Inc.:*FTRANS:A Two-Dimensional Code for Simulating Fluid Flow and Transport of Radioactive Nuclides in Fractured Rock for Repository Performance Assessment*, Technical Report, Office of Nuclear Waste Isolation, 1983.
- 27) Clifford I. voss:*A Finite-Element Simulation Model for Saturated-Unsaturated Fluid-Density-Dependent Ground-Water Flow with Energy Transport or chemically-Reactive Single-Species Solute Transport*, U. S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 84-4369, 1984.

(1994.5.16 受付)

THE NUMERICAL METHOD FOR SATURATED-UNSATURATED FLUID-DENSITY-DEPENDENT GROUNDWATER FLOW WITH MASS TRANSPORT

Makoto NISHIGAKI, Tomoyuki HISHIYA, Naro HASHIMOTO and Ichiro KOHNO

A Eulerian-Lagrangian numerical method is very useful for groundwater flow with mass transport analysis. In this study, we improved the method for two-dimensional saturated-unsaturated flow in consideration of density dependent characteristic. Validity of this method was proved in comparison with the theoretical solutions and the experimental results. Also, this paper show that the method enable to simulate precisely groundwater flow with mass transport without dependence on mesh size.