

バネ支承で支持された連続桁の性質について

＜Affine 変換を利用せる不静定構造物の解法＞

准員 島田 静 雄*

“THE ANALYSIS OF STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES BY THE METHODS OF AFFINE-TRANSFORMATION”

“The properties of continuous beams supported by springs”

Shizuo Shimada, C.E. Assoc Member

Synopsis :

Beams with elastic supports have many interesting problems for the mathematical analysis. One of these solutions is described in this paper concerned much with the vibrational problems. The proper vibrations of a system of the beam attached with material points show orthogonality each other in the elastic energy of beams. Affine-Forces are defined to solve continuous beams with springs like such forces as are acting at the elastic gravity point.

要 約 バネ支承で支持された連続桁を解くのに、バネ常数をを質点に置き換えた質点系の自由振動の解を求め、この解が桁の弾性エネルギーに関して直交する性質を用いれば比較的簡単な現わし方で影響線を求める方法がある。

高次の不静定構造物を解くのに、ベクトル演算の簡略な方法を用いれば興味ある演算を誘導することができる。

1. n 箇の質点を持った桁の自由振動

まず最も簡単な場合として、両端で単純に支持された曲げ剛性 EJ = 一定の桁に $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ なる質点が付着している系の自由振動を調べてみる(図-1)。

桁の質量は 0 とし、n 箇の質点に作用する加速度と復元力とに関して微分方程式は

$$m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4 (x=i)} = 0, i=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (1)$$

断面一様な桁で等分布荷重の場合には桁の自由振動の自由度は無数にあるが、n 箇の質点のみからなる力学系では振動の自由度は n 箇しかない。振動が定常的であるとして、振動の角速度を ω とすれば

$$m_i \omega^2 y_i = EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4 (x=i)} \quad i=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (2)$$

左辺は加速度の項であり、右辺は桁の静的に考えた復元力である。 y_i は、 $P_i = m_i \omega^2 y_i$ を格点 1, 2, \dots , n, に静的に作用させた時の桁の変位であるから、静定桁のタフミの影響値 δ_{ij} を用いて、

$$Y \equiv \{D\} \times P \dots \dots \dots (3)$$

但し

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \equiv \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}, P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\} \\ \{D\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \dots, \delta_{1n} \\ \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23}, \dots, \delta_{2n} \\ \delta_{31}, \delta_{32}, \delta_{33}, \dots, \delta_{3n} \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}, \delta_{n2}, \delta_{n3}, \dots, \delta_{nn} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

y_i と P_i との関係として、 $P_i = m_i \omega^2 y_i$ は

$$Y \equiv \frac{1}{\omega^2} \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1/m_1 & & & & & & \\ & 1/m_2 & & & & & \\ & & 1/m_3 & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & & & 1/m_n \end{array} \right\} \times P \dots \dots \dots (4)$$

* 東京大学大学院学生、数物系土木工学科博士過程、修士

(3) 式と(4)式より, 自由振動の形と振動数を決定する同次方程式が次のベクトル記法で表わされる。

$$\begin{aligned} & \{A\} - \frac{1}{\omega^2} \{B\} \times P \equiv 0 \dots\dots\dots (5) \\ & \{B\} \equiv \left\{ \begin{array}{cccc} 1/m_1 & & & \\ & 1/m_2 & & \\ & & 1/m_3 & \\ & & & \dots\dots \\ & & & & 1/m_n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$P \equiv 0$, すなわち $P_1 = P_2 = P_3 = \dots\dots P_n = 0$ 以外に解を持つための必要十分条件はデターミナント

$$\left| \{A\} - \frac{1}{\omega^2} \{B\} \right| = 0 \dots\dots\dots (6)$$

を満足する ω^2 に対して得られ, 次の n 箇の解が求められる。 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots\dots < \omega_n$ として

$$\begin{cases} \text{第1次振動解 } \omega_1, P_1 \equiv \{P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots\dots P_{1n}\} \\ \text{第2次振動解 } \omega_2, P_2 \equiv \{P_{21}, P_{22}, P_{23}, \dots\dots P_{2n}\} \\ \text{第3次振動解 } \omega_3, P_3 \equiv \{P_{31}, P_{32}, P_{33}, \dots\dots P_{3n}\} \\ \dots\dots\dots \\ \text{第n次振動解 } \omega_n, P_n \equiv \{P_{n1}, P_{n2}, P_{n3}, \dots\dots P_{nn}\} \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

n 箇のベクトル $P_1, P_2, \dots\dots P_n$ は, 振動問題の特質としてその大きさに関しては不定であり, $P_{i1} : P_{i2} : P_{i3} : \dots\dots P_{in}$ の各素成の比のみで決定される。これらのベクトルは, 質点の質量の大きさには無関係であり, 質量相互の比 $m_1 : m_2 : m_3 : \dots\dots m_n$ の比のみに影響される。

2. 桁の弾性エネルギーの直交性

質点系が k 次の固有振動形で振動している時の全エネルギーは, ある瞬間の桁の曲げによって蓄えられるポテンシャルエネルギーと, 質点の運動エネルギーとの和であり, これは桁の運動時の最大変位 Y_k を用いて示すことが出来る。

$$W_{kk} = \frac{\omega_k^2}{2} \sum m_i y_i^2 = \frac{1}{2} \sum P_i \cdot y_i = \frac{1}{2 \omega_k^2} \sum \frac{1}{m_i} P_i^2 \dots\dots\dots (8)$$

ベクトルの積の記法を用いて表せば

$$W_{kk} = \frac{\omega_k^2}{2} Y_k \times \{B\}^{-1} \cdot Y_k = \frac{1}{2} P_k \cdot Y_k = \frac{1}{2 \omega_k^2} P_k \times \{B\} \cdot P_k \dots\dots\dots (9)$$

所で, P_k, Y_k は(5)式の解であるから, タワミのマトリックス $\{A\}$ は次の形に Affin 展開される。

$$\begin{aligned} \{A\} \equiv & \frac{1}{P_1 \cdot Y_1} \{Y_1 \times Y_1\} + \frac{1}{P_2 \cdot Y_2} \{Y_2 \times Y_2\} + \frac{1}{P_3 \cdot Y_3} \{Y_3 \times Y_3\} + \dots \\ & + \dots \frac{1}{P_n \cdot Y_n} \{Y_n \times Y_n\} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

加ふるに, 重要な直交性は

$$P_k \cdot Y_l = 0 \quad k \neq l \dots\dots\dots (11)$$

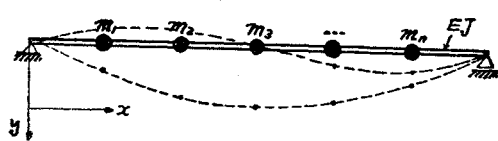
で示される。従って, 質点系が種々の合成振動で第1次から第 n 次までの振動形を含む時に, 全エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot Y_2 + \frac{1}{2} P_3 \cdot Y_3 + \dots\dots \frac{1}{2} P_n \cdot Y_n \dots\dots\dots (12)$$

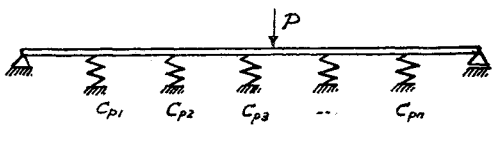
3. バネ支承で支持された連続桁の解に適用せる振動解

$m_1, m_2, \dots\dots m_n$ の質点系の自由振動の解として得られた n 箇のベクトル $P_1, P_2, \dots\dots P_n$ は, もはや振動問題を離れて, 純然たる静荷重と考えて取扱得る。外くの静力学の問題が, 振動式から透導された解を用いて表はし得る例は多いが, 連続桁の解には上記の質点系の振動解が興味ある性質を示す。

図一 質点系とその自由振動



図二 バネ支承で支持された連続桁



図一の質点系の位置を, バネ常数 $C_{p1}, C_{p2}, C_{p3}, \dots\dots C_{pn}$ のバネで支持した連続桁を解く問題を取扱ってみる。バネ常数 C_{pi} (kg/cm) と質点の質量 m_i とには次の比例関係があるように定めたとする(図二)。

$$C_{p1} : C_{p2} : C_{p3} : \dots : C_{pn} \equiv m_1 : m_2 : m_3 : \dots : m_n \dots \dots \dots (13)$$

今バネ支承で支持された連続桁の静定基本形を、桁とバネとの接続点で切離した形を考え、そこに作用する支承の反力を不静定力 $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$ と定める。数式の演算を簡便にする為に、ベクトル記法を使用し

$$N \equiv \{N_1, N_2, N_3, \dots, N_n\} \dots \dots \dots (14)$$

n 箇の質点系の解として得られたベクトル $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ は、これを $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ の単位ベクトルで与えることに定義し、アフィン荷重と一応呼ぶことにする。アフィン荷重の大きさは、 φ なるスカラーで示し、任意の支承反力の大きさは、ベクトル A_i の一次形式で与えられる。

$$N \equiv \varphi_1 A_1 + \varphi_2 A_2 + \varphi_3 A_3 + \dots + \varphi_n A_n \dots \dots \dots (15)$$

アフィン荷重 A_i が桁の静定系に作用した時 (図-3) の桁の各々の荷重作用点の変位 Y_{ij} は、

$$Y_{ij} \equiv A_i \times \{d\} \equiv \frac{1}{\omega_i^2} \{B\} \times A_i$$

バネの変形に依る変位 Y_{ic} は

$$Y_{ic} \equiv \left\{ \begin{matrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \dots & A_{in} \\ C_{p1} & C_{p2} & C_{p3} & \dots & C_{pn} \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1/C_{p1} & & & & \\ & 1/C_{p2} & & & \\ & & 1/C_{p3} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1/C_{pn} \end{matrix} \right\} \times A_i$$

(13) 式により m_i と C_{pi} とに比例関係があるので $C_{pi}/m_i = C_{p0}$ において整理すれば、バネの変位と桁の変位との和は

$$Y_i \equiv Y_{ij} + Y_{ic} \equiv \left(\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) \cdot \{B\} \times A_i \dots \dots \dots (16)$$

アフィン荷重の特質として、 $A_i \cdot Y_j = 0 \quad i \neq j$ の関係式が存在し、エネルギーの直交性があることを用いれば、バネ支承で支持された連続桁の解は簡単に求められる。任意の点 $x = \xi$ に $P=1$ の荷重が作用している時、支承の反力を (15) 式で与えると、バネ支承及び桁を含めた全力学系に蓄えられたエネルギー W は下式で与えられる。

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) \varphi_1^2 A_1 \times \{B\} \cdot A_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) \varphi_2^2 A_2 \times \{B\} \cdot A_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_3^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) \varphi_3^2 A_3 \times \{B\} \cdot A_3 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) \varphi_n^2 A_n \times \{B\} \cdot A_n + \frac{P^2}{2} \delta_{\xi\xi} + P \cdot \varphi_1 W_1(\xi) + P \cdot \varphi_2 W_2(\xi) + P \cdot \varphi_3 W_3(\xi) + \dots + P \cdot \varphi_n W_n(\xi) \dots \dots \dots (17)$$

$A_i \times \{B\} \cdot A_i$ は $\sum A_{ik}^2 / m_k$ で得られるスカラーである。 $\delta_{\xi\xi}$ は静定系の桁の $x = \xi$ に作用する $P=1$ の荷重によるその点の変位を与え、 W_i は $P=1$ の荷重が、アフィン荷重の作用方向に為した仕事である。

n 箇の未知数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ が定まれば、この連続桁の解が得られる。 φ 求める演算は、バネと桁との切断点の変位 Y_i が 0 になると云ふ条件より

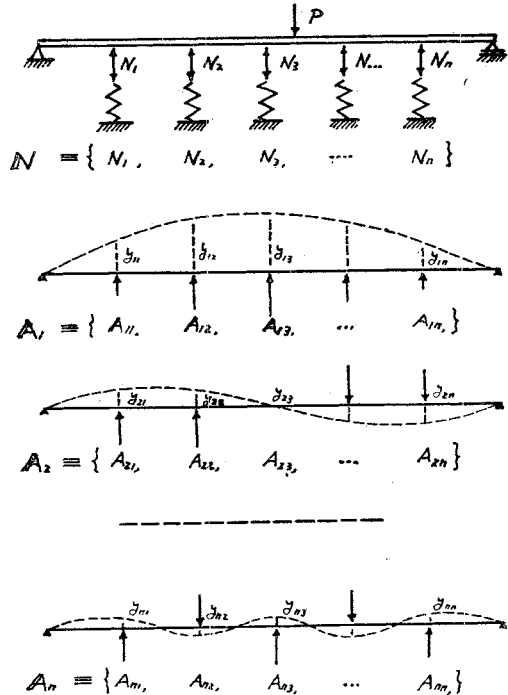
$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial W}{\partial \varphi_3} = \dots = \frac{\partial W}{\partial \varphi_n} = 0 \therefore \left(\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{C_{p0}} \right) (A_i \times \{B\} \cdot A_i) \varphi_i + P \cdot W_i(\xi) = 0, i=1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (18)$$

$W_i(\xi)$ は $P=1$ が静定系に作用した時の桁の変位を格点毎に $\delta_{1\xi}^0, \delta_{2\xi}^0, \delta_{3\xi}^0, \dots, \delta_{n\xi}^0$ とすれば、アフィン荷重 A_i の作用方向に為した仕事であり

$$W_i(\xi) = A_{i1} \cdot \delta_{1\xi}^0 + A_{i2} \cdot \delta_{2\xi}^0 + A_{i3} \cdot \delta_{3\xi}^0 + \dots + A_{in} \cdot \delta_{n\xi}^0$$

相反作用の法則から、 $W_i(\xi)$ は、アフィン荷重 A_i が静定基本形の桁に作用した時の P の作用方向への変位を $\delta_i(\xi)$ で示せば (図-4)

図-3 静定基本形と不静定力のアフィン標示



$$W_i(\xi) = P \cdot \delta_i(\xi) \dots\dots\dots(19)$$

従って φ_i の解は

$$\varphi_i(\xi) = -\frac{P}{k_i} \delta_i(\xi) \dots\dots\dots(20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_i &= \left(\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{C_0} \right) \cdot (A_i \times \{B\} \cdot A_i) = A_i \cdot Y_i \\ A_i \times \{B\} \cdot A_i &= \frac{A_{i1}^2}{m_1} + \frac{A_{i2}^2}{m_2} + \frac{A_{i3}^2}{m_3} + \dots + \frac{A_{in}^2}{m_n} \\ \delta_i(x) \dots A_i &\text{が静定桁に作用した時のタワミ図} \end{aligned} \right.$$

$\varphi_i(\xi)$ をアフィン荷重 A_i の影響線と呼び、常に静定基本形に作用する A_i の荷重に依る変位図と、個有値 k_i で示すことが出来る。

4. 連続桁としての応力の影響線算出の方法

不静定構造物を解く際に、計算を準序立てて間違いなく行ふのに、以下示す順序で計算を迫めるのが便である。

a) 静定基本形及びタワミのマトリックス

静定基本形の取り方は、その構造物の応力計算に最も都合の良い形に取る。静定基本形は常に単純支持の桁にするとは限らず、応力の計算が既知であれば連続桁から出発することも差支えない(図-5)。

不静定力をきめて、単位の力が作用した時の各不静定力の作用点の変位を計算し、タワミのマトリックスを作る。

b) アフィン荷重の計算及び個有値の算出

静定基本形で、バネ支承の位置に質点 m_i が附着しているものとみなした振動系の解を(5)(6)式で計算する。 m_i はバネ支承のバネ常数の大きさに比例せしめて任意の常数で(13)式の比例関係を持たせる。バネ常数が無限大、言い換えれば沈下を生じない支承では $m \rightarrow \infty$ と考える。

アフィン荷重の数値は、何れか一つの値をきめて、数値相互にベクトル的な比例関係を持たせて決定する。

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n}\} \\ A_2 &\equiv \{A_{21}, A_{22}, A_{23}, \dots, A_{2n}\} \\ A_3 &\equiv \{A_{31}, A_{32}, A_{33}, \dots, A_{3n}\} \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &\equiv \{A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \dots, A_{nn}\} \end{aligned}$$

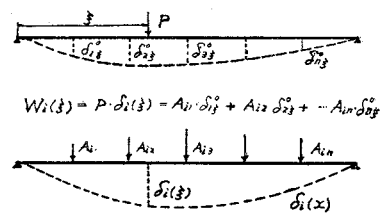
個有値 k_i は、これら箇々のアフィン荷重が静定基本形に作用した時の各荷重作用点の変位 $y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, \dots, y_{in} \equiv Y_i$ とのスカラー積で計算される。

$$\begin{aligned} k_i &= A_{i1}y_{i1} + A_{i2}y_{i2} + A_{i3}y_{i3} + \dots \\ &\dots A_{in}y_{in} = A_i \cdot Y_i \end{aligned}$$

c) アフィン荷重の影響線の計算

箇々のアフィン荷重が作用した時の桁の変位を計算する。そしてこのタワミ図を個有値 $(-k_i)$ で除した曲線がアフィン荷重の影響線を与える。

図-4



$$W_i(\xi) = P \cdot \delta_i(\xi) = A_{i1} \delta_{i1}^0 + A_{i2} \delta_{i2}^0 + \dots + A_{in} \delta_{in}^0$$

図-5 静定基本形の仮定

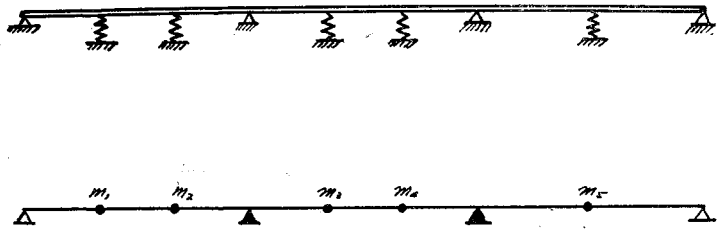
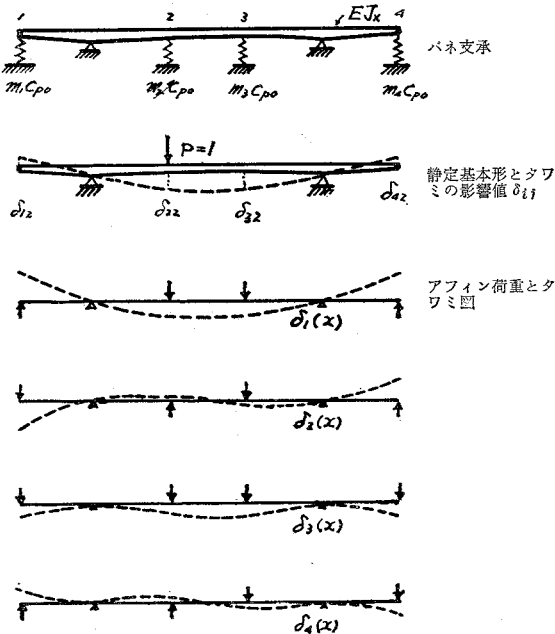


図-6

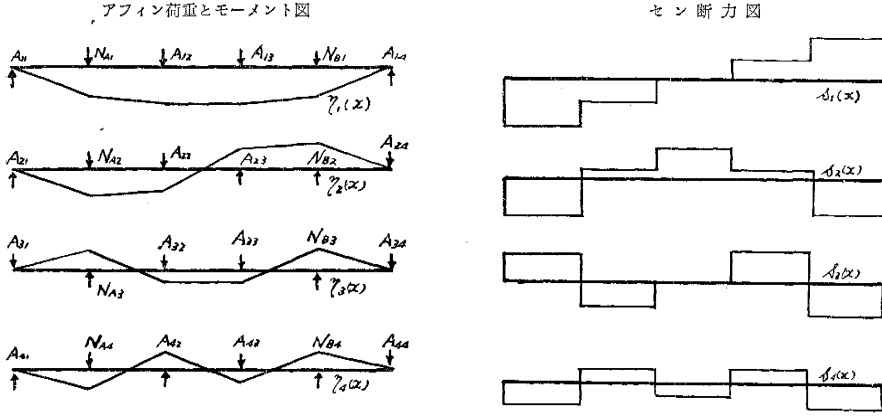


(20) 式。タワミのマトリックスを解く時に得られる $m\omega_i^2$ を、特に桁自身のアフィン荷重に対するバネ常数と云うことができ、アフィン荷重の作用点の桁の変位が $A/m\omega^2$ で与えられる(図-6)。

d) アフィン荷重が作用している時の各点の応力図の計算

静定基本形に作用する単位のアフィン荷重によって、桁の各点の曲げモーメント図、せん断力図、支承反力等をあらかじめ計算する(図-7)。

図-7



e) 静定基本形の影響線

静定基本形の曲げモーメント影響線、支承反力影響線、せん断力影響線タワミ影響線等は既知であるか、又は容易に算出可能であるとし、これを荷重の作用点 ξ 、応力を求める点 x について下記のように現はす。

$$M_x^0(\xi), N_A^0(\xi), S_x^0(\xi), \delta_x^0(\xi) \dots \dots \dots (22)$$

f) 不静定支承の支承反力影響線

例えば支承2の支承反力の影響線は

$$N_2(\xi) = -\frac{A_{12}}{k_1} \delta_1(\xi) - \frac{A_{22}}{k_2} \delta_2(\xi) - \frac{A_{32}}{k_3} \delta_3(\xi) \dots - \frac{A_{n2}}{k_n} \delta_n(\xi) \\ = A_{12}\varphi_1(\xi) + A_{22}\varphi_2(\xi) + A_{32}\varphi_3(\xi) + \dots + A_{n2}\varphi_n(\xi) \dots \dots \dots (23)$$

同様に支承3の支承反力の影響線は

$$N_3(\xi) = -\frac{A_{13}}{k_1} \delta_1(\xi) - \frac{A_{23}}{k_2} \delta_2(\xi) - \frac{A_{33}}{k_3} \delta_3(\xi) - \dots \\ - \frac{A_{n3}}{k_n} \delta_n(\xi) = A_{13}\varphi_1(\xi) + A_{23}\varphi_2(\xi) \\ + A_{33}\varphi_3(\xi) + \dots + A_{n3}\varphi_n(\xi) \dots \dots \dots (24)$$

g) 支承 A_i の支承反力影響線

静定基本形の支承である反承 A を例にとると、静定基本形の支承反力の影響線と他の不静定支承からの力との重ね合はせて得られる。

$$N_A(\xi) = N_A^0(\xi) + N_{A1}\varphi_1(\xi) + N_{A2}\varphi_2(\xi) + N_{A3}\varphi_3(\xi) \\ + \dots + N_{An}\varphi_n(\xi) \dots \dots \dots (25)$$

h) 曲げモーメントの影響線

任意の点 x の曲げモーメントの影響線は (図-8)

$$M_x(\xi) = M_x^0(\xi) + \eta_1(x)\varphi_1(\xi) + \eta_2(x)\varphi_2(\xi) \\ + \eta_3(x)\varphi_3(\xi) + \dots + \eta_n(x)\varphi_n(\xi) \dots \dots \dots (26)$$

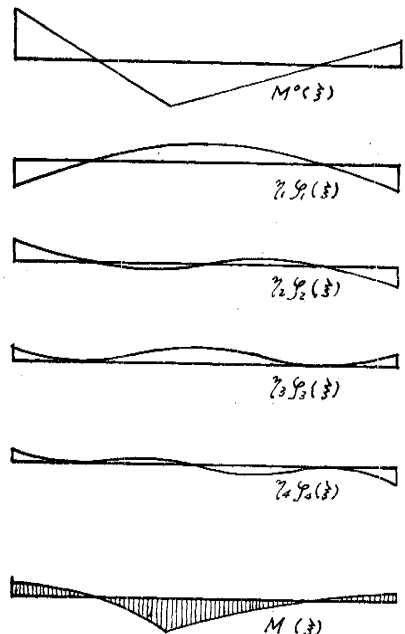
$\eta_1(x), \eta_2(x), \dots$ は静定基本形に作用したアフィン荷重による x 点の曲げモーメントの値である。

i) せん断力の影響線

任意の点 x のせん断力影響線は

$$S_x(\xi) = S_x^0(\xi) + s_1(x)\varphi_1(\xi) + s_2(x)\varphi_2(\xi) + s_3(x)\varphi_3(\xi)$$

図-8 曲げモーメント影響線



$$+\dots s_n(x)\varphi_n(\xi)\dots\dots\dots(27)$$

$s_1(x), s_2(x), \dots$ は静定基本形に作用したアフィン荷重に依る x 点のせん断力の値である。

これらの影響線算出に際して、バネ支承のバネい数はバネ相互の大きさの比のみによって式の形が決定されてバネ常数の大きさは個有値 k_i の中に含まれている。従って、 $m_1 : m_2 : m_3 : \dots : m_n$ の比のみを一定に保ち、 $m \rightarrow \infty$ にした極限は、沈下を生じなれ連続桁の影響線を示し、 $m \rightarrow 0$ は $k \rightarrow \infty$ となって、静定基本形の応力の影響線を与えることが容易に理解される。

5. 両端単純支持の連続桁の諸数値

格子桁の計算などに用いられる基準的な形として、両端で単純に支持された EJ = 一定の桁の $(n+1)$ 等分点をバネ常数 C_{p0} で支持した連続桁を解く(図-1)。バネ常数は総て一定とし $m=1$ に取ることができる。アフィン荷重 A_i は、(4) 式より

$$Y_i \equiv \frac{1}{\omega_i^2} A_i$$

A_i はタワミのマトリックスを解くまでもなく、次の数値になる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\equiv \left\{ \sin \frac{\pi}{n+1}, \sin \frac{2\pi}{n+1}, \sin \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{n\pi}{n+1} \right\} \\ A_2 &\equiv \left\{ \sin \frac{2\pi}{n+1}, \sin \frac{4\pi}{n+1}, \sin \frac{6\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{2n\pi}{n+1} \right\} \\ A_3 &\equiv \left\{ \sin \frac{3\pi}{n+1}, \sin \frac{6\pi}{n+1}, \sin \frac{9\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{3n\pi}{n+1} \right\} \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &\equiv \left\{ \sin \frac{n\pi}{n+1}, \sin \frac{2n\pi}{n+1}, \sin \frac{3n\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{n \cdot n\pi}{n+1} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

これらのベクトルには $A_i \cdot A_j = 0$ ($i \neq j$) の直交性がある。かつ $A_i \cdot A_i = (n+1)/2$ である。 ω_i^2 は、アフィン荷重 A_i が作用した時の格点の変位 y から計算される。よく知られているように、単純支持の桁の変位 y は

$$y = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{h\pi \xi}{l} \dots\dots\dots(29)$$

A_i の荷重が作用した時の変位は

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \left\{ \sin \frac{i\pi}{n+1} \sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{h\pi}{n+1} + \sin \frac{2i\pi}{n+1} \sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{2h\pi}{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{3i\pi}{n+1} \sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{3h\pi}{n+1} + \dots + \sin \frac{ni\pi}{n+1} \sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{nh\pi}{n+1} \right\} \\ &= \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \sin \frac{h\pi x}{l} \sum_{j=1}^n \left(\sin \frac{ji\pi}{n+1} \sin \frac{jh\pi}{n+1} \right) \end{aligned}$$

ここで上式の後半部の級数の和は、

$$\sin \frac{i\pi}{n+1} = -\sin \frac{(2n+2-i)\pi}{n+1} = \sin \frac{(2n+2+i)\pi}{n+1} = -\sin \frac{(4n+4-i)\pi}{h+1} = \sin \frac{(4n+4+i)\pi}{n+1} = \dots$$

及び $\begin{cases} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \sin \frac{kj\pi}{n+1} = 0 & (k \neq j) \quad (k \leq n) \\ \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \sin \frac{ij\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2} \end{cases}$

の関係式があるから、 h の級数は $h=i, (2n+2-i), (2n+2+i), (4n+4-i), (4n+4+i), (6n+6-i), \dots$ だけの和を求めれば良い。従って格点の変位 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ の変位は

$$\begin{aligned} Y_i &\equiv \frac{(1+n)l^3}{\pi^4 EJ} A_i \times \left(\frac{1}{i^4} + \frac{1}{(2+2n-i)^4} + \frac{1}{(2+2n+i)^4} + \frac{1}{(4+4n-i)^4} + \dots \right) \\ \therefore \frac{1}{\omega_i^2} &= \frac{(1+n)l^3}{\pi^4 EJ} \left(\frac{1}{i^4} + \frac{1}{(2+2n-i)^4} + \frac{1}{(2+2n+i)^4} + \frac{1}{(4+4n-i)^4} + \dots \right) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

この級数は収束が早いから、始めての数項を計算すれば充分正確な値を得ることが出来る。

ω_i^2 を計算するのに簡便な式は、連続する三つの格点相互に三連モーメントの定理を適用し、差分方程式の解を使用して求めることができる。

図-9 に示すように連続する三つの格点 $(\lambda-1)$, λ , $(\lambda+1)$ の相互の釣合から、

$$\begin{cases} -M_{\lambda-1} + 2M_{\lambda} - M_{\lambda+1} = A_{\lambda} l \\ -y_{\lambda-1} + 2y_{\lambda} - y_{\lambda+1} = \frac{l^2}{6EJ} (M_{\lambda-1} + 4M_{\lambda} + M_{\lambda+1}) \end{cases}$$

$A_{\lambda}, M_{\lambda}, y_{\lambda}$ を次の形に書く

$$A_{\lambda} = \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1}, \quad M_{\lambda} = M_0 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1}, \quad y_{\lambda} = y_0 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1}$$

依って

$$\begin{aligned} -M_{\lambda-1} + 2M_{\lambda} - M_{\lambda+1} &= \left(-\sin \frac{i(\lambda-1)\pi}{n+1} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1} - \sin \frac{i(\lambda+1)\pi}{n+1} \right) M_0 = \left(2 - 2 \cos \frac{i \pi}{n+1} \right) M_0 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1} \end{aligned}$$

$$-y_{\lambda-1} + 2y_{\lambda} - y_{\lambda+1} = \left(2 - 2 \cos \frac{i \pi}{n+1} \right) y_0 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1}$$

$$M_{\lambda-1} + 4M_{\lambda} + M_{\lambda+1} = \left(4 + 2 \cos \frac{i \pi}{n+1} \right) M_0 \sin \frac{i \lambda \pi}{n+1}$$

故に、

$$M_{\lambda} = \frac{l}{2} \times \frac{A_{\lambda}}{\left(1 - \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)} = \frac{l}{2(1+n)} \times \frac{A_{\lambda}}{\left(1 - \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)} \quad \dots (31)$$

$$y_{\lambda} = \frac{l^3}{12EJ} \times \frac{\left(2 + \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)}{\left(1 - \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)^2} A_{\lambda} = \frac{l^3 \left(2 + \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)}{12EJ(1+n)^2 \left(1 - \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)^2} A_{\lambda}$$

$$\therefore \frac{1}{\omega_i^2} = \frac{l^3}{12EJ} \times \frac{\left(2 + \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)}{\left(1+n \right)^2 \left(1 - \cos \frac{i \pi}{n+1} \right)^2} \quad \dots (32)$$

(32) 式は (30) 式と全く同じものであることは、Markoff, Kummer の方法等で証明出来る。

6. 総べての支承をバネ支持とした連続桁

図-10 に示すように、支承が総べてバネ支持になっている連続桁を解く時にも、質点系の自由振動の形を用いて行ふ方法がある。支承の位置を質点に置き換えると、桁は全く外的な支持を失ふから質点系の運動には平行移動と廻転移動の二つの自由度が含まれて来る。この二つの自由度は、桁の静定基本形を決める条件に相当し n 箇ある質点の振動の自由度から引かれ、結局、桁の曲げを伴う振動の自由度は $(n-2)$ 箇存在することになる。

桁に働く力と、曲げ変位とに関する振動を決める式は (2) 式である。桁の静定状態を両端で単純に支持されたものとし、その時の桁の変位を

$$Y_0 \equiv \{J\} \times P$$

$$Y_0 \equiv \{y_{02}, y_{03}, \dots, y_{0, n-1}\}, \quad P \equiv \{P_2, P_3, \dots, P_{n-1}\}$$

支承である 1 及び n の支承の支承反力を P_1, P_n で現せば

$$-P_1 = \frac{n-2}{n-1} P_2 + \frac{n-3}{n-1} P_3 + \dots$$

$$\frac{2}{n-1} P_{n-2} + \frac{1}{n-1} P_{n-1}$$

$$-P_n = \frac{1}{n-1} P_2 + \frac{2}{n-1} P_3 + \dots$$

図-9

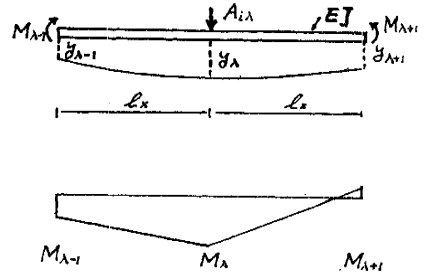
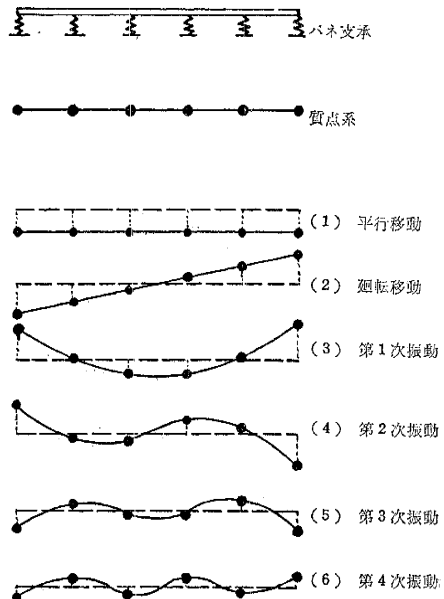


図-10 バネ支承系と振動系



$$\frac{n-3}{n-1}P_{n-2} + \frac{n-2}{n-1}P_{n-1}$$

ベクトル演算で示すと

$$\begin{cases} P_1 = -B_1 \cdot P, & B_1 \equiv \left\{ \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n-1} \right\} \\ P_n = -B_n \cdot P, & B_n \equiv \left\{ \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{n-1}, \frac{n-2}{n-1} \right\} \end{cases}$$

さて、支承1、支承nは変位が0ではなく、 P_1 及び P_n に比例しただけの変位を生ずる。これを

$$y_1 = \frac{1}{\omega^2} P_1, \quad y_n = \frac{1}{\omega^2} P_n$$

y_1 及び y_n の変位は 2, 3, ..., (n-1) の位置を夫々次のように移動させる。

$$\begin{cases} Y_1 \equiv -\frac{1}{\omega^2} P_1 \times B_1 \equiv -\frac{1}{\omega^2} \{B_1 \times B_1\} \times P \\ Y_n \equiv -\frac{1}{\omega^2} P_n \times B_n \equiv -\frac{1}{\omega^2} \{B_n \times B_n\} \times P \end{cases}$$

従って振動解を求める線形式は

$$Y_0 + Y_1 + Y_n \equiv \frac{1}{\omega^2} P$$

$$\{4\} \times P - \frac{1}{\omega^2} \{B_1 \times B_1\} \times P - \frac{1}{\omega^2} \{B_n \times B_n\} \times P \equiv \frac{1}{\omega^2} P$$

$$\therefore \left[\{4\} - \frac{1}{\omega^2} \{B_1 \times B_1\} - \frac{1}{\omega^2} \{B_n \times B_n\} - \frac{1}{\omega^2} \{E\} \right] \times P \equiv 0 \dots \dots \dots (33)$$

但し $\{4\}$ は単純桁のタワミのマトリックス。 $\{E\}$ は単位マトリックス。 $\{B_1 \times B_1\}$, $\{B_n \times B_n\}$ はアフィノールである。

$$\{B_1 \times B_1\} \equiv \left(\begin{array}{ccccc} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 & \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2} & \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)^2} & \dots & \frac{(n-2) \times 2}{(n-1)^2}, \frac{(n-2)}{(n-1)^2} \\ \frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)^2} & \frac{(n-3)^2}{(n-1)^2} & \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)^2} & \dots & \frac{(n-3) \times 2}{(n-1)^2}, \frac{(n-3)}{(n-1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(n-2)}{(n-1)^2} & \frac{(n-3)}{(n-1)^2} & \frac{(n-4)}{(n-1)^2} & \dots & \frac{2}{(n-1)^2}, \frac{1}{(n-1)^2} \end{array} \right) \dots (34)$$

$$\{B_n \times B_n\} \equiv \left(\begin{array}{ccccc} \frac{1}{(n-1)^2} & \frac{2}{(n-1)^2} & \frac{3}{(n-1)^2} & \dots & \frac{(n-3)}{(n-1)^2}, \frac{n-2}{(n-1)^2} \\ \frac{2}{(n-1)^2} & \frac{4}{(n-1)^2} & \frac{6}{(n-1)^2} & \dots & \frac{2(n-3)}{(n-1)^2}, \frac{2(n-2)}{(n-1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(n-2)}{(n-1)^2} & \frac{2(n-2)}{(n-1)^2} & \frac{3(n-2)}{(n-1)^2} & \dots & \frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)^2}, \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} \end{array} \right) \dots \dots \dots (35)$$

(33) 式を解いて得られる (n-2) 箇の解は質点系の自由振動の解であり、振動の角速度 ω と、変位とに關して図-10 のように得られる。

結局 n 箇の質点の附着した桁の運動と振動とに關して得られる n 組の力の組合せが求められる。例えば n=6 で

- i) 平行移動 $\omega_1=0, A_1 \equiv \{A_{11}=1, A_{12}=1, A_{13}=1, A_{14}=1, A_{15}=1, A_{16}=1\}$
- ii) 廻転運動 $\omega_2 \neq 0, A_2 \equiv \{A_{21}=-5, A_{22}=3, A_{23}=+1, A_{24}=-1, A_{25}=-3, A_{26}=-5\}$
- iii) 第1次振動 $\omega_3, A_3 \equiv \{A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{35}, A_{36}\}$
- iv) 第2次振動 $\omega_4, A_4 \equiv \{A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}, A_{45}, A_{46}\}$
- v) 第3次振動 $\omega_5, A_5 \equiv \{A_{51}, A_{52}, A_{53}, A_{54}, A_{55}, A_{56}\}$
- vi) 第4次振動 $\omega_6, A_6 \equiv \{A_{61}, A_{62}, A_{63}, A_{64}, A_{65}, A_{66}\}$

A_1, A_2 は桁に曲げを生じない成分であり $A_3 \sim A_6$ が桁の曲げに伴ふ振動解を示す、 $A_1 \sim A_6$ をアフィン荷重と呼び、格子桁に於いては荷重分布曲線を求めるのに使用して便利な計算が出来る。荷重分布曲線は、或る任意の支承上に $P=1$ の荷重が作用した時の各支承の支承反力で現すことができる。 $P=1$ が例えば格点2 に作用していたとすると、この荷重をアフィン荷重の一次形式で与えることが可能になる。

$$\begin{array}{l}
 \varphi_1 A_1 \equiv \varphi_1 A_{11}, \varphi_1 A_{12}, \varphi_1 A_{13}, \varphi_1 A_{14}, \varphi_1 A_{15}, \varphi_1 A_{16} \\
 \varphi_2 A_2 \equiv \varphi_2 A_{21}, \varphi_2 A_{22}, \varphi_2 A_{23}, \varphi_2 A_{24}, \varphi_2 A_{25}, \varphi_2 A_{26} \\
 \varphi_3 A_3 \equiv \varphi_3 A_{31}, \varphi_3 A_{32}, \varphi_3 A_{33}, \varphi_3 A_{34}, \varphi_3 A_{35}, \varphi_3 A_{36} \\
 \varphi_4 A_4 \equiv \varphi_4 A_{41}, \varphi_4 A_{42}, \varphi_4 A_{43}, \varphi_4 A_{44}, \varphi_4 A_{45}, \varphi_4 A_{46} \\
 \varphi_5 A_5 \equiv \varphi_5 A_{51}, \varphi_5 A_{52}, \varphi_5 A_{53}, \varphi_5 A_{54}, \varphi_5 A_{55}, \varphi_5 A_{56} \\
 \text{+) } \varphi_6 A_6 \equiv \varphi_6 A_{61}, \varphi_6 A_{62}, \varphi_6 A_{63}, \varphi_6 A_{64}, \varphi_6 A_{65}, \varphi_6 A_{66} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 0 \quad P=1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

ベクトルの演算に直して簡略に示すと

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\} \times \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} \equiv \{0, P, 0, 0, 0, 0\}$$

$\varphi_1 \sim \varphi_6$ は A の直交性を利用すれば簡単に得られて

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\} \equiv \left\{ \frac{A_{12}}{\sum A_{1k}^2}, \frac{A_{22}}{\sum A_{2k}^2}, \frac{A_{32}}{\sum A_{3k}^2}, \dots, \frac{A_{62}}{\sum A_{6k}^2} \right\}$$

従って $P=1$ が 2 点に作用した時の支承反力は, $\varphi_i \cdot A_i$ の荷重が作用した時の支承反力を重ね合はせて得られる A_i が作用した時の支承反力は

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}_i \equiv \frac{C_p}{\omega_i^2 + C_p} A_i$$

よって $P=1$ の荷重が働く時の支承反力をベクトル表示で示せば

$$X \equiv \frac{\varphi_1 C_{p0}}{\omega_1^2 + C_{p0}} A_1 + \frac{\varphi_2 C_{p0}}{\omega_2^2 + C_{p0}} A_2 + \frac{\varphi_3 C_{p0}}{\omega_3^2 + C_{p0}} A_3 + \dots + \frac{\varphi_6 C_{p0}}{\omega_6^2 + C_{p0}} A_6$$

支承のバネ常数 C_{p0} は反力のベクトル計算にスカラー係数として入って来のだけであるから, 桁の曲げ剛性と支承のバネ常数の強さをパラメーターにして計算を行ふ方法は非常に便利である。Leonhardt は

$$\frac{C_{p0}}{\omega_i^2 + C_{p0}} = \frac{1}{1 + \omega_i^2 / C_{p0}} = \frac{1}{1 + a_i z}$$

とおいて, z を剛性係数で表はす方法を取っている。

7. 後 記

バネ支承支持された連続桁の影響線を求める方法は その外に差分法の適用によって更に簡単な方法がある。紙数の都合で、この報文には解説できなかつたので次の機会に報告したいと思う。

(附.32.3.10)

昭和 32 年 12 月 20 日 印刷	土 木 学 会 論 文 集	定 価 120 円 (千 20 円)
昭和 32 年 12 月 25 日 発行	第 51 号	
編集兼発行者	東京都新宿区四谷 1 丁目	中 川 一 美
印刷者	東京都港区赤坂溜池 5 番地	大 沼 正 吉
印刷所	東京都港区赤坂溜池 5 番地	株式会社 技 報 堂
~~~~~		
東京都新宿区四谷一丁目		
発行所	社 団 土 木 学 会	電話(35)5138・5139・5130 振替東京 16828

待望の書遂に完成!

# プレストレストコンクリートの設計および施工

猪股俊司著

土木学会監修 土木工学叢書

B5判・850頁・上製布装函入

定価 2,800円

序

この書の著者猪股俊司君は、昭和16年に東京大学工学部土木工学科を卒業され、日本国有鉄道技術研究所に勤務されて以来、今日までプレストレストコンクリートの研究に精進され、この間1年間フランスのGuyonのもとに留学もされた方で、プレストレストコンクリートについて、今日日本における最高権威であると信じております。

今度、猪股君は多年の研鑽の結果をまとめられてこの書を公にされました。プレストレストコンクリートの構造物のほとんどすべてについて、設計上の理論を統一的に記述し、数値計算例題を示したばかりでなく、施工方法についても細部にわたって述べられております。

プレストレストコンクリートの設計者諸君、学生諸君、現場技術者諸君にたいしこの書は誠に貴重な参考書であり、また、日本のプレストレストコンクリートの進歩発達に貢献するところは実に大きいと信じます。ここに深くこの著書の出版を喜んで序といたします。

工学博士 吉田徳次郎

本書を、御希望の方は至急最寄書店または直接本社へ、あるいは学会へ御申込み下さつても結構です。現物は書店または学会に陳列されてあります。

## —主要目次—

1章 PCの基礎 PCの発展 PCの基礎理論 PCの分類 PC構造物におこる各種応力度 PCの利点  
2章 材料 PC鋼線または鋼棒に要求される性質および一般的性質 PC鋼線または鋼棒の製造法とその機械的性質 PC鋼線または鋼棒のクリープ、レラクセーション…他  
3章 プレストレッシングの方法 プレストレッシングについての一般 プレテンション工法…他  
4章 PC鋼線または鋼棒引張応力度減少量の計算 PC鋼線または鋼棒引張応力度減少の原因 摩擦によつておこる PC鋼線または鋼棒引張応力度の減少…他  
5章 構造上の注意事項および構造一般 PC鋼線または鋼棒間隔 PC鋼線または鋼棒図心線を含む垂直とはりの図心線を含む垂直面との相対的配置…他  
6章 PC曲げ部材応力度および中心軸方向荷重をうける部材応力度の計算 PC断面の応力度計算と断面決定に関する一般事項…他  
7章 せん断応力度、斜引張応力度、支圧応力度などの計算 せん断応力度計算一般 せん断応力度および斜引張応力度の計算…他  
8章 PC曲げ部材の断面算定 設計法の基本的考え方の一般 正の曲げモーメントをうける断面であたえられた許容応力度を満足するための断面算定法…他  
9章 PC静定構造物の設計とPC鋼線または鋼棒配置法 単純はり設計法一般 PC鋼線または鋼棒配置…他  
10章 PC不静定構造物設計法 不静定構造物一般 連続はり設計法(弾性理論)…他  
11章 許容応力度 設計の基礎 設計荷重と設計計算の方法…他  
12章 PCの耐火性、疲労強度、衝撃に対する抵抗性、腐蝕性など PCの耐火性 低温におけるPC…他  
13章 施工 PC鋼線または鋼棒の取扱いと配置 支保工および型わく工 コンクリート打ちおよび養生  
14章 円形PC構造物 円形PC構造物一般 PCパイプの型式 PCパイプの設計 設計計算法 各種パイプの製造方法…他  
15章 PCの特殊な応用 PC舗装 PCまくら木 PCシャーレン…他

技 報 堂

東京都港区赤坂溜池町5番地 振替東京10番 電話代表(48)8581