

# 薄層要素-離散化波数法による圧縮性流体層を 含む成層弾性体の動的解析手法の展開

東平光生<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東京理科大学講師理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎2641)

本論文では、薄層要素-離散化波数法を用いた圧縮性流体層を含む成層弾性体の動的応答解析手法を展開している。流体領域の支配方程式に圧力に関するスカラー場の波動方程式を用い、弾性波動方程式と結合することで、固体-流体の連成効果を考慮している。この結果、非対称マトリックスに関する固有値問題が得られ、正規モードを因果性を考慮し重ね合わせることで、Green関数の計算を行っている。得られた振動モードを既往の研究結果と比較するとともに、時刻歴応答解析結果の検討を通して、本手法の妥当性の検討を行っている。

**Key Words** : thin-layered element method, discrete wave number method, solid-fluid interaction

## 1. はじめに

著者は一連の研究で、薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の衝撃応答解析手法を示してきた<sup>1)-4)</sup>。この手法は、マトリックスの固有値問題から求めた表面波モードを因果性を考慮して重ね合わせ、弾性波動方程式の解を得る点に特徴がある。

著者はこれまで、波動場を弾性体に限定してきた。しかし、実際に問題になる波動場は、固体の弾性波動場ばかりとは限らず、固体の波動場と圧縮性流体の波動場の連成を扱わねばならない場合もある。たとえば、海洋と海底との連成振動問題、あるいは、資源探査などで問題となる圧縮性流体層を含む成層構造の動的解析などがその一例である。

特に、海洋と海底の連成振動問題は、地震学の分野では海底での地震に関連して、Ewingのテキストなどでも扱われている<sup>5)</sup>。一方、工学でたびたび問題となる堆積盆地平野部の地盤振動解析では、平野部に海が隣接する場合も少なくない。しかし、海の流体としての影響は無視されることが多く、固体-流体間を伝播する表面波動の伝播の解明は今後の研究に待つところも多い。

本論文では、こうした問題設定のもとで、薄層要素-離散化波数法を、圧縮性流体層を含む成層構造の動的解析に適用するための定式化を示す。そして、この定式化をもとに数値計算を行い、手法の妥当性を検証することが目的である。本論文での定式化は、圧縮性流体層を含む成層構造のGreen関数の誘導が中心であり、流体を含む地盤の振動解析手法を展開して行くための基礎的研究としての位置づけを持つ。

圧縮性流体と固体の連成振動問題に関する既往の研

究を概観すると、Stoneley<sup>6)</sup>やBiot<sup>7)</sup>の研究にまでさかのぼることができる。StoneleyやBiotの研究は、海底での地震と海洋との相互作用が問題意識にあり、均質な流体領域と固体領域の相互作用について解析的な検討を行っている。これらは、固体-流体の連成解析の先駆的な研究としての意義ばかりでなく、新たな解析手法の妥当性を検証する上での指標になり得る点でも意義がある。

多層弾性体と流体層との連成解析はThomson-Haskellの伝達マトリックス法<sup>8)</sup>でも可能である。しかしながら、固有値解析を安定で精度良く行うことに問題が生じることもあり、最近、Tanが薄層要素法を導入することで、多層弾性体と流体の相互作用を解析するための定式化を行っている<sup>9)</sup>。Tanは、流体領域の未知量として変位を用いる方法を採用した。従来より、流体領域の未知量を変位として定式化する場合には、非正則なマトリックスを扱う必要があることが知られてきた。Tanの研究ではペナルティー関数法と次数低減積分を組み合わせることで、この問題が解決できることを示している。

こうした既往の研究に対して、本研究で用いる定式化では流体領域の支配方程式に圧力の波動方程式を用いる。これは流体領域の基本量は変位でなく圧力であるという認識に基づく。変位を基本量とした場合、圧力を計算するためには、変位を微分する必要がある。しかし、圧力を基本量とすればこうした手続きは不要である。さらに、圧力を未知量にとり、因果性を考慮して正規モードを重ね合わせることを考えると、非正則なマトリックスを扱うことが不要となる。したがって、Tanの導入したペナルティー法なども、この定式化で

は必要がなくなる。

その一方、本手法では後述のように非対称マトリックスの固有値計算を扱う必要が生じる。しかしながら、最近では、マトリックスの固有値計算のソフトウェアも充実してきており、非対称マトリックスの固有値計算もさほど困難ではないと考えられる。

本論文では、以上の観点から圧縮性流体と固体の連成解析手法を薄層要素-離散化波数法を用いて展開することから議論をはじめめる。

## 2. 固体-流体の連成解析のための薄層要素-離散化波数法

### (1) 固体-流体の連成問題の基礎方程式

議論の出発点を明確にするため、基礎方程式を与えることから始める。以下の議論では、方程式はすべて3次元空間で考える。

固体については、次の弾性波動方程式を用いる。

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} - \rho\partial_t^2\mathbf{u} = -\mathbf{f} \quad (1)$$

ここに、 $\lambda$ ,  $\mu$ はLaméの定数、 $\nabla$ は勾配演算子、 $\rho$ は質量密度、 $\mathbf{u}$ は固体の変位場、 $\mathbf{f}$ は固体に作用する物体力場を示す。また、 $\partial$ は偏微分の演算子で下付きの添字で偏微分を行うことを示す。

流体については、次の圧力に関する波動方程式を用いる。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 p = -g \quad (2)$$

ここに、 $p$ は流体圧力、 $c$ は流体中の音速、 $g$ は流体に作用する物体力を示す。

固体と流体の境界では、弾性波と流体圧力の波動が相互作用を行う。相互作用の方程式は、次式で記述される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -n p \quad (3)$$

$$\nabla p = -\rho_0 \partial_t^2 \mathbf{u} \quad (4)$$

ここに、 $n$ は固体表面外向きの法線ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は固体の表面力ベクトル、 $\rho_0$ は流体の質量密度を表す。式(3)は固体表面力と流体圧力の釣合いである。式(4)は対流項を無視したEulerの方程式を用いて、固体と流体の境界面では両者の速度が一致することを示している。

### (2) 波数領域の波動方程式に対する薄層要素法

流体領域に対して、薄層要素-離散化波数法を適用するため、まず弾性波動方程式に対する薄層要素-離散化波数法の定式化を概観する。

これまでの研究でも示してきたように、弾性波動場およびその物体力場は、次のようにsurface vector

harmonics<sup>10)</sup>を用いて展開する。

$$\mathbf{u}(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [R_{k_n}^m(r, \phi) U_{z k_n}^m(z, t) + S_{k_n}^m(r, \phi) U_{r k_n}^m(z, t) + T_{k_n}^m(r, \phi) U_{\phi k_n}^m(z, t)] \quad (5)$$

$$\mathbf{f}(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [R_{k_n}^m(r, \phi) F_{z k_n}^m(z, t) + S_{k_n}^m(r, \phi) F_{r k_n}^m(z, t) + T_{k_n}^m(r, \phi) F_{\phi k_n}^m(z, t)] \quad (6)$$

ここに、 $r$ ,  $\phi$ および $z$ は円筒座標系の座標成分、 $k_n$ は離散化波数、 $m$ は $\phi$ に関するFourier成分の次数である。また、 $R, S$ および $T$ はsurface vector harmonicsであり、その具体的な形については前論文<sup>3)</sup>で示している。

弾性波動方程式をsurface vector harmonicsで展開し、その方程式に薄層要素法を適用することで、次の形式の方程式を得る。

$$[[M_s] \frac{d^2}{dt^2} + [K_s]] \{U_{k_n}^m\} = \{F_{k_n}^m\} \quad (7)$$

ここに、 $[M_s]$ ,  $[K_s]$ は質量および剛性マトリックスで、添字の $s$ は固体領域を表すのに用いられている。また、マトリックス $[K_s]$ は離散化波数の値に応じて成分を変化させる。ベクトル $\{U_{k_n}^m\}$ および $\{F_{k_n}^m\}$ は変位場および物体力場のsurface vector harmonicsの係数をベクトル化したものである。

この定式化と同様な手続きを流体領域の方程式に与える。まず、surface vector harmonicsによる弾性波動方程式の解の展開に相当する流体圧力場および物体力場の展開は、次のようになる。

$$p(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{k_n}^m(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \quad (8)$$

$$g(r, \phi, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} G_{k_n}^m(z, t) Y_{k_n}^m(r, \phi) \quad (9)$$

ここに、

$$Y_{k_n}^m(r, \phi) = J_m(k_n r) \exp(im\phi) \quad (10)$$

であり、 $J_m(k_n r)$ は第1種のBessel関数である。

この展開によって、流体圧力場の波動方程式は、次のように変換される。

$$\partial_z^2 P_{k_n}^m(z, t) - k_n^2 P_{k_n}^m(z, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 P_{k_n}^m(z, t) = -G_{k_n}^m(z, t) \quad (11)$$

式(11)に対して薄層要素法を適用することで、次の方程式を得る。

$$[[M_f] \frac{d^2}{dt^2} + [K_f]] \{P_{k_n}^m\} = \{G_{k_n}^m\} \quad (12)$$

ここに、 $[M_f]$ および $[K_f]$ は質量および剛性マトリックスに相当するマトリックスで添字の $f$ は流体領域に関するものであることを示している。また、ベクトル $\{P_{k_n}^m\}$



しかし、ここで求める固有値および固有ベクトルは正規モードであり、媒質に減衰を考慮しない限り、実数で得られるべき性質のものである。また、正規モード解が実数で得られることは、因果性からの要求とも一致する。したがって、正規モードの時間変動を示す対角マトリックス $[\Lambda_{k_n}^m(t)]$ の成分は、これまでの論文<sup>1)-3)</sup>に示してきた関数を用いられる。

式(24)を異なる離散化波数で重ね合わせることで次の時間-空間領域の解を得る。

$$\begin{cases} u(r, \phi, t) \\ p(r, \phi, t) \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [H_{k_n}^m(r, \phi)] \times \int_0^t [V_{k_n}^m][\Lambda_{k_n}^m(t-\tau)][V_{k_n}^m]^{-1} \times [M]^{-1} \begin{cases} F_{k_n}^m(\tau) \\ G_{k_n}^m(\tau) \end{cases} d\tau \quad (25)$$

ここに、マトリックス $[H_{k_n}^m(r, \phi)]$ はsurface vector harmonics  $R_{k_n}^m$ ,  $S_{k_n}^m$ ,  $T_{k_n}^m$  および流体圧力を展開した関数 $Y_{k_n}^m$ を成分とするマトリックスである。

### 3. 数値計算例

#### (1) 解析モデル

ここでは、Fig. 1に示す解析モデルを用いて、数値計算を行う。Fig. 1は半無限弾性体の上に深さ375.5 mの圧縮性流体層が分布しているモデルである。流体の質量密度は $\rho_0 = 1.0 \text{ g/cm}^3$ 、流体の音速は $c = 1.5 \text{ km/s}$ とする。半無限弾性体の質量密度は $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ 、S波の伝播速度は $c_T = 2.25 \text{ km/s}$ 、ポアソン比は $\nu = 0.25$ とする。また、固体表面から、深さ1.0 kmの位置に鉛直上向きに作用する単位階段関数で表される時間変動を持つ点振源を考える。

半無限弾性体上に深さ375.5 m、音速1.5 km/sの流体層が分布しているモデルは、TanがBiotの解との比較に用いた解析モデルであり<sup>9)</sup>、1次の表面波モードのAiry相は約1.0 Hzで与えられる。

Tanは半無限弾性体に対する仮定の剛基盤を弾性体表面から深さ2.1 kmのところに設定している。Tanも示しているように、1次の表面波のAiry相付近でのモード形状を求める観点からは、仮定の剛基盤の深さはこれで十分である。しかし、時刻歴応答を求める観点からは不十分である。後述のように、時刻歴応答解析は、振源から20 km離れた観測点で、およそ40 sec程度まで行う。この時間-空間領域上に仮定の剛基盤からの反射P波が入り込まないようにするため、仮定の剛基盤を固体表面から深さ75.0 kmに設定する。

また、解析モデルの薄層要素分割は、Tanのモデルを参考に、流体領域を均等に10分割し、固体表面付近の

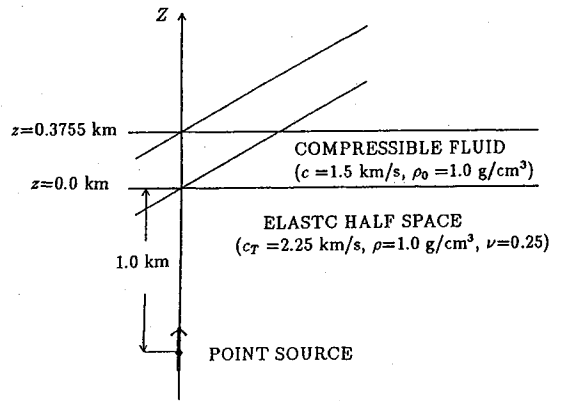


Fig. 1 Analyzed model.

Table 1 Thickness of the thin-layered elements in the solid

depth (km)	thickness of the elements (km)
0.0-0.5	0.05
0.5-1.0	0.1
1.0-2.0	0.2
2.0-4.0	0.5
4.0-15.0	1.0
15.0-25.0	2.0
25.0-75.0	5.0

固体の薄層要素の層厚は0.05 kmとする。薄層要素の層厚の設定に関しては、Olsonら<sup>10)</sup>も指摘しているような、解析結果に考慮する最大の振動数に対応したS波の波長の1/6が一つの指標である。しかし、後述のように、表面波モード振幅は固体表面から離れた深い場所では、ほとんどゼロである。すなわち、相反原理から固体表面から離れた深い場所からの影響は固体表面付近では小さい。したがって、モード合成法を基本とする本手法では、Olsonの指標で一律に媒質を細かく薄層要素分割することは得策ではない。ここでは、固体表面から離れた深い部分では粗い薄層要素分割を施すことにする。解析モデルの固体部分の薄層要素分割に関するデータをTable 1に示す。

#### (2) 固有値解析結果

数値計算においては、非対称マトリックスの固有値解析手法の選定が重要である。ここでは、文献<sup>11)</sup>に示されたソースライブラリーを用い、非対称マトリク

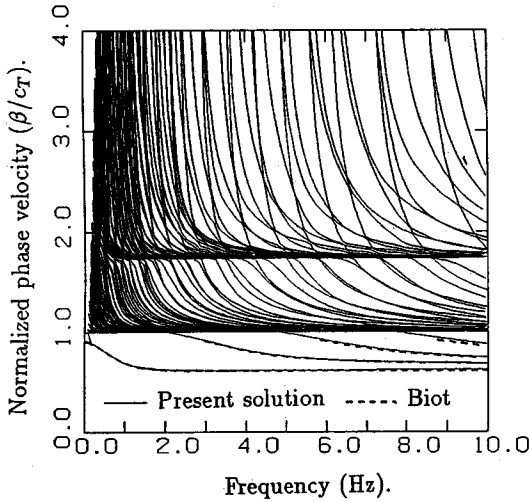


Fig. 2 Dispersion property of the normal modes.

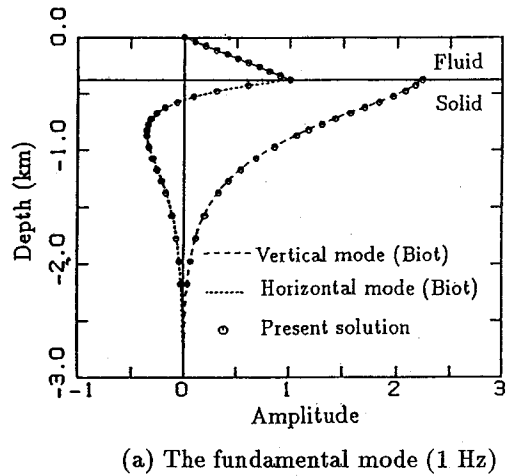
スをヘッセンベルクマトリックスに変換してから、ダブルQR法を適用する。

まず、はじめに固有値解析の精度を調べるために、固有値解析から得られた結果を用いて分散曲線を作成する。以降では議論を明確にするために、マトリックスの固有値解析で得られたモードを正規モードと呼ぶことにする。そして、正規モードのうち、Biotの特性方程式から得られるモードと関係付けられるものを表面波モードと呼ぶことにする。

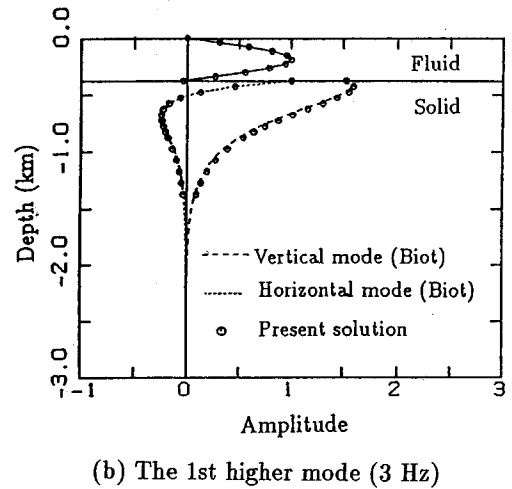
Fig. 2の分散曲線は、正規モードの位相速度と周波数の関係を示している。分散曲線に重ね書きした破線は、Biotの特性方程式から得られる表面波モードの位相速度と周波数との関係である。また、Fig. 2の位相速度は固体S波の伝播速度によって、無次元化して表示している。

正規モードは、P波とS波の位相速度の部分で重なり合い、それぞれの位相速度の部分で直線を形成している。この直線は、分散性の正規モードの重ね合わせで非分散性の実体波が合成されるメカニズムを示している。また、正規モードの一部は、S波の位相速度よりも小さな位相速度の領域に入りこむ。そして、周波数の増大とともにある一定の位相速度に収束して行く。S波の位相速度よりも小さな位相速度の領域は表面波モードが存在する領域であり、Biotの特性方程式から得られる破線も見られるようになる。

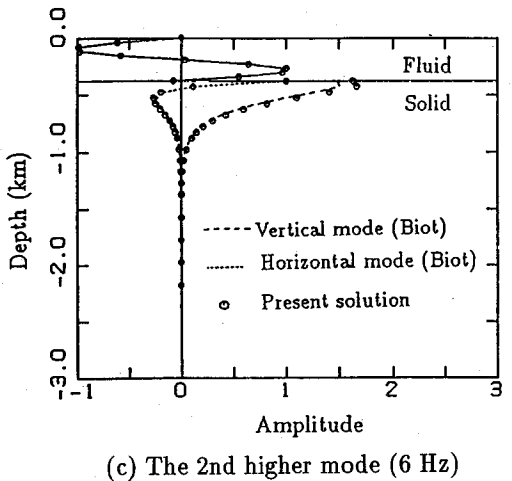
周知のように、通常の均質半無限弾性体では表面波は非分散性の1つのRayleigh波モードのみからなる。しかし、ここでは流体領域の固有振動に関連して、多数



(a) The fundamental mode (1 Hz)



(b) The 1st higher mode (3 Hz)



(c) The 2nd higher mode (6 Hz)

Fig. 3 Modal shapes for the solid-fluid system.

(可算個)の分散性の表面波モードが現れるようになる。表面波モードの中で、基本モードはBiotがStoneley波と呼んでいるように、固体表面波モードの振幅が深さ方向に指数関数的に減少するばかりでなく、振動数の高い領域では流体圧力の振幅も双曲線関数的な変動を示す。また、基本モードの位相速度は半無限弾性体のRayleigh波とStoneley波の位相速度の間を分散し、Stoneley波の位相速度は流体の音速よりも小さい。また、高次1次以上の表面波モードでは、流体の振幅は正弦的な変動を示し、位相速度は半無限弾性体のRayleigh波と流体の音速との間を分散する。

固有値解析結果に基づく分散曲線の中で、表面波モードに関するものは、Biotの特性方程式の解と良く一致している。さらに、正規モードの重ね合わせで実体波の位相速度の波動が分散曲線に明確に現れていることを考えれば、本手法によって、正規モードは正確に求められていると言える。

次に、固有値解析から得られる正規モードの形状について考察する。Biotの特性方程式から得られる基本モードから高次2次までの表面波モード形状をFig. 3に示す。これらの図では、本手法による固有値解析結果も合わせてプロットしている。固体の表面波モード形状については、固体表面での水平変位を1に正規化し、流体圧力のモード形状については、最大値を1として正規化している。

Fig. 3によれば、本手法によるモード形状と、Biotの特性方程式によるモード形状は良く一致している。また、固体表面波のモード形状は、振動数が増大するにつれ、大きな振幅が固体表面に集中してくる。Biotの与えた振動モードの解からも明かなように、振動数が増大するにつれ、深さ方向に対する振幅の減少が急激になるためである。したがって、固体-流体の連成効果は、主に低次のモードによって固体内部に伝達されることも理解できる。

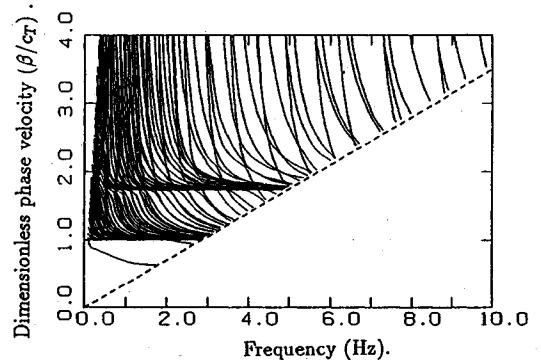
### (3) 時刻歴応答解析

固体の一点に単位階段関数で表される鉛直上向きの荷重を作用させ、時刻歴応答解析を行い、固体-流体の相互作用の効果について検討する。この時刻歴応答解析に先立ち、離散化波数の重ね合わせをどの程度行えば良いかについて、固有値解析で得られた分散曲線を用いて検討する。

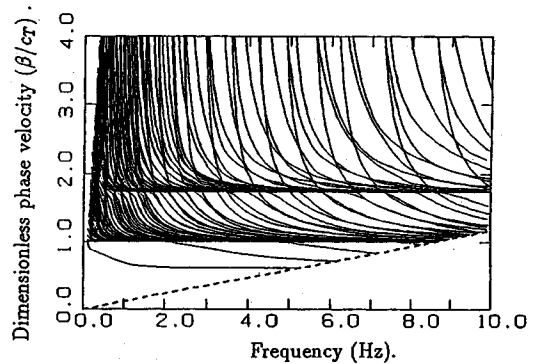
いま、重ね合わせに用いる、最大の離散化波数を $k_{max}$ とする。このとき、重ね合わせに考慮される正規モードの最小の位相速度 $\beta_{min}$ は次式で表される。

$$\beta_{min} = \frac{2\pi}{k_{max}} f \quad (26)$$

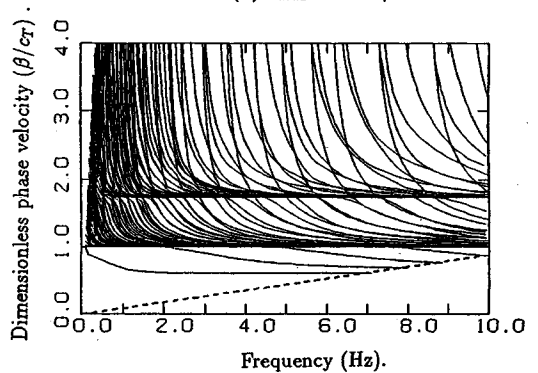
ここに、 $f$ は振動数を示す。もちろん、ここでの振動数



(a)  $k_{max} = 8.0 / \text{km}$



(b)  $k_{max} = 24.0 / \text{km}$



(c)  $k_{max} = 32.0 / \text{km}$

Fig. 4 Truncation of the normal modes due to  $k_{max}$ .

は任意に大きくとれるものでなく上限がある。そして、この上限は、解析モデルの薄層要素分割の細かさに依存してくる。しかしながら、Tabel 1に示した薄層要素分割によって、Fig. 2に示した分散曲線が得られているので、式(26)によって $f$ を10 Hz程度まで考慮し、議論することに問題はない。

式(26)は、薄層要素-離散化波数法で考慮できる $\beta_{min}$

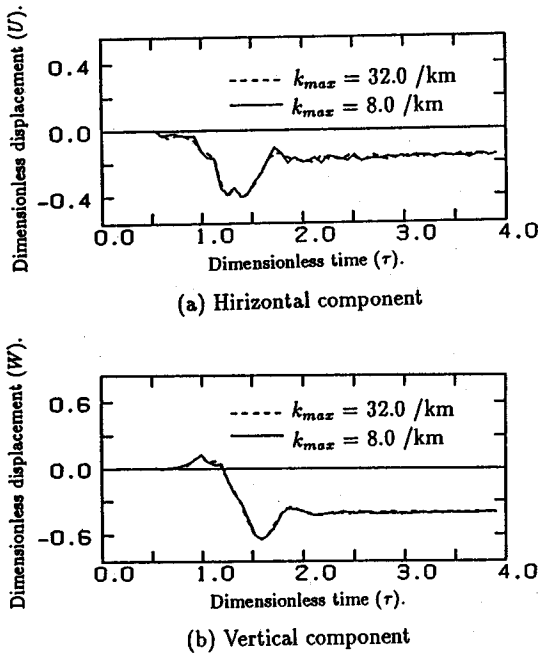


Fig. 5 Effects of  $k_{max}$  on the solid displacement.

は  $f$  の一次関数となることを示している。この関係式を分散曲線に重ね書きし、与えられた  $k_{max}$  により考慮できる正規モードを示したものが Fig. 4 である。Fig. 4 に示したように、式 (26) の直線より下の部分の正規モードは重ね合わせから除外される。

Fig. 4 では、 $k_{max}$  を 8 /km, 24 /km および 32 /km とした場合に考慮される正規モードを示している。Fig. 4 より明かなように、重ね合わせる離散化波数を増大させると、高次の表面波モードの考慮が可能になってくる。しかし、一方で高次の表面波モードを考慮するためには、最大の離散化波数を相当大きくしなければならぬことも理解できる。例えば、Fig. 4(a) と Fig. 4(b) では、 $k_{max}$  が 3 倍の違いがあるにも関わらず、Fig. 4(b) でも高次 2 次の表面波モードを十分に考慮するに至っていない。このように薄層要素離散化波数法は、高い振動数で小さな位相速度を示す表面波モードを考慮することは、あまり得意でない。

$k_{max}$  を 8 /km および 32 /km としたときの固体表面での変位時刻歴を Fig. 5 に示す。Fig. 5 では、観測点を振源からの水平距離として 5 km をとり、時刻歴の時刻および変位を次のように、無次元化している。

$$\tau = \frac{c_r t}{L}, \quad W = -\frac{\pi^2 \mu L}{3F} w, \quad U = -\frac{\pi^2 \mu L}{3F} u \quad (27)$$

ここに、 $\tau$  は無次元の時刻、 $L$  は振源と観測点の距離、

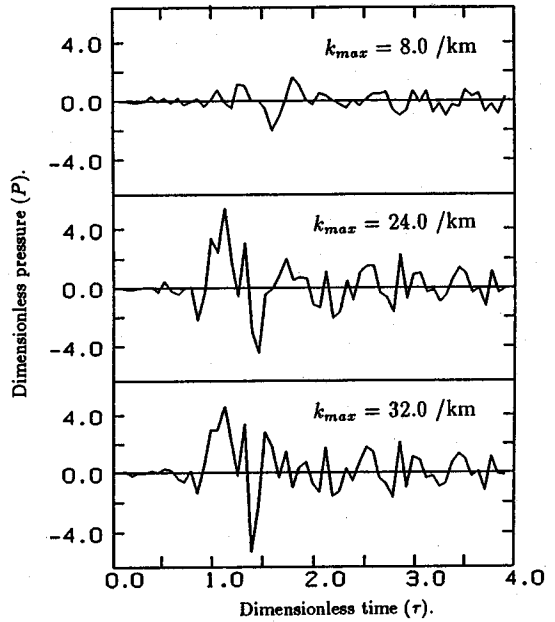


Fig. 6 Effects of  $k_{max}$  on the fluid pressure.

$W$  および  $U$  は無次元の鉛直および水平変位、 $w$  および  $u$  は実際の鉛直および水平変位、 $F$  は振源の荷重の大きさである。

Fig. 5 によれば、変位時刻歴は、 $k_{max}$  を 8 /km とすることで、すでに収束していることが示されている。言い換えれば、変位時刻歴に関しては高次の表面波モードの影響は小さい。

次に、流体圧力の時刻歴を Fig. 6 に示す。ここでは、流体圧力を次式により無次元化している。

$$P = \frac{\pi^2 L^2}{3F} p \quad (28)$$

ここに、 $P$  は無次元化された流体圧力、 $p$  は実際の流体圧力を示す。

Fig. 6 によれば、流体圧力の時刻歴は、 $k_{max}$  が 24 /km になってようやくほぼ収束を見ていることが分かる。このことは、流体圧力の時刻歴に関しては、高次モードの影響が無視できないことを示す。流体圧力の勾配は、固体-流体の相互作用方程式からも明らかかなように、固体の加速度と相互作用を行う。固体の変位ではあまり影響の少ない高次モードの影響が、流体では固体の加速度の影響で大きくなるものと言える。

なお、Fig. 5 と Fig. 6 の比較で理解できるように、圧力の時刻歴と変位の時刻歴で、値が大きく変動する時刻はほぼ共通している。固体-流体の相互作用によっ

て、固体と流体を共通の位相速度で伝播する表面波を生じ、これによって、固体と流体が同時に振動することが確認できる。

次に、流体層の固体変位時刻歴への影響を見るために、本手法で得られた解と Pekeris の解<sup>12)</sup>との比較を行う。Pekeris の解は流体層が存在しない場合の解析解を与えている。Fig. 7 および Fig. 8 にこの比較の結果を示す。これらの図では、固体P波、SP波、S波ならびに、流体層が存在しない場合のRayleigh波の到着時刻を記号P, SP, SおよびRで示している。また、Fig. 7 は、振源からの水平距離が5.0 kmの位置の固体表面の観測点での結果であり、Fig. 8の結果は、振源からの水平距離が20.0 kmの固体表面での結果である。

流体の影響を受けた弾性固体の変位時刻歴は、Pekeris の解と同様に、弾性体のP波の到着で始まる。そして、S波到着時刻に至るまで、両方の解はほぼ同様な結果を示す。このことは、流体は固体の実体波には、それほど大きな影響を与えないことを示す。

しかし、S波到着時刻を過ぎ、Rayleigh波が到着するようになると、両方の解はかなり傾向が異なってくる。Pekeris の解の特徴はS波あるいはRayleigh波到着後、直ちに永久変位に収束することである。しかし、流体の影響を受けた変位時刻歴はPekeris の解に比べるとRayleigh波の到着が遅れ、しかもRayleigh波による振動が見られる。このRayleigh波による振動の継続時間は振源からの距離が増大することで長くなる。すなわち、圧縮性流体層はRayleigh波の到達を遅らせ、Rayleigh波による振動の継続時間を引き延ばす効果を持っている。

なお、前述のように固体変位時刻歴では、高次の表面波モードの影響は小さい。したがって、これらの時刻歴で、無次元時刻 $\tau=1.6$ 以降の振動は、Stoneley波の伝播速度を考慮すると、Stoneley波の影響を受けていると考えられる。

薄層要素-離散化波数法で計算された固体の変位時刻歴は、固体P波の到着ではじまり、表面波の影響を受けた後、永久変位に収束する。そして、この永久変位の大きさは、流体層が存在しない場合の値に等しい。この性状から判断して、薄層要素-離散化波数法で計算された時刻歴は妥当なものであると考えられる。また、流体の影響により、表面波の位相速度が遅くなることは、分散曲線によっても予測できることである。そして、薄層要素-離散化波数法による時刻歴解析で定量的に評価できたものと考えられる。従来より流体の影響を付加質量で考えることも行われてきた。表面波の到達が遅れることは、付加質量の効果により振動の位相が遅れたためと理解することも可能であろう。

最後に、時刻歴応答解析において、数値計算上注意しなければならないことを述べる。式(25)にも示した

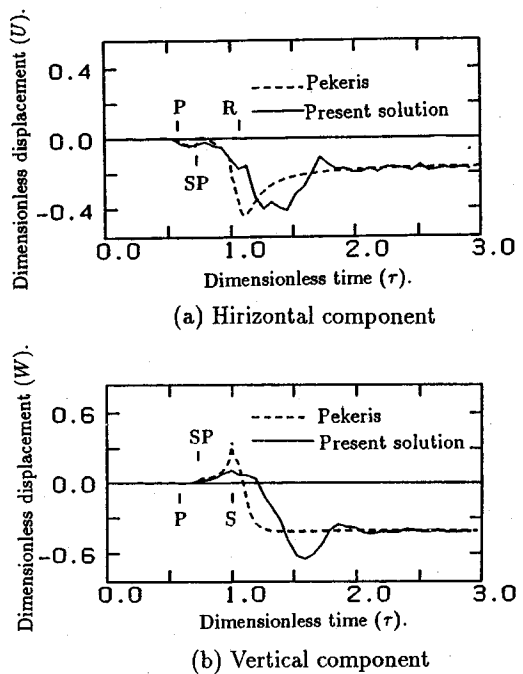


Fig. 7 Comparison of displacement.  
( $\Delta=5$  km)

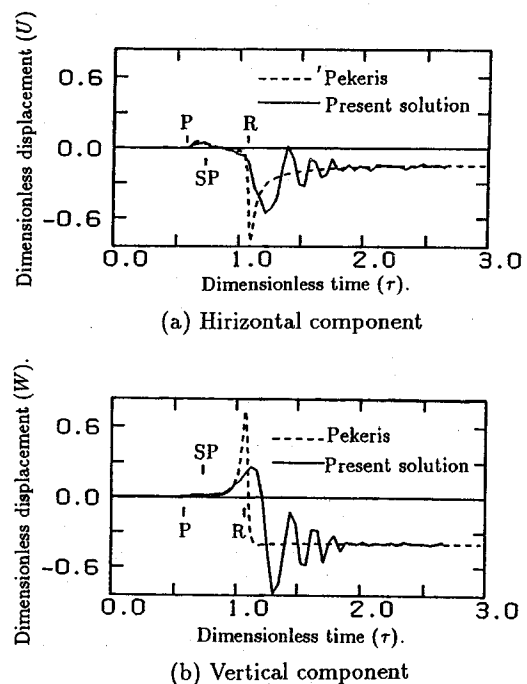


Fig. 8 Comparison of displacement.  
( $\Delta=20$  km)



ように、Green 関数を計算するためには、モーダルマトリックスの逆行列を計算する必要がある。固体-流体の相互作用の影響がモーダルマトリックスに入り込むと、たびたびモーダルマトリックスの逆行列が正確に求められないという事態に直面した。この事態は、モーダルマトリックスのスケーリングと、逆行列の計算時のピボット選択を適切に行うことで解決できた。

#### 4. 結論

本論文では、薄層要素-離散化波数法を用いて、圧縮性流体と固体が成層構造を有する媒質の動的解析手法を展開した。この手法の特徴は流体領域の支配方程式に圧力に関するスカラー場の波動方程式を用いることで、既往の研究に見られるような非正則なマトリックスの取扱いが不要になったことである。その一方で、非対称マトリックスの固有値計算を行う必要が生じるが、この計算については公開されたソフトウェアで十分対応することが可能であった。定式化ならびに数値計算結果から得られる結論を要約すると、次のようになる。

- 1) 固体-流体の相互作用を考慮した薄層要素-離散化波数法は、これまでも述べてきたように、非対称マトリックスの取扱いが必要になる。しかしながら、因果性を考慮して正規モードを重ね合わせる Green 関数の形式については、これまでの一連の研究で得られたものとはほぼ同じとなった。
- 2) 本手法により計算された表面波モードは、Biot の解析解によるものと良く一致した。また、時刻歴応答の性状も十分合理的なものである。以上のことから、本手法の妥当性は検証されたものと考えられる。
- 3) 時刻歴応答解析の結果によると、流体圧力の時刻歴は、高次の表面波モードの影響が無視できないことが分かった。この理由は、固体-流体の相互作用方程式に見られるように、固体の加速度と流体の圧力勾配が相互作用を行うことで、流体圧力は高振動数成分の影響を受け易いことによると考えられる。
- 4) 流体圧力の時刻歴に比べれば、固体の変位時刻歴は高次の表面波モードの影響をほとんど受けない。一方、固体の変位時刻歴と流体圧力の時刻歴を観察することで、固体と流体を共通の位相速度で伝播する

表面波によって、固体と流体がほぼ同時に大きく振動していることも確認できた。

- 5) 流体の影響を受けた変位時刻歴は、半無限弾性体で考えられる Rayleigh 波よりも遅い位相速度の表面波の影響を受ける。流体の影響により表面波の位相速度が遅くなることは、分散曲線によっても予測できるが、本手法により定量的に評価できたと考えられる。

謝辞： この研究は文部省科学研究費奨励研究 (A) の補助により行われました。関係各位に深く感謝致します。

#### 参考文献

- 1) 東平光生：離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No. 459/I-22，pp. 119-128，1993。
- 2) 東平光生：薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No. 465/I-23，pp. 137-144，1993。
- 3) 東平光生：3次元弾性体の表面波動の性質に関する基礎的検討，土木学会論文集，No. 483/I-26，pp. 127-136，1994。
- 4) 東平光生：薄層要素-離散化波数法による半無限弾性体の波動解析，土木学会論文集，No. 495/I-27，pp. 131-134，1994。
- 5) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.
- 6) Stoneley, R.: The effect of the ocean on Rayleigh waves, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol. 1, pp. 349-356, 1926.
- 7) Biot, M. A.: The interaction of Rayleigh and Stonley waves in the ocean bottom, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 42, pp. 81-92, 1952.
- 8) Haskell, N. A.: The dispersion of surface waves in multi layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 43, pp. 17-34, 1953.
- 9) Tan, H. H.: Displacement approach for generalized Rayleigh waves in layered solid-fluid media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 79, pp. 1251-1263, 1989.
- 10) Olson, A. H., Orcutte, J. A. and G. A. Frizer: The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol. 77, pp. 421-460, 1984.
- 11) 小国力 編：行列計算ソフトウェア，丸善，1991。
- 12) Pekeris, C. C. and H. Lifson: Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse, *J. Acous. Soc. Am.*, Vol. 29, pp. 1233-1238, 1957.

(1994. 7. 18 受付)

# THIN-LAYERED ELEMENT AND DISCRETE WAVE NUMBER METHOD FOR THE ANALYSIS OF LAYERED SOLID-FLUID MEDIA

Terumi TOUHEI

Layered solid-fluid media were analyzed by a thin-layered element and discrete wave number method. The scalar wave equation for the pressure of the fluid was employed to introduce the effect of the compressible fluid. The thin-layered element method was applied to both the elastic wave equation of solid as well as the scalar wave equation of fluid. As a result, eigen value problems of non-symmetrical matrices were derived. Green's function was calculated by superposing the eigen solutions of the non-symmetrical matrices. Several investigations were applied to the numerical solutions to examine the validity of the present method.