

開水路流れ混合層におけるせん断不安定波動の空間的増幅特性

木村一郎¹・細田 尚²・友近文志³

¹正会員 工修 和歌山工業高等専門学校助手 環境都市工学科

²正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

³正会員 工修 東京電力(株)

開水路流れ急拡部、植生境界付近等の水平混合層では、せん断不安定に起因した水面変動を伴う周期的な渦が発生する。本研究はこのようなせん断不安定波の挙動を理論的、数値解析的に考察したものである。基礎式として浅水流近似の平面2次元流れの基礎式を考え、底面せん断応力項および粘性項を無視し、空間に関する線形安定解析を行い、基礎式のせん断不安定波動の特性を理論的に考察する。次に、長方形死水域を対象に基礎式を直接数値計算し、同条件で行われた水理実験結果、および安定解析結果と比較することにより、モデルの適用可能性を検証する。

Key Words : shear layer instability, open channel flow, large scale vortex, plane-2D model

1. 緒 言

近年、河川の果たす役割は多様化しつつあり、治水、利水といった従来からの河川の機能に加えて、人々に親しみやすく、生物にとっても住みやすい河川、いわゆる「多自然型河川」としての機能が求められている。一方で河川に多様な空間を設けることは、従来の河川機能を妨げる可能性がある。例えば、植生を伴う流れ、複断面水路の流れ、側岸に死水域を伴う流れなど、大きな流速勾配の存在する流れ場にはせん断不安定に起因する波動と渦が発生し、河川の抵抗則に影響を及ぼす。

このような開水路流れのせん断不安定現象を調べるには、実験的方法、数値解析的方法、安定解析による方法、の3つの異なる方法がある。実験的手法を用いた研究としては、複断面水路¹⁾、植生境界付近^{2),3)}、人工ワンド周辺⁴⁾の流れについての研究がそれぞれ報告されている。一方、数値解析的手法を用いた研究も最近行われるようになってきており、静水圧を仮定した平面2次元モデルによる解析例として、開水路急拡部への適用^{5),6)}、セイシュと渦との共鳴現象の解析⁷⁾、沿岸流⁸⁾および植生境界付近の流れ^{9),10)}への適用等が報告されている。これらの解析で用いられている平面2次元モデルの基礎式は、従来から洪水氾濫解析、浅い湖や湾内の流れの解析等に用いられてきたが、せん断不安定に起因する渦現象への適用可能性の検討はまだ十分とはいえない。特に、噴流、急拡部、河川合流部の流れのように、空間的な発達を伴

う開水路混合層内の渦現象を対象とした数値計算例は少なく、このような現象を含めてさまざまな流れ場について検証を行っていく必要があると思われる。

安定解析手法を用いた研究は、数値解析モデルの特性や、渦現象への適用性の検討に有効な手段であり、これによって、渦の発生周期、増幅率等を理論的に求めることができる。オイラー方程式を対象とした線形安定解析は古くから行われており、せん断混合層に対してもhyperbolic-tangent型流速分布を仮定した、時間¹¹⁾、および空間¹²⁾に関する非粘性安定解析が行われた。また、植生付近の流れを対象とした解析¹³⁾も報告されている。オイラー方程式を用いたこれらの解析では自由水面の影響を考慮していない。この点を考慮して、平面2次元モデルの基礎式を用いた時間に関する非粘性安定解析が行われており^{5),6)}、渦現象への適用性が示唆された。しかし、噴流、急拡部の流れのように空間的に発達していく混合層では、空間に関する安定解析の方が時間に関する解析より現象とよく適合することがオイラー方程式の場合、指摘されている。従って、平面2次元モデルに対しても、対象とする現象によっては空間に関する安定解析を行う必要があると考えられる。一方、非線形安定解析についても、平面2次元モデルを対象とした解析が報告されており、波数と流速分布が非線形関係として求められている¹⁰⁾。渦がある程度巻き上がった後の非線形性の強い現象の検討には、基本的には非線形安定解析によるアプローチにならない。しかし、急拡部のように渦が合体を繰り返

しながら空間的に広がっていくような流れ場では、渦の合体の各段階ごとに線形増幅領域が現れることが指摘されており、この各段階において、線形安定解析結果の妥当性を検討できることが示されている¹⁴⁾。

本研究は、自由水面を考慮した開水路平面2次元モデルに関して、せん断不安定波動の空間的増幅特性を理論的、かつ数値解析的に考察するものである。まず、基礎式の空間に関する線形安定解析を試みる。そして、この基礎式を用いて長方形死水域・主流境界付近の渦運動の再現計算を行い、擾乱の増幅率、位相速度等を空間、および時間に関する安定解析結果と比較する。これらを通じて、開水路流れ混合層内のせん断不安定波動の特性について考察するとともに、平面2次元モデルを用いた数値解析の空間的増幅を伴う混合層の渦現象への適用性について検証する。

2. 基礎式の空間に関する安定解析

本研究では、簡単のため平面2次元モデルの中でも単純な、圧力に静水圧分布を仮定し、流線の湾曲による2次流を考慮しない基礎式を用いる。まず、基礎式の線形化方程式を誘導し、空間に関する安定解析を行うことにより、渦運動解析への適用性を検証する。

(1) 基礎式

本研究で用いる平面2次元流れの基礎式を次に示す。
[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

[運動方程式]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \beta u M}{\partial x} + \frac{\partial \beta v M}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= gh \sin \theta - \frac{1}{\rho} \tau_{bx} + \frac{\partial -\overline{u'^2} h}{\partial x} + \frac{\partial -\overline{u'v'} h}{\partial y} \\ & \quad + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \beta u N}{\partial x} + \frac{\partial \beta v N}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \tau_{by} + \frac{\partial -\overline{u'v'} h}{\partial x} + \frac{\partial -\overline{v'^2} h}{\partial y} \\ & \quad + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 h ：水深、 (u, v) ：水深平均流速ベクトルの (x, y) 方向成分、 (M, N) ：各々 $M=hu$ 、 $N=hv$ で定義される流量フラックス、 $-\overline{u'u'}$ ：水深平均されたレイノルズ応力テンソル(i, j はともに1, 2の値をとり、1は x 方向、2は y 方向を意味する。)、 ν ：動粘性係数、 θ ：水路床勾配、 τ_{bx} 、 τ_{by} ：底面において作用する x および y

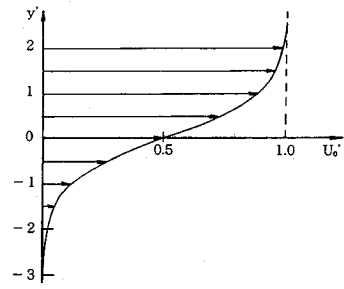


図-1 tanh型流速分布

方向のせん断応力ベクトルの成分、 β ：運動量係数で層流の場合1.2、乱流で1.0、 (x, y) ：空間座標(x ：主流方向、 y ：横断方向)、 t ：時間を表す。

(2) 線形化方程式の誘導

簡単のため、式(1)~(3)の右辺を無視(ナビエ・ストークス方程式に対するオイラー方程式に対応)し、 $\beta=1.0$ とした次式を考え、図-1に示した hyperbolic-tangent 型の主流流速分布を仮定して線形安定解析を行う。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (4-a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial u M}{\partial x} + \frac{\partial v M}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4-b)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial u N}{\partial x} + \frac{\partial v N}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (4-c)$$

h, u, v を次式のように平均値とそれからの偏差の和で表し、基礎式系を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad u = U_0(y) + u', \quad v = v' \quad (5)$$

式(5)より後、ダッシュ(')は主流からの偏差を表す。式(5)を式(4)に代入し、2次以上の微小項を無視することにより線形化方程式が導かれる。式(4-a)~(4-c)の線形化方程式は各々次の式(6-a)~(6-c)となる。

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + U_0(y) \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (6-a)$$

$$h_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + h_0 U_0(y) \frac{\partial u'}{\partial x} + h_0 \frac{dU_0}{dy} v' + gh_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (6-b)$$

$$h_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + h_0 U_0(y) \frac{\partial v'}{\partial x} + gh_0 \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \quad (6-c)$$

式(6-a)~(6-c)を用いて、水深変動 h' の線形化方程式を導くと、次式となる⁵⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 h'}{\partial t^3} + 3U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t^2 \partial x} + (3U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial x^2} \\ & - gh_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial t \partial y^2} + U_0(U_0^2 - gh_0) \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} - gh_0 U_0 \frac{\partial^3 h'}{\partial x \partial y^2} \\ & + 2gh_0 \frac{dU_0}{dy} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

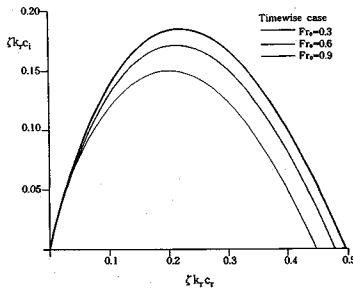


図-2 時間に関する安定解析における波数と増幅率の関係

(3) 基礎式の線形安定解析

次のような無次元量を導入する。

$$\bar{x} = \frac{x}{h_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l}, \quad \bar{t} = \frac{tU_\infty}{h_0}, \quad \bar{h}' = \frac{h'}{h_0}, \quad \bar{U}_0 = \frac{U_0}{U_\infty}$$

$$F_{r0} \equiv \frac{U_\infty}{\sqrt{gh_0}} \quad (l: \text{主流流速分布の長さのスケール})$$

ここに、 $\bar{\cdot}$ は無次元量を表す。次に、水深変動 h' を次のようにおく。

$$\bar{h}' = \epsilon \phi(\bar{y}) \exp[i(\bar{k}\bar{x} - \bar{\beta}\bar{t})] \quad (8)$$

式(8)中の ϵ は擾乱の大きさを表す定数、 \bar{k} 、 $\bar{\beta}$ は次式で定義される無次元変数である。

$$\bar{k} = kh_0, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta h_0}{U_\infty}$$

以後、 $\bar{\cdot}$ を省略する。時間に関する安定解析では

$$h' = \epsilon \phi(y) \exp[ik(x - ct)]$$

とおき、時間 t にかかる係数 c について $c = c_r + ic_i$ と実部と虚部に分解し、

$$\bar{h} = \epsilon \exp(kc_i t) \phi(y) \exp[ik(x - c_r t)]$$

として解析を行う^{5),6)}。この場合の波数と増幅率の関係を図-2に示す。これに対し、本研究で行う空間に関する安定解析の場合は、変数のなかで空間に関する係数 k について、 $k = k_r + ik_i$ と実部と虚部に分解し、

$$h' = \epsilon \exp(-k_i x) \phi(y) \exp[i(k_r x - \beta t)]$$

とおいて解析を行う。Michalke¹²⁾は、噴流のような空間的に流れが発達する場では、時間に関する安定解析より空間に関する安定解析の方が実験結果に適合することをレーリー方程式の場合について示している。

式(8)を式(7)の無次元形に代入すれば、 ϕ に関する関係式としてレーリー方程式に対応する次式が導かれる。

$$(kU_0 - \beta) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - 2k \frac{dU_0}{dy} \frac{d\phi}{dy} + \left(\frac{l}{h_0}\right)^2 (kU_0 - \beta) \{F_{r0}^2 (kU_0 - \beta)^2 - k^2\} \phi = 0 \quad (9)$$

図-1に示した hyperbolic-tangent 型の流速分布

$$U_0 = (1 + \tanh y) / 2 \quad (10)$$

を仮定する。問題は、

『境界条件 $y \rightarrow \pm\infty$ のとき $\phi \rightarrow 0$ のもとで有意な解 ϕ が存在するための β と k の関係を求めること。』

と書き表される。まず $y \rightarrow \pm\infty$ のときの ϕ の漸近形を求める。 $y \rightarrow -\infty$ のとき $U_0 \rightarrow 0$ 、 $dU_0/dy \rightarrow 0$ であり、これを式(9)に代入し、実部、虚部に分ければ次式となる。

$$\frac{d^2 \phi_r}{dy^2} + C \phi_r + D \phi_i = 0 \quad (11-a)$$

$$\frac{d^2 \phi_i}{dy^2} - D \phi_r + C \phi_i = 0 \quad (11-b)$$

ここに、 C および D は各々次式となる。

$$C = \zeta^2 [F_{r0}^2 \beta^2 - k_r^2 + k_i^2], \quad D = -\zeta^2 [-2k_r k_i]$$

ただし、 $\zeta = l/h_0$ とおいた。式(11-a)~(11-b)を次式のように書き換える。

$$\frac{d^4 \phi_r}{dy^4} + 2C \frac{d^2 \phi_r}{dy^2} + (C^2 + D^2) \phi_r = 0$$

$$\frac{d^4 \phi_i}{dy^4} + 2C \frac{d^2 \phi_i}{dy^2} + (C^2 + D^2) \phi_i = 0$$

上式の解を $\exp(\delta y)$ とおいて δ を求めれば、

$$\begin{aligned} \delta^2 &= -C \pm Di \\ &= \sqrt{C^2 + D^2} (\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \quad (\tan 2\theta = -D/C) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$C \geq 0 \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} \right) \text{ のとき,}$$

$$\delta_- = -(C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r-} + i \delta_{i-} \quad (12-a)$$

$$C < 0 \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \right) \text{ のとき,}$$

$$\delta_- = (C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r-} + i \delta_{i-} \quad (12-b)$$

となる。 $y \rightarrow +\infty$ の場合も $U_0 \rightarrow 1$ 、 $dU_0/dy \rightarrow 0$ より式(11-a)、(11-b)において

$$C = \zeta^2 [F_{r0}^2 ((k_r - \beta)^2 - k_i^2) - k_r^2 + k_i^2]$$

$$D = -2\zeta^2 [F_{r0}^2 (k_r - \beta) k_i - k_r k_i]$$

となる。ここで、

$$C \geq 0 \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \right) \text{ のとき,}$$

$$\delta_+ = (C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r+} + i \delta_{i+} \quad (13-a)$$

$$C < 0 \left(-\frac{\pi}{4} < \theta < 0 \right) \text{ のとき,}$$

$$\delta_+ = -(C^2 + D^2)^{1/4} (\cos \theta + i \sin \theta) = \delta_{r+} + i \delta_{i+} \quad (13-b)$$

となる。式(12)~(13)は後に k_r 、 k_i の同定を行うとき、 ϕ の境界条件として用いられる。

次に、Michalke¹²⁾に従い次の変数変換を行う。

$$\phi \sim \exp\left(\int \Phi dy\right), \quad z = \tanh y \quad (14)$$

変換後の式(9)を实部と虚部に分けて次に示す。

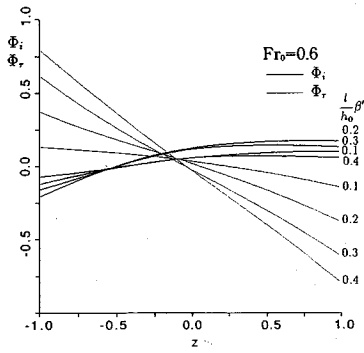


図-3 k_r と k_i の同定

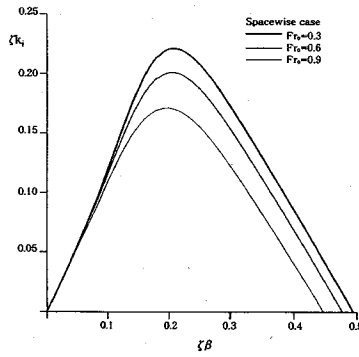


図-4 $\zeta\beta$ と ζk_i の関係

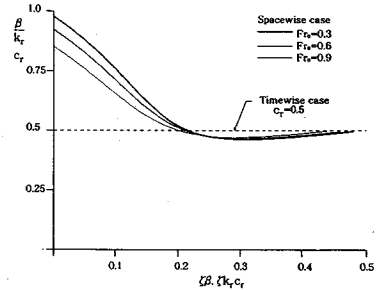


図-5 $\zeta\beta$ と $\frac{\beta}{k_r}$ の関係

$$\frac{d\Phi_r}{dz} = \frac{\zeta^2 [k_r^2 - k_i^2 - F_{r0}^2 (a^2 - b^2)] - \Phi_r^2 + \Phi_i^2}{1 - z^2} + \frac{a(k_r\Phi_r - k_i\Phi_i) + b(k_i\Phi_r + k_r\Phi_i)}{a^2 + b^2} \quad (15-a)$$

$$\frac{d\Phi_i}{dz} = \frac{2[\zeta^2 (k_r k_i - F_{r0}^2 ab)] - \Phi_r\Phi_i}{1 - z^2} + \frac{a(k_i\Phi_r + k_r\Phi_i) - b(k_r\Phi_r - k_i\Phi_i)}{a^2 + b^2} \quad (15-b)$$

ここに、 $a = k_r(1+z)/2 - \beta$ 、 $b = k_i(1+z)/2$ である。また、式 (15) の境界条件は、 $z = \pm 1$ において式 (12) と式 (13) で与えられる。ただし、式 (15) の右辺第 1 項は、 $z = \pm 1$ において 0/0 の不定形となるため、 $z = \pm 1$ の ($d\Phi/dz$) の値をロピタルの定理を用いて求めると、次式となる。

$$\frac{d\Phi_r}{dz} = \frac{\zeta^2 F_{r0}^2}{2(c^2 + \delta_r^2)} \{c(k_r a - k_i b) - \delta_i(k_r b + k_i a)\} + \frac{z}{(a^2 + b^2)(c^2 + \delta_r^2)} \cdot \{(k_r \delta_r - k_i \delta_i)(ac + b\delta_i) - (k_r \delta_i + k_i \delta_r)(a\delta_i - bc)\} \quad (16-a)$$

$$\frac{d\Phi_i}{dz} = \frac{\zeta^2 F_{r0}^2}{2(c^2 + \delta_i^2)} \{\delta_i(k_r a - k_i b) + c(k_r b + k_i a)\} + \frac{z}{(a^2 + b^2)(c^2 + \delta_i^2)} \cdot \{(k_r \delta_r - k_i \delta_i)(a\delta_i - bc) + (k_r \delta_i + k_i \delta_r)(ac + b\delta_i)\} \quad (16-b)$$

ここに、 $c = z - \Phi_r$ とする。また、 $y \rightarrow -\infty$ のとき $\delta_r = \delta_{r-}$ 、 $\delta_i = \delta_{i-}$ 、 $y \rightarrow +\infty$ のとき $\delta_r = \delta_{r+}$ 、 $\delta_i = \delta_{i+}$ の値をとる。 k_r 、 k_i をパラメータとして $z = -1$ および $z = 1$ からそれぞれ式 (12)、式 (13) および式 (16) のもとで式 (15) を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解き、 $z = 0$ における両方向からの Φ_r 、 Φ_i がそれぞれ一致するように、 k_r 、 k_i を同定することにより、 k_i と β の関係が導かれる。

(4) 安定解析結果の考察

$F_{r0} = 0.6$ において Φ_r 、 Φ_i が $z = 0$ で一致するように k_i 、 k_r を同定し、それを示したのが図-3 である。さらに $F_{r0} = 0.3$ 、 0.6 、 0.9 のそれぞれについて同定された ζk_i と $\zeta\beta$ の関係を図-4 に、 β/k_r と $\zeta\beta$ の関係を図-5 に示した。 $F_{r0} = 0.6$ の場合、 $\delta\beta = 0.205$ で増幅率が最大になっている。また、図-4 で $k_i = 0$ (安定限界) となる 0 以外の $\zeta\beta$ の値は、次のように求められる。すなわち、この安定限界では、

$$k_i = 0, \quad \frac{\beta}{k_r} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

の関係があり、これらを (15-a) に代入する。

$$\frac{d\Phi_r}{dz} = \frac{\zeta^2 \beta^2 [4 - F_{r0}^2 z^2] - \Phi_r^2 + \Phi_i^2}{1 - z^2} + \frac{2}{z} \Phi_r \quad (18)$$

ここで、図-3 におけるパラメータ $\frac{1}{h_0}\beta$ の 0.5 への漸近過程を考慮して、 $\Phi_i = 0$ 、 $\Phi_r = \Gamma z$ ($\Gamma = \text{const.}$) となる解を仮定し式 (18) に代入すると、

$$\Gamma = -(\Gamma^2 + \zeta^2 \beta^2 F_{r0}^2) \frac{4\zeta^2 \beta^2}{\Gamma^2 + \zeta^2 \beta^2 F_{r0}^2 - z^2}$$

が得られる。ここで、 $\Gamma = \text{const.}$ となるためには、

$$\zeta\beta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{F_{r0}^2}{4}} \quad (19)$$

であることが必要である。これより、 $F_{r0} \geq 2$ ではせん断不安定は生じないことがわかる。

次に、式 (14) の関係より

$$\frac{d\phi_r}{dz} = \frac{1}{1 - z^2} (\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i) \quad (20-a)$$

$$\frac{d\phi_i}{dz} = \frac{1}{1 - z^2} (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r) \quad (20-b)$$

となる。この Φ と ϕ の関係から Φ の分布を用いて ϕ に変換する。求められた ϕ_r および ϕ_i (図-6) を用いて水深 h' を次式で計算することができる。

$$h' = \epsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_r \cos \xi - \phi_i \sin \xi] \quad (21)$$

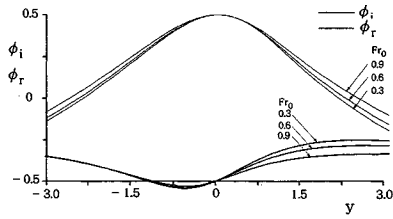


図-6 ϕ_r と ϕ_i

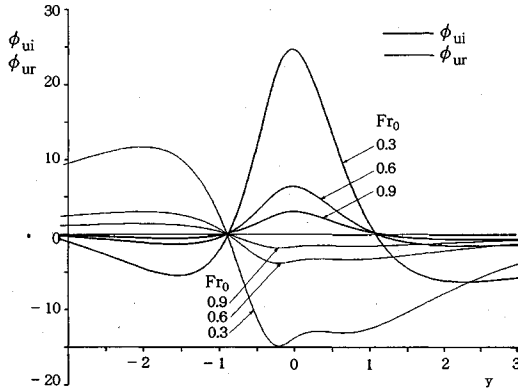


図-7 ϕ_{ur} と ϕ_{ui} の分布

ここで、 $\xi = k_r x - \beta t$ とした。さらに、式 (21) と式 (6-b)、(6-c) より (u', v') をもとめる。すなわち u', v' を

$$u' = \epsilon \phi_u(y) \exp i(kx - \beta t)$$

$$v' = \epsilon \phi_v(y) \exp i(kx - \beta t)$$

とおき、まず式 (6-c) の無次元形に代入すれば、 ϕ_v と ϕ の関係式として次式が得られる。

$$\{a^2 + b^2\} \phi_{vr} = \frac{1}{F_{r0}^2 \zeta} \{(\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i) b - (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r) a\} \quad (22-a)$$

$$\{a^2 + b^2\} \phi_{vi} = \frac{1}{F_{r0}^2 \zeta} \{(\Phi_r \phi_r - \Phi_i \phi_i) a + (\Phi_r \phi_i + \Phi_i \phi_r) b\} \quad (22-b)$$

また、 h', u', v' を式 (6-b) の無次元形に代入すると、

$$\{a^2 + b^2\} \phi_{ur} = \frac{1-z^2}{2\zeta} (\phi_{vr} b - \phi_{vi} a) - \frac{1}{F_{r0}} \{(k_r \phi_r - k_i \phi_i) a + (k_r \phi_i + k_i \phi_r) b\} \quad (23-a)$$

$$\{a^2 + b^2\} \phi_{ui} = \frac{1-z^2}{2\zeta} (\phi_{vi} a + \phi_{vr} b) - \frac{1}{F_{r0}} \{(k_r \phi_i + k_i \phi_r) a - (k_r \phi_r - k_i \phi_i) b\} \quad (23-b)$$

となる。まず式 (22) から ϕ_{vr}, ϕ_{vi} を求め、次に式 (23) から ϕ_{ur}, ϕ_{ui} を求める。これらを、式 (21) と同様に

$$u' = \epsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_{ur} \cos \xi - \phi_{ui} \sin \xi] \quad (24-a)$$

$$v' = \epsilon \exp(-k_i x) \cdot [\phi_{vr} \cos \xi - \phi_{vi} \sin \xi] \quad (24-b)$$

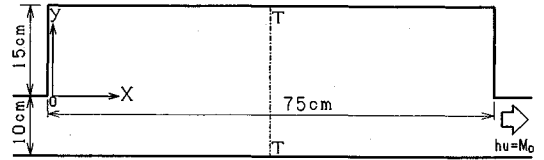


図-8 対象とした長方形死水域

表-1 実験における水理諸量

	$h_e(\text{cm})$	$Q(\text{cm}^3/\text{s})$	Re	Fr
Run1	1.00	230.0	2510	0.73
Run2	2.00	230.0	2510	0.26

h_e : 下流端水深 (cm), Q : 流量 (cm^3/s),
 $Re \equiv \frac{Q}{B\nu}$ (B : 主流幅 (10cm)), $Fr \equiv \frac{Q}{Bh_e \sqrt{gh_e}}$



図-9 界面の大規模渦

に代入して、 $(U_0 + u', v')$ を求めることができる。このようにして求められた水深分布図、流速ベクトル図には、線形解析であるにもかかわらず、擾乱の渦への巻き上がりが生ずることが示される。

図-7 は、横軸を y として ϕ_{ur}, ϕ_{ui} を示したものである。この図で ϕ_{ur} と ϕ_{ui} がそれぞれ y が 0 よりやや負の位置、約 0.9 付近でどちらも 0 となっている。式 (24-a) よりここで u' が 0 になることがわかり、Michalke がレーリー方程式に対して示しているのと同様、流速変動に関する位相の反転 (phase-reversal) が起こっていると考えられる。

以上のように平面 2 次元流れの基礎式について空間に関する安定解析を行った結果、ある特定の振動数を持つ擾乱が渦となって増幅されながら主流方向へ流下することが確認され、さきに示した基礎式によってせん断不安定による渦の再現が可能であることが確かめられた。

3. 水画実験の概要

平面的なせん断不安定波動の現れる単純な流れ場として、本研究では水平面内の長方形死水域をとりあげることにする。実験は、幅 25 cm、長さ 10 m、路床勾配 1/500 の長方形断面水路を用いて行われた。水路上流端より約 6 m 下流側の位置に、角材を設置することにより長方形の死水域を設け通水した。アルミニウム粉末を用いて流れの可視化を行い、上方から写真撮影、および

ビデオ撮影を行うとともに、死水域内の数断面において水深の中央の位置で流速測定を行った。測定にはプロペラ直径 3 mm の超小型プロペラ流速計（篠塚製作所製）と、微流速計（計測技研製）を併用した。

本研究で用いた長方形死水域はアスペクト比（開口部長さと奥行きの比）が 5.0 であり、その概要を図-8 に示した。フルード数の異なる 2 つの条件のもとで実験を行った。実験における水理条件を表-1 に示す。

図-9 は Run1 における死水域・主流界面付近の流れの可視化写真（露光時間 0.1 秒）である。界面付近に大規模渦が撮影されている。ビデオ撮影より、渦には発生直後に消滅していくものや、下流側で合体、吸収等を起こすものがあることが確認された。

4. 数値解析の手法

基礎式 (1)~(3) を直接数値計算し、計算結果と安定解析結果を比較するとともに、実験結果の再現を試みる。

(1) 基礎式

式 (1)~(3) を基に、底面せん断応力項、レイノルズ応力項を次のように評価した。

・底面摩擦項

$$\tau_{bx} = \frac{f}{2} \rho u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{by} = \frac{f}{2} \rho v \sqrt{u^2 + v^2}$$

・レイノルズ応力項

$$-u'_i u'_j = D_h \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad D_h = \alpha h u_*$$

ここに、 u_* ：摩擦速度（ $\equiv \sqrt{\frac{f(u^2+v^2)}{2}}$ ）、 f ：摩擦損失係数、 k ：水深平均乱れエネルギー、 α ：定数である。なお、乱れエネルギー k は局所的な u_* を用いて瀬津の提案する実験式¹⁵⁾

$$\frac{k}{u_*^3} = 4.78 \exp\left(-2 \cdot \frac{z}{h}\right)$$

を水深積分して得られる $2.07 \cdot u_*^3$ で評価する。また、摩擦損失係数 f は局所的なレイノルズ数 Re' の関数とし、その関係は次式で表される。

$$f = 6/Re' \quad (Re' \leq 430)$$

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = A_s - \frac{1}{\kappa} \left[1 - \ln\left(Re' \sqrt{\frac{f}{2}}\right) \right] \quad (Re' > 430)$$

ここで、 $\kappa = 0.4$ 、 $A_s = 5.5$ とした。

(2) 境界条件・初期条件

境界条件、初期条件は次のように与えた。

・境界条件：上流端 $M = M_0$ 、 $N = 0$

表-2 数値計算の条件

	Run1	Run2	Run3
h_e (cm)	1.00	2.00	1.30
M_0 (cm^2/s)		23.0	
ν (cm^2/s)		9.17×10^{-3}	
Re		2510	
Fr	0.73	0.26	0.50
Δt (s)		1.0×10^{-4}	

h_e ：下流端水深 (cm), M_0 ：単位幅流量 (cm^2/s),
 Δt ：時間ステップ, $Re \equiv \frac{M_0}{\nu}$, $Fr \equiv \frac{M_0}{h_e \sqrt{g h_e}}$

$$\text{下流端 } h = h_e, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

壁面 水路右岸 slip 条件

その他 non-slip 条件

・初期条件：死水域 $M = 0$, $N = 0$, $h = h_e$

主流部 $M = M_0$, $N = 0$, $h = h_e$

ここで、計算領域の上流端は死水域上流端より 5 cm 上流側 ($x = -5$ cm) に、計算領域の下流端は死水域下流端より 20 cm 下流側 ($x = 95$ cm) にそれぞれ設定した。また、右岸の壁面（死水域と反対側）で slip 条件を採用したのは、この付近で計算格子幅を大きくとったことによる。

(3) 数値計算の手順

式 (1)~(3) を、コントロールボリューム法を用いて離散化し、陽解法により時間方向に計算を進める。基礎式の離散化の方法としては、運動方程式の慣性項には可変格子系の 2 次元 QUICK スキームを用い、時間積分にはアダムス・バシユフォース法を採用した。これらはいずれも各々空間、時間に関して 2 次の精度を有する。具体的な差分式の誘導は省略する。計算に用いた格子は壁面近傍（水路右岸を除く）と死水域・主流界面付近を細かくした可変格子系で、最小格子幅は 0.22 mm である。なお、壁面付近の流速分布を再現するため、次のような減衰関数を渦動粘性項に乗じた。

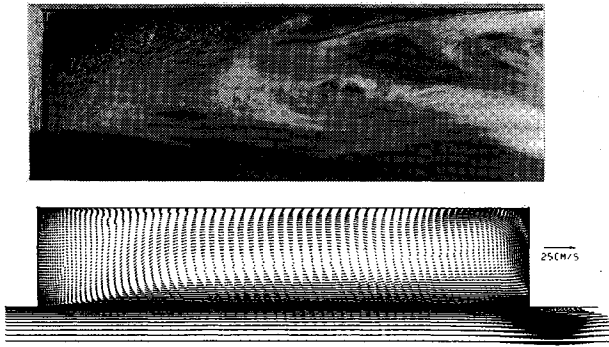
$$B \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{z u_*}{c \nu}\right) \right]^2$$

B は富永¹⁶⁾ にならない、次のようにおいた。

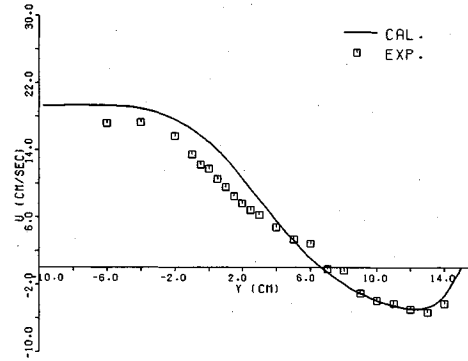
$$B = \begin{cases} 4.0 \cdot \frac{z}{h} \left(1.0 - \frac{z}{h}\right) & z \leq h/2 \\ 1.0 & z > h/2 \end{cases}$$

ここに、 z ：壁面までの最短距離、 c ：定数（ $= 5.0$ ）である。

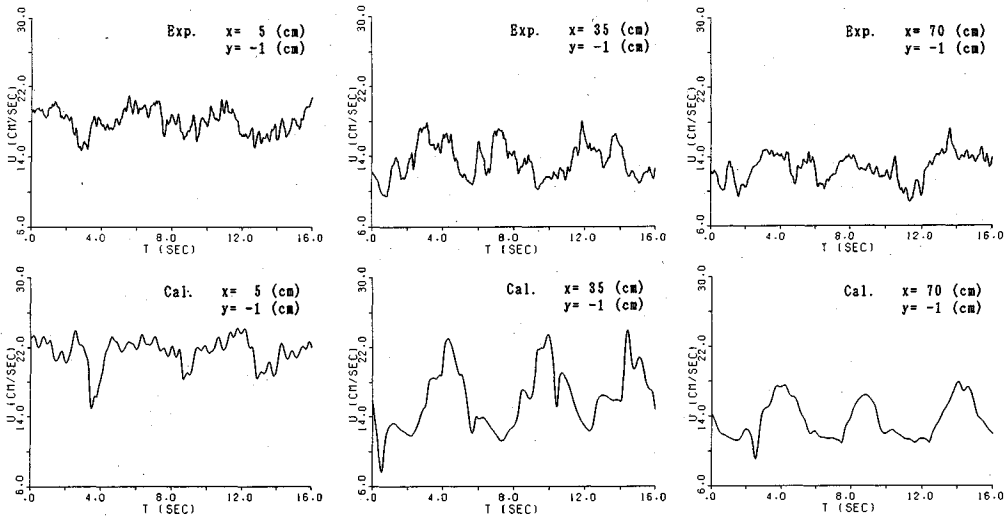
計算の条件は、実験とほぼ同条件としたが、新たに Run 3 として Run 1, Run 2 のほぼ中間のフルード数を有する条件を設定し、3 通りの条件のもとで計算を行った。計算の条件を表-2 に示す。



図—10 流れの可視化写真と時間平均流速ベクトル



図—11 T-T断面の流速分布



図—12 主流方向の流速変動

5. 数値解析結果の考察

計算結果と実験結果を比較することにより、現象の考察を行う。以下、4項目について検討する。

(1) 時間平均流速

図—10はRun1における流れのアルミ粉による可視化写真(露光時間1.0秒)と数値計算による時間平均流速ベクトルを比較したものである。計算結果では、死水域中央付近に主循環流と、その下流側に小さな循環流があり、隅角部には副循環流が再現されている。また、上流側隅角部の少し下流側の壁面付近にも小さな副循環流が生じている。実験の可視化写真では、露光時間が1秒と短いため、時間平均された流速場をとらえていないが、死水域内の循環流がある程度撮影されている。主循環流の形状や上流側隅角部、下流の壁面付近の渦の形状、主循環流の下流側の2次的な循環流の発生がみられる点などは計算結果の流速ベクトル図とほぼ一致する。

図—11は、Run1において図—8のT-T断面、すなわち開口部中央($x=37.5\text{ cm}$)における水路横断面での主流方向の流速分布を示したものである。実験結果では、混合層付近($y=6\text{ cm}$ 付近)で流速分布に不連続がみられるが、これは、この付近がプロベラ流速計と微流速計の測定の接点であるためと思われる。この点を考慮すれば、数値計算は実験結果の流速分布をほぼ再現していると考えられる。また、混合層付近の流速分布形は図—11に示すtanh型分布とほぼ一致する。さらに、死水域の上流端付近、 $x \leq 10\text{ cm}$ 程度までの断面では、計算結果の流速分布がほぼtanh型となることが示され、安定解析におけるtanh型流速分布の仮定の妥当性が確認された。

(2) 界面付近の流速変動特性

次に死水域・主流界面付近の流速変動特性について考察する。まず、界面付近の主流方向(x 方向)の流速変動について実験結果と数値計算結果を比較し、計算結果

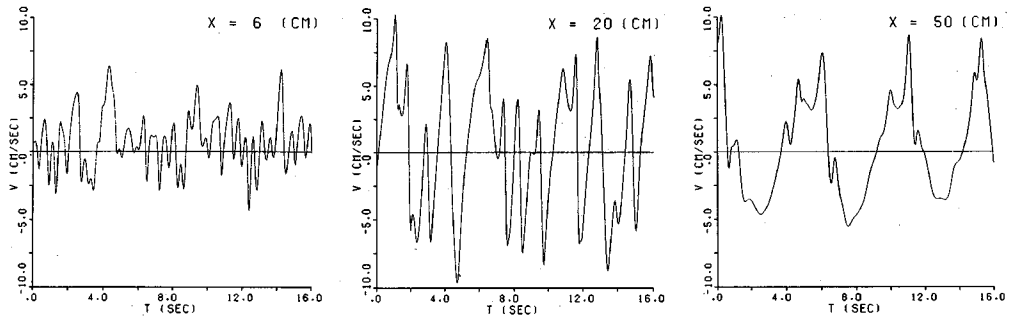


図-13 界面上の y 方向の流速変動 (Run 1)

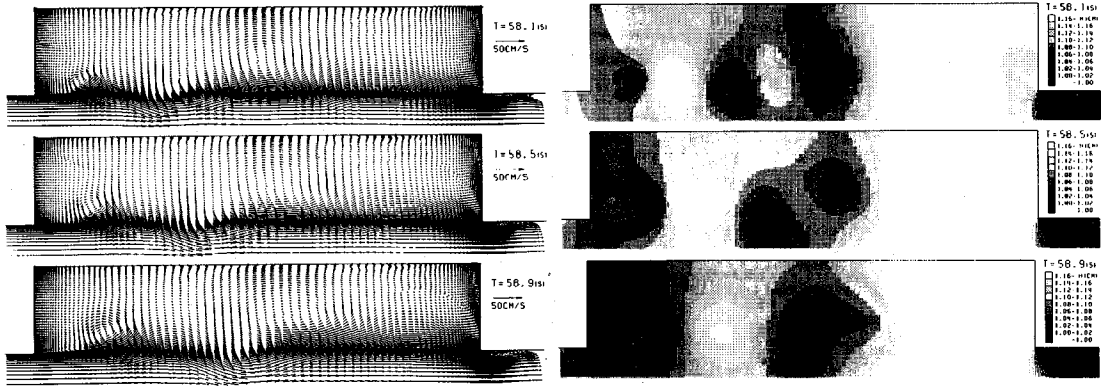


図-14 流速ベクトルと水深分布 (Run 1)

の妥当性について検討する。次に水路横断方向 (y 方向) の流速変動の計算結果を示し、界面付近の流速変動の卓越周期について考察を行う。

a) 界面付近の主流方向の流速変動

図-12はRun 1における主流方向の流速変動の実験、計算結果を、3点について示したものである。上流端付近 ($x=5$ cm) では、せん断不安定と思われる短い周期の変動がみられる。また、3.0~5.0秒程度の比較的長い周期の変動もみられるが、これは下流側の長周期変動の影響がこの付近まで及んでいるためと考えられる。 $x=20$ cm付近では0.5~2.0秒の周期がみられ、後述の渦の合体が主じていることが予想される。下流端に近い $x=70$ cm付近では4.0~5.0秒の長周期の変動が卓越している。これは、いくつかの合体過程を経た後の最終的な渦の周期に対応すると思われる。これらの特性は実験結果と計算結果で定性的にほぼ適合していると思われる。

b) 界面における横断方向の流速変動

図-13はRun 1の数値計算における界面上 ($y=0$) の横断方向の流速変動を3つの異なる x 座標について示したものである。死水域上流付近 ($x=5$ cm) では、せん断不安定に対応する0.2~0.4秒程度の短い周期の

変動が卓越している。下流に進むにつれて短い周期の隣接するピークが互いに結合する現象がみられ、卓越周期は徐々に大きくなっていく。これは、上流端付近でせん断不安定に起因して発生した渦が、合体、吸収等を繰り返すことにより成長しながら下流へ移流していく現象に対応するものと思われる。

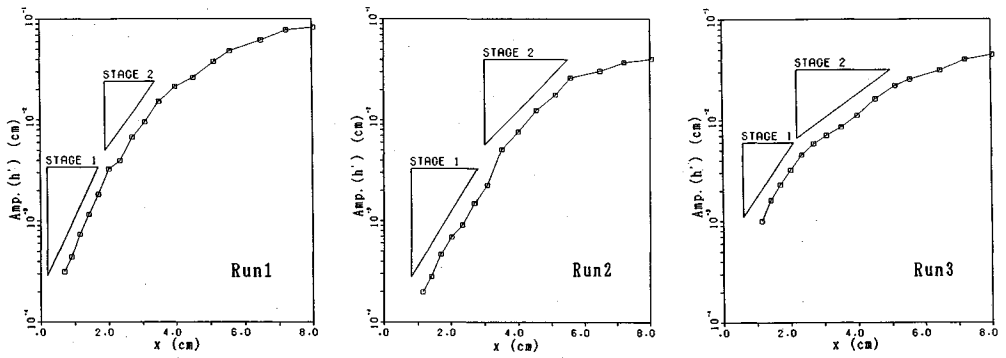
(3) 大規模渦の挙動

図-14はRun 1における計算結果の流速ベクトルと、水深分布を示したものである。渦の位置では水深が極小となっており、また、実験でみられたように渦の合体が再現されていることがわかる。多くの流速ベクトル図、水深分布図より、渦には発生直後に消滅する小さなものも存在し、合体を経て下流へ進んでいく大規模渦の発生は0.5~1.5秒周期となっていることがわかった。

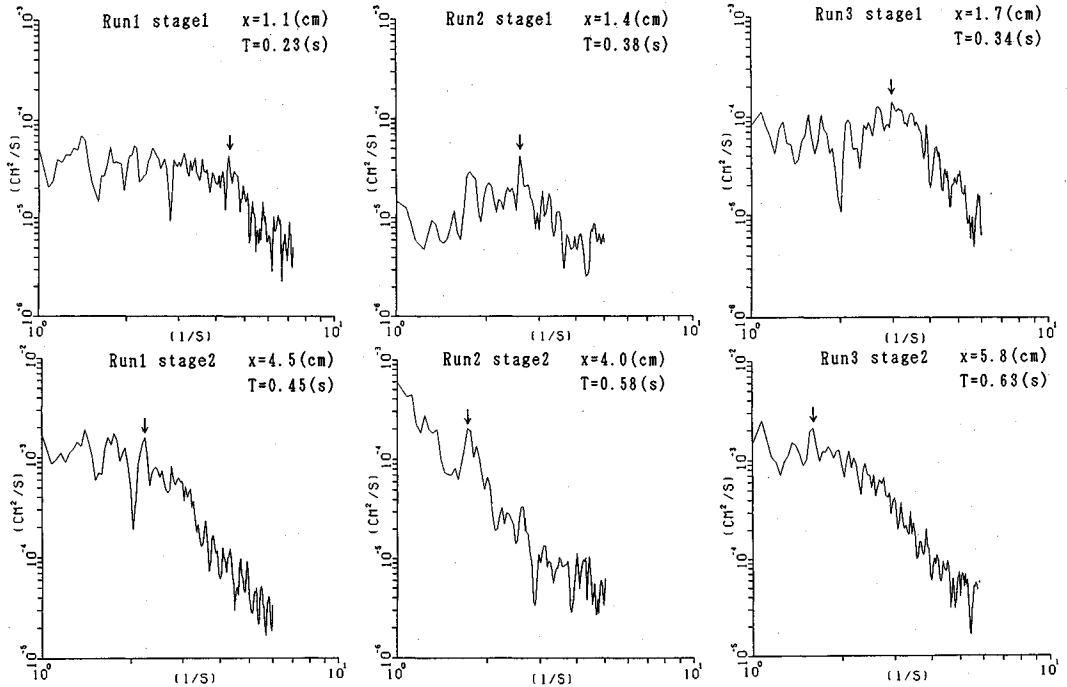
(4) せん断不安定波動の特性

これまでの考察で、数値計算によってせん断不安定による波動が再現されていることが確認された。次に、このせん断不安定波動について、基礎式の空間に関する安定解析結果と数値解析結果の比較を行う。

a) 波数と増幅率の関係



図—15 数値計算結果における線形増幅領域



図—16 数値計算結果のスペクトル

図—15は Run 1～Run 3における水深変動の擾乱の振幅の空間に関する増幅の様子を示したものである。 x の小さい範囲で線形増幅領域が現れている。さらにこの線形増幅領域は図に示すように2段階にわかれており、上流側の Stage 1の方が下流側の Stage 2よりも増幅率が大きい。次に各 Stage におけるせん断不安定波動の卓越周期を求めめるため、計算結果の水深変動の時系列を高速フーリエ変換し、スペクトルを求めたのが図—16である。下流側の渦の合体に起因する長周期波動の影響等で明確なピークが現れていないため、次のような方法で線形増幅波動の卓越周期を求めた。すなわち、様々な x 座標における流速変動の時系列を求め、波動の空間的遷移の様子とスペクトルの比較より線形増幅波動の卓越周

期を求め、対応するスペクトルピークを図中に矢印で示した。Stage 1の卓越周期は、フルード数が大きいほど小さくなっている。また、Stage 2では、Run 1, 2では、Stage 1の周期のほぼ2倍の周期が、また、Run 3ではほぼ1.5倍の周期が現れている。これより、Stage 1における波動の増幅過程は渦の合体に対応して Stage 2へ移行すると考えられる。Hoらは空間的成長を伴う混合層内の渦運動について、渦の合体の各段階ごとに線形増幅領域が存在すること、合体後の非線形性が強い領域についても見かけ上、線形安定解析結果との比較が可能であることを実験的、理論的に示している¹⁴⁾。そこで、各 Run の Stage 1, 2における $\zeta\beta$ と k_i の関係を空間および時間に関する安定解析結果と比較したものが図—17

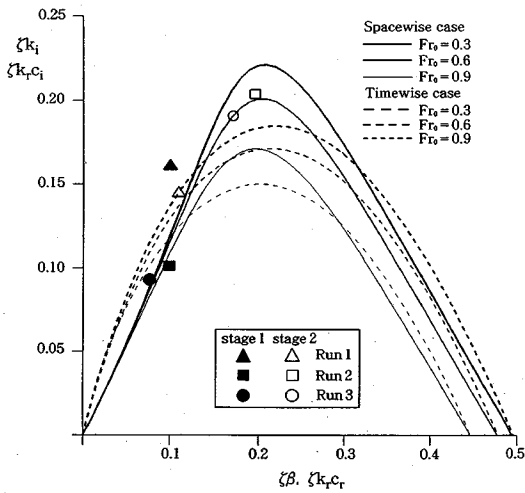


図-17 計算結果の波数と増幅率の関係

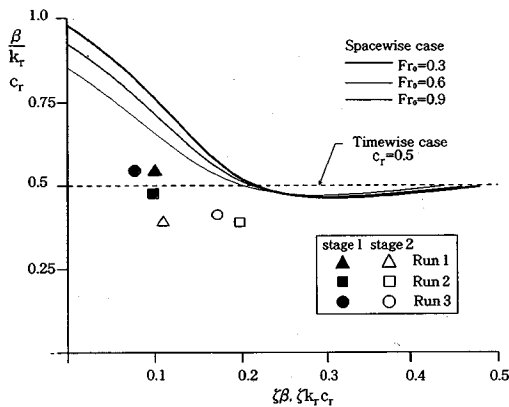


図-18 攪乱の進行速度

である。ここで、Stage2の運動量層厚 θ は、Stage2の線形増幅の開始点における流速分布より評価した。各Run、各Stageともに、ほぼ安定解析結果との一致がみられ、時間に関するものよりも空間に関する安定解析結果に対して、より良好な一致がみられる。

b) 攪乱の進行速度

攪乱の位相速度についても同様に比較を行ったのが図-18である。計算結果の位相速度は空間に関する安定解析結果に比べて少し小さい値となっており、特にStage2では、この差が顕著である。これには、拡散による主流流速分布の変化、渦の合体等の非線形性の影響、安定解析で省略した右辺の各項（底面摩擦項など）の影響等が考えられる。

c) 流速変動の位相の反転

図-19はRun2における $x=5.0$ cmの断面での x 方向の流速変動のr.m.s. ($\sqrt{u'^2}$)を示したもので、 $y=0.4$ cm付近で極小となっている。図-20は $x=5.0$ cm

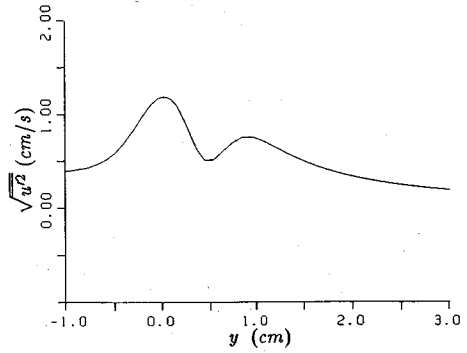


図-19 u'^2 の横断分布

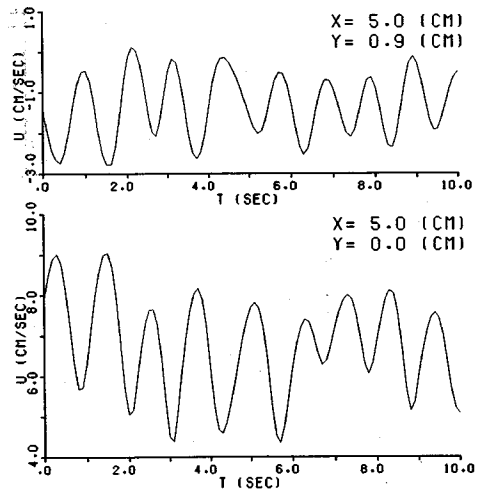


図-20 位相の反転

における $y=0.0$ cmと $y=0.9$ cmでの u' の時系列を示したもので、両者にほぼ π の位相のずれがみられる。これらの図より、安定解析で示された位相の反転が生じていることがわかる。位相の反転の位置は $y=-0.4$ cm付近であり、また $x=5$ cmでの運動量層厚は $\theta=0.21$ cmで、 $l=2\theta$ の関係から $y'=y/l=0.95$ となる。この値は安定解析における図-7の位相の反転の位置とほぼ一致する。

6. 結 語

比較的簡単な平面2次元モデルによるせん断不安定に起因する渦運動の数値解析は、適用範囲が浅い流れ場に限定されるものの、その簡便性、経済性等の点から実用的手法と考えられる。本研究では、平面2次元モデルに関して、空間的発達を伴う水平面内混合層におけるせん断不安定波動の特性を理論的、かつ数値解析的に明らかにすることを目的として、基礎式の空間に関する線形安

定解析, および長方形死水域・主流界面のせん断不安定波動現象への適用を行った. 得られた成果を以下にまとめる.

1. 平面2次元モデルの基礎式について空間に関する非粘性線形安定解析を行った結果, 次のようなことがわかった.

(a) 線形増幅領域における攪乱の周期と増幅率の関係および位相速度の関係を導いた.

(b) Michalke がオイラー方程式の安定解析から示しているのと同様, 流速変動に位相の反転が生じることが確認された.

2. 長方形死水域・主流界面のせん断不安定波動の再現計算を試み, 実験結果, 安定解析結果との比較を行った.

(a) せん断不安定に起因する渦の発生, および合体を経て成長する過程が再現計算された.

(b) 死水域上流付近では攪乱の線形増幅領域の存在が確認された. さらにこの線形増幅領域は渦の合体に起因して卓越周期と増幅率の異なる複数の段階 (Stage) にわけられることがわかった.

(c) 再現されたせん断不安定波動の周期と増幅率の関係は, Stage 1, 2ともに空間に関する安定解析結果とほぼ一致した.

(d) 攪乱の進行速度については空間に関する安定解析結果より小さい値となった. この原因として, 拡散による主流流速分布の変化, 渦の合体の影響, 底面摩擦の影響等が考えられた.

(e) 空間に関する安定解析で示された流速変動の位相の反転が数値計算結果にも再現され, その位置は安定解析結果とほぼ一致した.

参考文献

- 1) 福岡捷二, 藤田光一: 複断面河道の抵抗予測と河道計画への応用, 土木学会論文集, No. 411/II-12, pp. 63-72, 1989.
- 2) 池田駿介, 太田賢一, 長谷川洋: 側岸部植生帯が流れ及び粒子態物質の輸送に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 447/II-19, pp. 25-34, 1992.
- 3) 辻本哲朗, 北村忠紀: 側岸に沿って植生群落のある流路

での水面変動を伴う横断混合, 水工学論文集, 第36巻, pp. 273-278, 1992.

- 4) 中川研造, Jalil, M. A., 河原能久, 菅和利: 人工ワンド周辺部の流れ場に関する実験的研究, 河道の水理と河川環境シンポジウム論文集, pp. 89-94, 1993.
- 5) 細田 尚, 木村一郎: 開水路急拡部の流れにおける渦の発生・発達に関する二, 三の検討, 水工学論文集, 第37巻, pp. 463-468, 1993.
- 6) Hosoda, T and Kimura, I.: Vortex formation with free surface variation in shear layer of plane-2D open channel flows, *Proc. 9th Symp. on TURBULENT SHEAR FLOW*, Vol.1 P112, 1-4, 1993.
- 7) 木村一郎, 細田 尚: 側岸に死水域を有する開水路流れの非定常解析, 日本流体力学会誌「ながれ」, Vol.12, pp. 399-408, 1993.
- 8) 灘岡和夫, 八木宏: 浅い水域の乱流場に関する数値計算モデルの開発と沿岸流場への適用, 土木学会論文集, No. 475/II-24, pp. 25-34, 1993.
- 9) 灘岡和夫, 八木 宏: SDS & 2DH モデルを用いた開水路水平せん断乱流の数値シミュレーション, 土木学会論文集, No. 475/II-24, pp. 35-44, 1993.
- 10) 福岡捷二, 渡辺明英, 津森貴行: 樹木群を有する開水路における平面せん断流の構造とその解析, 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 41-50, 1994.
- 11) Michalke, A.: On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile, *J. Fluid Mech.*, Vol.22, pp. 543-556, 1964.
- 12) Michalke, A.: On spatially growing disturbances in a inviscid shear layer, *J. Fluid Mech.*, Vol.23, pp.521-544, 1965.
- 13) 池田駿介, 太田賢一, 長谷川洋: 側岸部植生境界の周期渦の発生機構, 土木学会論文集, No. 443/II-18, pp. 47-54, 1992.
- 14) Ho, C-M. and Huang, L-S.: Subharmonics and vortex merging in mixing layers, *J. Fluid Mech.*, Vol.119, pp.443-473, 1982.
- 15) 彌津家久, 中川博次: 修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, No. 387/II-8, pp. 125-134, 1987.
- 16) 富永晃宏: 直線開水路の三次元乱流構造に関する研究, 京都大学博士論文, 1987.

(1994.4.5 受付)

CHARACTERISTICS OF SPATIALLY GROWING DISTURBANCES IN A MIXING SHEAR LAYER OF OPEN CHANNEL FLOWS

Ichiro KIMURA, Takashi HOSODA and Hisashi TOMOCHIKA

Spatially growing disturbances of the velocity and the water depth in a mixing shear layer of open channel flows are investigated by means of the plane-2D shallow water equations. The inviscid instability analysis of the basic equations with respect to the space is firstly made for the tanh-type velocity profile in order to derive the spatial amplification rate and the phase velocity of disturbances. Then the plane-2D open channel flows with slender rectangular dead zone are simulated numerically under the hydraulic conditions of experiments. In regard to the characteristics of spatial growing disturbances, it will be shown that the amplification rate, the primary frequency and the phase velocity evaluated by the calculated results are in good agreement with the instability analysis and the laboratory tests.