

収束計算を行わない動的的非線形 FEM のための 時間積分法

酒井久和¹・澤田純男²・土岐憲三³

¹正会員 若築建設株式会社 土木本部設計部 (〒153 東京都目黒区下目黒 2-23-18)

²正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学科

³正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学科

中央差分法と平均加速度法 (Newmark の β 法 ($\beta=1/4$)) の特性を利用し、非線形動的解析のための時間積分法を提案した。本手法が、調整外力の作用で生じる応答のうち、低周波数成分は中央差分法の解に近似し、高周波数成分は減衰性を示す特性を有することを理論的に説明した。解析を数例実施し、この提案法の解の安定性、精度について検証した。その結果、FEM 等の多自由度の時間積分法として有効であることが確かめられた。

Key Words : direct integration approach, non-linear analysis, finite element method, numerical stability, non-iterative scheme

1. ま え が き

振動系の時刻歴応答解析を行う場合には、運動方程式を数値積分する必要がある。現在、非線形な系の解析に用いられている時間積分法は、中央差分法、平均加速度法 (Newmark の β 法 ($\beta=1/4$))¹⁾、Wilson の θ 法²⁾ など多数の方法がある。このうち、中央差分法は、系の固有周期に対してある程度以上小さい計算時間間隔を採用すれば、高精度の解を得ることが可能である。しかし、この方法は解の安定条件が厳しく、有限要素法等の多自由度の応答計算を行う場合には、その最高次の固有周期に対しても安定条件を満たす必要があるため、計算時間間隔を非常に小さく設定しなければならず、不経済な手法となる。また、Wilson の θ 法は、線形解析の場合は無条件安定であるが、非線形解析の場合には中央差分法と同様、条件安定な手法となる³⁾。さらに、非線形の収束計算を行わなければ十分な精度を期待できないため、多自由度モデルの場合に膨大な計算時間を要する。平均加速度法は、非線形解析においても無条件安定な方法ではあるが、Wilson の θ 法と同様、非線形の収束計算を必要とするなど、どの時間積分法にも実用上の問題があるのが現状である。そして、本来、非線形な材料特性を示す地盤を含む系の応答解析においても、線形な振動系と仮定して解析が行われることが少なくないのも、上記の問題点が一因となっているものと考えられる。

このため、近年、Sun ら⁴⁾が Wilson の θ 法に運動量保存則を導入し、収束計算を行わずに高精度の結果が得られる時間積分法を提案しているが、この方法も解の安

定条件が厳しく、有限要素法など多自由度モデルの計算には適さないものとなっている。

前述のように、中央差分法は、系の固有周期に対して計算時間間隔がある程度以上小さい場合には、高精度な近似が期待でき、また、平均加速度法は、計算時間間隔によらず解が無条件安定な手法である。そこで、本論文ではこれら 2 つの方法の特性を利用することで、収束計算が不必要な高精度の時間積分法を開発した。

本論文では、まず、この提案法および既往の時間積分法の計算方法について説明し、次に、系の固有振動数が解の精度、安定性に対して及ぼす影響を理論的に明らかにする。さらに、これらを検証するために解析を数例実施し、考察を加える。

2. 計算方法

復元力が非線形である系の時刻 t における運動方程式は、次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + \{F_s(\{X(t)\})\} = \{P(t)\} \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C]$ は質量、減衰マトリクス、 $\{X(t)\}$ は節点変位ベクトル、 $\{F_s(\{X(t)\})\}$ は復元力ベクトルで、 $\{X(t)\}$ の関数、 $\{P(t)\}$ は節点外力ベクトルである。・は時間に関する微分を意味する。

ここで、復元力を Fig.1 に示すように、線形項と非線形の調整項に分けることで、式 (1) を次式で書き換える。

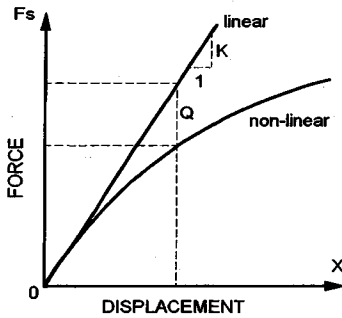


Fig.1 Non-linear stiffness

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} - \{Q(t)\} = \{P(t)\} \quad (2)$$

ここに、 $[K]$ は剛性マトリクス、 $\{Q(t)\}$ は非線形復元力の線形項との調整ベクトル（以後、調整外力と呼ぶ）で、次式で表されるような $\{X(t)\}$ の関数である。

$$\{Q(t)\} = [K]\{X(t)\} - \{F_s(\{X(t)\})\} \quad (3)$$

時間積分法は、離散化された時刻、すなわち、各タイムステップにおいて式(2)を満たすことが要求される。本論文では、この計算時間（タイムステップ）間隔 Δt を一定とする。また、 $t_k (= k\Delta t)$ は k ステップ目の時刻、 $\{X\}_k$ 、 $\{\dot{X}\}_k$ 、 $\{\ddot{X}\}_k$ はそれぞれ、節点変位、速度、加速度ベクトル、 $\{Q\}_k$ 、 $\{P\}_k$ は調整外力、節点外力ベクトルを意味する。

まず、既往の時間積分法のうち、平均加速度法に基づき、非線形の収束計算を荷重伝達法⁹⁾で行う方法（以後、繰り返し計算法と呼ぶ）、中央差分法、および前述のSunらの方法、次いで、提案法の計算方法を説明する。ただし、この章では、 $\{X\}$ は系全体の応答を、 $\{Y\}$ は調整外力の増分 ΔQ のみが作用する系の応答を表す。

(1) 繰り返し計算法

この方法は、系の時刻歴応答計算の際の時間積分を平均加速度法に基づいて行う。平均加速度法では、次に示す関係が仮定される。

$$\{\ddot{X}\}_{n+1} = \{\dot{X}\}_n + \frac{\Delta t}{2}(\{\ddot{X}\}_n + \{\ddot{X}\}_{n+1}) \quad (4)$$

$$\{\bar{X}\}_{n+1} = \{X\}_n + \Delta t\{\dot{X}\}_n + \frac{\Delta t^2}{4}(\{\ddot{X}\}_n + \{\ddot{X}\}_{n+1}) \quad (5)$$

ただし、 $\bar{\quad}$ は、後述するように、時刻 t_{n+1} における式(2)で調整外力項を $\{Q\}_{n+1}$ の代わりに $\{Q\}_n$ を用いて得られる応答ベクトルであることを示す。ここで、式(5)を $\{\ddot{X}\}_{n+1}$ について表すと、

$$\{\ddot{X}\}_{n+1} = -\{\dot{X}\}_n - \frac{4}{\Delta t}\{\dot{X}\}_n + \frac{4}{\Delta t^2}(\{\bar{X}\}_{n+1} - \{X\}_n) \quad (6)$$

となり、式(6)を式(4)に代入すると次式が得られる。

$$\{\dot{X}\}_{n+1} = -\{\dot{X}\}_n + \frac{2}{\Delta t}(\{\bar{X}\}_{n+1} - \{X\}_n) \quad (7)$$

次に、式(6)、(7)を時刻 $t=t_{n+1}$ における式(2)に代入し、 $\{\bar{X}\}_{n+1}$ について解くと次式となる。

$$\begin{aligned} \{\bar{X}\}_{n+1} = & \left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M] \right)^{-1} \left(\{P\}_{n+1} + \{Q\}_n \right. \\ & + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2}\{X\}_n + \frac{4}{\Delta t}\{\dot{X}\}_n + \{\ddot{X}\}_n \right) \\ & \left. + [C] \left(\frac{2}{\Delta t}\{\dot{X}\}_n + \{\dot{X}\}_n \right) \right) \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、式(8)の調整外力項は、式(2)を満たすためには $\{Q\}_{n+1}$ でなければならないが、 $\{\bar{X}\}_{n+1}$ を求める際には未知であるため $\{Q\}_n$ を用いている。このように、 $\bar{\quad}$ は、 $\{Q\}_{n+1}$ の代わりに $\{Q\}_n$ を用いて得られる応答ベクトルであることを示すが、応答ベクトルが式(2)を満足する場合には $\bar{\quad}$ を付加しないものとする。また、 $\{Q\}_{n+1}$ は $\{X\}_{n+1}$ により、 $\{\bar{Q}\}_{n+1}$ は $\{\bar{X}\}_{n+1}$ により式(3)で決定された調整外力ベクトルであることを示す。

繰り返し計算法では、式(8)で求められた応答変位ベクトル $\{\bar{X}\}_{n+1}$ から調整外力ベクトル $\{\bar{Q}\}_{n+1}$ を決定し、それを式(8)の $\{Q\}_n$ の所に代入する方法を繰り返すことで収束計算し、 $\{X\}_{n+1}$ および $\{Q\}_{n+1}$ を求める。

この方法は、計算精度が良く、一般に良く用いられている方法であるが、収束計算に時間がかかる欠点がある。特に、有限要素法においてジョイント要素が剥離するような場合、膨大な計算時間を要する。

(2) 中央差分法

中央差分法では、時刻 t_n における加速度、速度、変位ベクトルの間に次の関係が仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{X}\}_n &= \frac{1}{\Delta t}(\{X\}_{n+1} - \{X\}_{n-1}) \\ \{\ddot{X}\}_n &= \frac{1}{2\Delta t^2}(\{X\}_{n+1} - 2\{X\}_n + \{X\}_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、式(9)を時刻 $t=t_n$ における式(2)に代入し、 $\{X\}_{n+1}$ について解くと、次式となる。

$$\begin{aligned} \{X\}_{n+1} = & \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \right)^{-1} \left(\{P\}_n \Delta t^2 + \{Q\}_n \Delta t^2 \right. \\ & \left. - ([K] \Delta t^2 - 2[M])\{X\}_n - \left([M] - \frac{\Delta t}{2}[C] \right)\{X\}_{n-1} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

同様に、順次、各ステップの応答変位ベクトルが求められる。ただし、 $\{X\}_{-1}$ は、初期条件から逆算で、応答加速度および速度ベクトルは式(9)から求められる。

この方法は、 Δt を十分に細かくした場合に、解が高精度である反面、解の安定条件が厳しく、FEM等の多

自由度解析の場合に、その最高次の固有振動に対しても安定条件を満足する必要があるため、 Δt を必要以上に小さくしなければならず、実用的でない。

(3) Sun らの方法

この方法は、運動方程式の数値積分を Wilson の θ 法に基づいて行うため、時刻 t_n から $t_n + \tau$ の間、応答加速度および節点外力が線形に変化すると仮定する。ただし、 $\tau = \theta \Delta t$ で、 $\theta > 1.37$ である。

まず、 $t = t_n$ において、式 (2) が成立し、式中の各ベクトルは既知であるとする。このとき、 $t_n \sim t_n + \tau$ 間の応答変位の増分ベクトル $\{\Delta \bar{X}\}$ は、この間の調整外力の増分ベクトル $\{\Delta \bar{Q}\} = \{Q(t_n + \tau) - Q(t_n)\}$ を一時的に $\{0\}$ と置けば、Wilson の θ 法によって、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\Delta \bar{X}\} = & \left(\frac{6}{\tau^2} [M] + \frac{3}{\tau} [C] + [K] \right)^{-1} \left(\{P(t_n + \Delta t)\} \right. \\ & - \{P(t_n)\} + [M] \left(\frac{6}{\tau} \{\dot{X}(t_n)\} + 3 \{\ddot{X}(t_n)\} \right) \\ & \left. + [C] \left(3 \{\dot{X}(t_n)\} + \frac{\tau}{2} \{\ddot{X}(t_n)\} \right) \right) \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{\cdot}$ は、 $\{Q(t_n + \tau)\}$ を $\{Q(t_n)\}$ と置くこと、すなわち、 $\{\Delta \bar{Q}\} = \{0\}$ とすることにより得られる応答ベクトルを表し、 $\bar{\Delta}$ は時間間隔が τ に伸張していることを意味する。

さらに、式 (11) で得られた $\{\Delta \bar{X}\}$ を用いて、 τ 間の加速度の増分ベクトル $\{\Delta \ddot{X}\}$ が式 (12) で表される。

$$\{\Delta \ddot{X}\} = \frac{6}{\tau^2} \{\Delta \bar{X}\} - \frac{6}{\tau} \{\dot{X}(t_n)\} - 3 \{\ddot{X}(t_n)\} \quad (12)$$

式 (12) より、 Δt 間の加速度の増分ベクトル $\{\Delta \ddot{X}\}$ が線形補間で求められ、これを用いることで、 Δt 間の速度および変位の増分ベクトルが式 (13)、(14) で与えられる。

$$\{\Delta \dot{X}\} = \Delta t \{\ddot{X}(t_n)\} + \frac{\Delta t}{2} \{\Delta \ddot{X}\} \quad (13)$$

$$\{\Delta X\} = \Delta t \{\dot{X}(t_n)\} + \frac{\Delta t^2}{6} (3 \{\ddot{X}(t_n)\} + \{\Delta \ddot{X}\}) \quad (14)$$

また、時刻 t_{n+1} の応答ベクトルは (15)、(16) で表される。

$$\{\bar{X}(t_{n+1})\} = \{X(t_n)\} + \{\Delta X\} \quad (15)$$

$$\{\bar{\dot{X}}(t_{n+1})\} = \{\dot{X}(t_n)\} + \{\Delta \dot{X}\} \quad (16)$$

ここまでは、 $\{\Delta Q\} = \{0\}$ として計算してきたが、この段階で、 $\{\Delta Q\} \neq \{0\}$ の調整を行う。ただし、 $\{\Delta Q\}$ は式 (15) の $\{\bar{X}(t_{n+1})\}$ から決定される $\{\bar{Q}(t_{n+1})\}$ と $\{Q(t_n)\}$ の差である。ここで、通常は $\{\Delta Q\}$ が収束するまで計算を行うが、この方法では、 Δt が十分小さい場合には $\{\Delta Q\}$ が作用することによる応答変位の変化は無視できると仮定する。この仮定により、 $\{X(t_{n+1})\} =$

$\{\bar{X}(t_{n+1})\}$ となり、収束計算の必要が無くなる。また、この方法はさらに、以下の仮定も行っている。

- 系に運動量保存則が成立し、 $\{\Delta Q\}$ が Δt 間になす仕事量と系の運動量の増分が等しい。
- Δt 間に調整外力は線形に変化する。

この2つの仮定により、 $\{\Delta Q\}$ が作用することで生じる速度の増分ベクトルを $\{\Delta \dot{Y}\}$ とすると、 $\{\Delta \dot{Y}\}$ と $\{\Delta Q\}$ との間に次の関係が成立する。

$$[M] \{\Delta \dot{Y}\} = \frac{\Delta t}{2} \{\Delta Q\} \quad (17)$$

ここで、時刻 t_{n+1} の応答速度ベクトル $\{\dot{X}(t_{n+1})\}$ は式 (16) の $\{\bar{\dot{X}}(t_{n+1})\}$ と式 (17) から算定される $\{\Delta \dot{Y}\}$ の和であり、加速度ベクトルは式 (2) を満たすように逆算して求められる。

この方法は、自由度が少ない場合に精度が良いが、FEM 等の多自由度解析の場合には、高周波数成分を発散させないために、 Δt を非常に小さく設定しなければならず、実用的でない。また、この方法は上述のように、 $\{\Delta Q\}$ の影響を考慮するまでの時間積分を Wilson の θ 法 ($\beta = 1/6$, $\theta > 1.37$) に基づいているが、この手法を線形加速度法 ($\beta = 1/6$, $\theta = 1.0$)、平均加速度法 ($\beta = 1/4$, $\theta = 1.0$) にも拡張できる。このうち、平均加速度法に拡張する方法によれば、時刻 t_{n+1} における各応答ベクトルは次式で表される。

$$\begin{aligned} \{X\}_{n+1} = & \left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] \right)^{-1} \left(\{P\}_{n+1} + \{Q\}_n \right. \\ & + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2} \{X\}_n + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{X}\}_n + \{\ddot{X}\}_n \right) \\ & \left. + [C] \left(\frac{2}{\Delta t} \{X\}_n + \{\dot{X}\}_n \right) \right) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}_{n+1} = & -\{\dot{X}\}_n + \frac{2}{\Delta t} (\{X\}_{n+1} - \{X\}_n) \\ & + [M]^{-1} \{\Delta Q\} \frac{\Delta t}{2} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\ddot{X}\}_{n+1} = & [M]^{-1} (\{P\}_{n+1} + \{Q\}_{n+1} \\ & - [C] \{\dot{X}\}_{n+1} - [K] \{X\}_{n+1}) \quad (20) \end{aligned}$$

この拡張法は、後で計算例を示すが、高周波数領域の安定性が良く、FEM 等の多自由度解析においても、かなり良い結果が得られる。本論文では、さらに高周波数領域の安定性の良い時間積分法を提案する。

(4) 提案法

この手法は、まず、繰り返し計算法と同様にして、式 (6) ~ (8) で示される各応答ベクトルを計算し、調整外力の増分ベクトル $\{\Delta Q\} = \{\bar{Q}\}_{n+1} - \{Q\}_n$ を求める。ここで、本手法では、 $\{\Delta Q\}$ の収束計算を行わずに、この $\{\Delta Q\}$ に対する応答を中央差分法により求める。ただし、 $\{\bar{Q}\}_{n+1}$ は式 (8) の $\{\bar{X}\}_{n+1}$ の関数である。

まず、 $\{\Delta Q\}$ だけが外力として作用する別の振動系を想定する。この系では、初期状態（0ステップ目）で、 $\{\Delta Q\}$ が作用していないから、変位、速度、加速度は全て0である。この系に1ステップ目に $\{\Delta Q\}$ が作用する場合、このステップにおける系の運動方程式は次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{Y}\}_1 + [C]\{\dot{Y}\}_1 + [K]\{Y\}_1 = \{\Delta Q\} \quad (21)$$

ここに、 $\{Y\}$ は節点変位ベクトルである。

また、中央差分法では、加速度、速度、変位ベクトルの間に次の関係が仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{Y}\}_1 &= \frac{1}{\Delta t^2}(\{Y\}_2 - 2\{Y\}_1 + \{Y\}_0) \\ \{\dot{Y}\}_1 &= \frac{1}{2\Delta t}(\{Y\}_2 - \{Y\}_0) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、 $\{\Delta Q\}$ が作用する1つ前のステップで算定される変位ベクトル $\{Y\}_1$ および、初期変位ベクトル $\{Y\}_0$ は $\{0\}$ であることから、式(22)より各応答ベクトルは次式となる。

$$\{\ddot{Y}\}_1 = \frac{1}{\Delta t^2}\{Y\}_2 \quad \{\dot{Y}\}_1 = \frac{1}{2\Delta t}\{Y\}_2 \quad (23)$$

式(23)を式(21)に代入して、 $\{Y\}_2$ について解くと、

$$\{Y\}_2 = \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta Q\} \Delta t^2 \quad (24)$$

これを、式(23)に代入することで、応答加速度、速度ベクトルが次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{Y}\}_1 &= \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta Q\} \\ \{\dot{Y}\}_1 &= \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta Q\} \frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで、式(25)の応答加速度、速度ベクトルは $\{\Delta Q\}$ の作用するステップにおける $\{\Delta Q\}$ に対する応答であり、式(6)~(8)は $\{\Delta Q\}$ が生じるステップにおいて、その影響を考慮できていない系の応答である。したがって、これら2つの系の運動方程式を足し合わせると、式(2)を時刻 t_{n+1} において満足することになる。

以上の計算をまとめると、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \{X\}_{n+1} &= \left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M]\right)^{-1} \left(\{P\}_{n+1} + \{Q\}_n\right) \\ &\quad + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2}\{X\}_n + \frac{4}{\Delta t}\{\dot{X}\}_n + \{\ddot{X}\}_n\right) \\ &\quad + [C] \left(\frac{2}{\Delta t}\{X\}_n + \{\dot{X}\}_n\right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}_{n+1} &= -\{\dot{X}\}_n + \frac{2}{\Delta t}(\{X\}_{n+1} - \{X\}_n) \\ &\quad + \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta Q\} \frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\{\ddot{X}\}_{n+1} = -\{\ddot{X}\}_n - \frac{4}{\Delta t}\{\dot{X}\}_n + \frac{4}{\Delta t^2}(\{X\}_{n+1} - \{X\}_n)$$

$$+ \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta Q\} \quad (28)$$

ただし、左辺の各応答ベクトルは時刻 t_{n+1} において式(2)を満足していることから、 $-$ を付加していない。ここで、 $\{Y\}_1 = \{0\}$ より、 $\{X\}_{n+1}$ は $\{\bar{X}\}_{n+1}$ に、 $\{Q\}_{n+1}$ は $\{\bar{Q}\}_{n+1}$ に等しくなるため、 $\{\Delta Q\}$ は $(\{Q\}_{n+1} - \{Q\}_n)$ を表す。ただし、 $\{Q\}_{n+1}$ は $\{X\}_{n+1}$ の関数である。

この方法は、前述のSunの拡張法、 $SUN(\theta=1.0, \beta=1/4)$ と $[C]=[0]$ で、全く同一の解を与える。

3. 提案法の特性

本手法では、非線形計算時に発生する調整外力の増分の取り扱いが既存の方法と異なる。そこで、前章と同様に調整外力の増分ベクトル $\{\Delta q\}$ だけが、外力として作用する系を想定し、 $\{\Delta q\}$ が作用する次のステップにおける応答変位ベクトルを提案法と中央差分法の2方法により求め、それらを比較することで提案法の特性を明らかにする。ただし、この章では $\{X\}$ 、 $\{Y\}$ の取り扱いが2章とは異なり、それぞれ、提案法、中央差分法により求めた調整外力の増分に対する応答変位ベクトルであることを意味する。

まず、前章と同様に、初期状態（0ステップ目）で、変位、速度、加速度が全て0である系に、1ステップ目に $\{\Delta q\}$ が作用する場合、すなわち、

$$\begin{aligned} \{X\}_0 &= \{\dot{X}\}_0 = \{\ddot{X}\}_0 = \{0\}, \{P\}_0 = \{P\}_1 = \{P\}_2 = \{0\}, \\ \{Q\}_0 &= \{0\}, \{Q\}_1 = \{\Delta q\} \end{aligned} \quad (29)$$

を想定する。

提案法では、1ステップ目の応答変位、速度、加速度ベクトル、 $\{X\}_1$ 、 $\{\dot{X}\}_1$ 、 $\{\ddot{X}\}_1$ は、式(26)~(28)に $n=0$ および式(29)を代入すると、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \{X\}_1 &= \{0\} \\ \{\dot{X}\}_1 &= \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta q\} \frac{\Delta t}{2} \\ \{\ddot{X}\}_1 &= \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right)^{-1} \{\Delta q\} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

次に、2ステップ目の応答変位ベクトル $\{X\}_2$ は、式(26)に $n=1$ および式(29)、(30)を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \{X\}_2 &= \left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M]\right)^{-1} \{\Delta q\} \\ &\quad + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2}\{X\}_1 + \frac{4}{\Delta t}\{\dot{X}\}_1 + \{\ddot{X}\}_1\right) \\ &\quad + [C] \left(\frac{2}{\Delta t}\{X\}_1 + \{\dot{X}\}_1\right) \end{aligned} \quad (31)$$

さらに、上式に式(30)を代入し、 $([M] + [C]\Delta t/2)^{-1}\{\Delta q\}$ でくり出すと、 $\{X\}_2$ は次式のように表せる。

$$\{X\}_2 = \left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M] \right)^{-1}$$

$$(4[M] + \Delta t[C]) \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \right)^{-1} \Delta q \quad (32)$$

一方、中央差分法による同じ条件下での2ステップ目の応答変位ベクトルを $\{Y\}_2$ とすると、 $\{Y\}_2$ は、式(10)に $n=1$ および式(29)を代入することで、次式で与えられる。

$$\{Y\}_2 = \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \right)^{-1} \Delta q \Delta t^2 \quad (33)$$

ここで、式(32)の提案法の応答変位ベクトル $\{X\}_2$ と中央差分法の応答変位ベクトル $\{Y\}_2$ の差について議論する。そのため、 $\{Y\}_2$ を用いて、 $\{X\}_2$ を次式のように書き換える。

$$\{X\}_2 = (\Delta t^2[K] + 2\Delta t[C] + 4[M])^{-1} (4[M] + \Delta t[C]) \{Y\}_2 \quad (34)$$

ところで、この系の減衰が Rayleigh 型であるとする、固有モードの直交性を利用することで、剛性、減衰、質量マトリクスはそれぞれ次式のように正規直交化できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\phi\}^T [K] \{\phi\}_j &= \omega_j^2 \delta_{ij} \\ \{\phi\}^T [C] \{\phi\}_j &= 2h_j \omega_j \delta_{ij} \\ \{\phi\}^T [M] \{\phi\}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} (1 \leq i, j \leq N) \quad (35)$$

ここに、 $\{\phi\}_i$ 、 h_i はそれぞれ固有振動数 ω_i に対する固有ベクトル、減衰定数、 T は転置、 N は自由度の数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また、 $[\Phi]$ を固有ベクトル $\{\phi\}_i$ が i 列成分であるモーダルマトリクスとすると、式(35)を次式で書き換えることができる。

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (36)$$

ここに、 $[I]$ は単位マトリクスである。この $[\Phi]$ を用いて、式(34)を次式のように変形する。

$$\begin{aligned} \{X\}_2 &= [\Phi] \left([\Phi]^{-1} (\Delta t^2[K] + 2\Delta t[C] + 4[M])^{-1} \right. \\ &\quad \left. ([\Phi]^T)^{-1} ([\Phi]^T (4[M] + \Delta t[C]) [\Phi]) \right. \\ &\quad \left. [\Phi]^{-1} \{Y\}_2 = [\Phi] [A] [\Phi]^{-1} \{Y\}_2 \right) \quad (37) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [A] &= [A_1]^{-1} [A_2] \\ [A_1] &= [\Phi]^T (\Delta t^2[K] + 2\Delta t[C] + 4[M]) [\Phi] \\ [A_2] &= [\Phi]^T (4[M] + \Delta t[C]) [\Phi] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

上のマトリクス $[A]$ の成分は式(35)、(38)より、次式で表される。

$$A_{ij} = \frac{2h_i \omega_i \Delta t + 4}{(\omega_i^2 \Delta t^2 + 4h_i \omega_i \Delta t + 4)} \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq N) \quad (39)$$

ここに、 A_{ij} は $[A]$ の i 行 j 列の成分を示す。

ここで、式(36)を $[\Phi]^{-1}$ について解くと、

$$[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T [M] \quad (40)$$

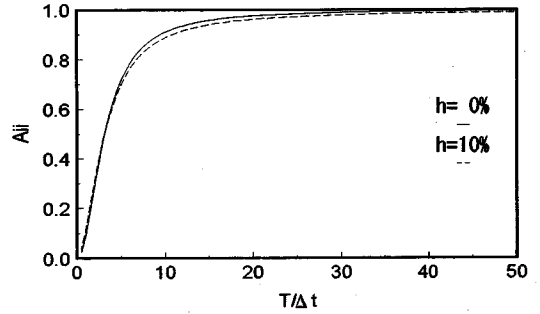


Fig.2 Relation between A_{ii} and eigen period

となり、これを式(37)に代入すると、次式となる。

$$\{X\}_2 = [B] [M] \{Y\}_2 \quad (41)$$

ここに、

$$[B] = [\Phi] [A] [\Phi]^T \quad (42)$$

この $[B]$ の成分は式(42)より、次式で表される。

$$B_{ij} = \sum_k \sum_l \Phi_{ik} A_{kl} \Phi_{lj}^T \quad (43)$$

ここに、 N は自由度の数であり、下付きの添字はそれぞれのマトリクスの行と列を示す。また、 $[A]$ は式(39)に示すように対角マトリクスであり、 $k \neq l$ では $A_{kl} = 0$ となることから、式(43)は次式のようにも表せる。

$$B_{ij} = \sum_k \Phi_{ik} A_{kk} \Phi_{kj}^T \quad (44)$$

ここで、式(43)より、 B_{ij} は $[A]$ の全成分に関与しているが、 B_{ij} のうち、 $[A]$ の n 行 n 列成分 A_{nn} が関与する項は、式(44)より、 $\Phi_{in} A_{nn} \Phi_{jn}^T$ である。この項中の、 Φ_{in} 、 Φ_{jn} はいずれも n 次の固有ベクトルの i 番目、 j 番目の成分であることから、 A_{nn} は n 次の固有ベクトルにしか影響を与えない。一方、式(39)より、 A_{ii} は高周波数モードでは0に、低周波数モードでは1に近づく。したがって、提案法は、調整外力の増分に対する応答変位のうち、低周波数成分については中央差分法の振幅に近い値を与え、高周波数成分については中央差分法より小さい応答振幅を与える特性を有することが判る。

参考のため、 A_{ii} の値と固有周期の関係を図2に示す。ただし、図中の T は振動系の固有周期を表す。

Fig.2より、 A_{ii} は $T/\Delta t$ が10で0.9程度の値をとり、それより低周波数モード側では1に漸近し、高周波数モード側では急激に0に近づくことが判る。

4. 数値解析例

提案法の解の精度および安定性を検証する目的で、数値解析を実施する。解析は弾塑性1自由度フレームモデル、1自由度自由落下-バウンドモデル、地盤-構造物系の地震応答解析モデルの3つのモデルに対し、6種類の

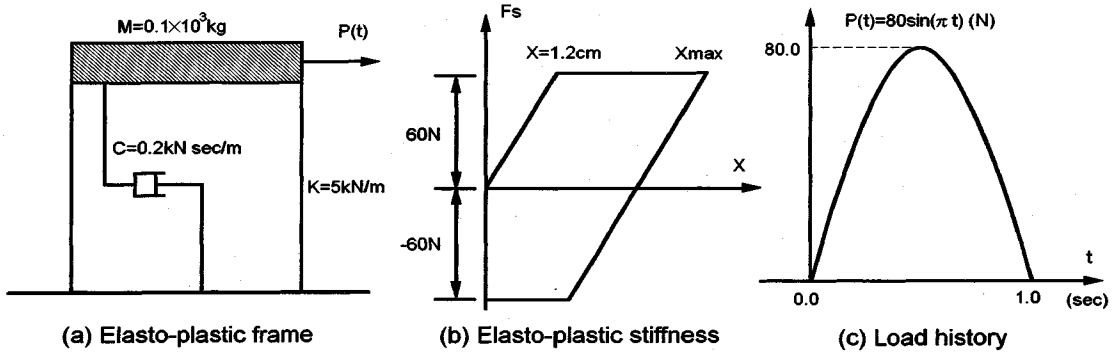


Fig.3 Elasto-plastic frame and dynamic loading (Model 1)

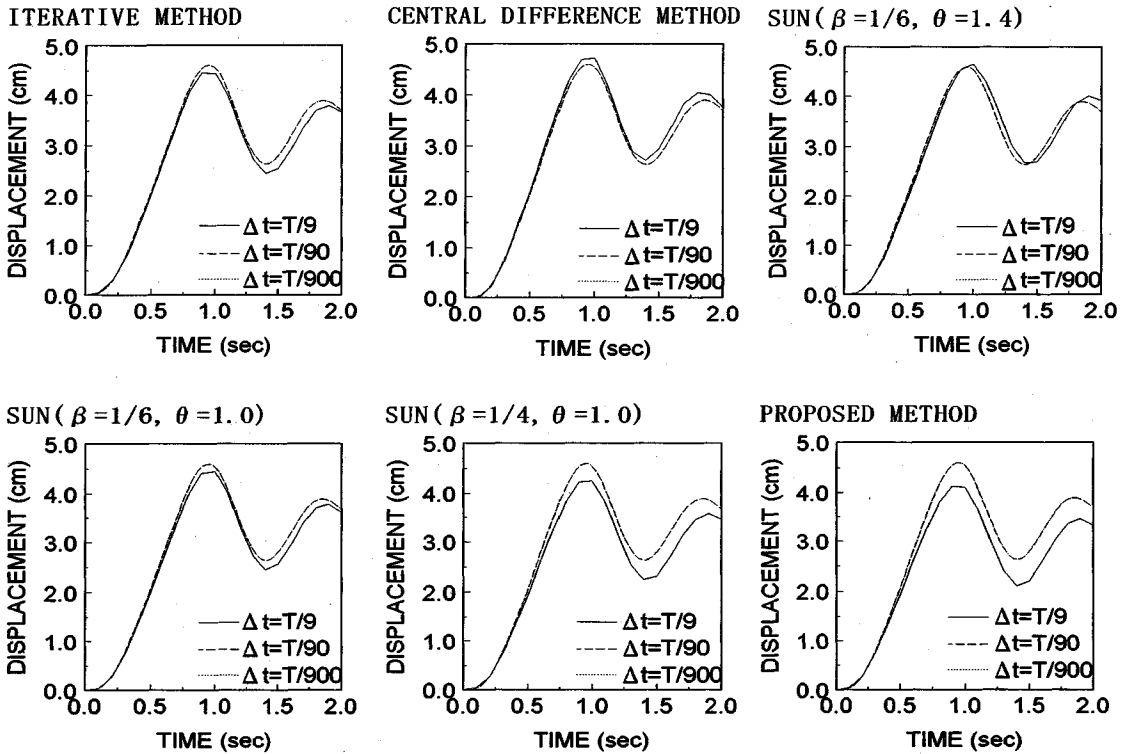


Fig.4 Displacement of elasto-plastic frame (Model 1)

時間積分法で行う。このとき、解の精度および安定性は、数値積分の計算時間間隔 Δt と系の固有周期との大小関係に左右されるため、本研究では、それぞれの解析例について、数種類の Δt で解析を行う。

この章では、まず、計算に用いた 6 種類の時間積分法を示し、次に、解析モデルの説明および結果と考察を示す。ただし、 Δt は解析結果の図中に表示し、 T は系の固有周期を表す。

解析に用いる時間積分法は、次に示す 6 種類の時間積分法で行う。

① 繰り返し計算法 (ITERATIVE METHOD)

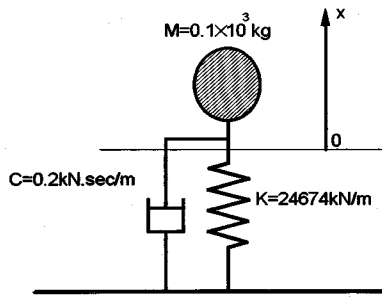
② 中央差分法 (CENTRAL DIFFERENCE METHOD)

③ Sun らの方法⁴⁾ (SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.4$) または SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.38$))

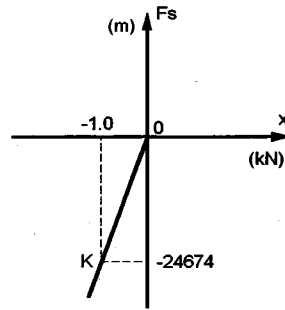
④ Sun の拡張法 (線形加速度法) (SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.0$))

⑤ Sun の拡張法 (平均加速度法) (SUN($\beta=1/4$, $\theta=1.0$))

⑥ 提案法 (PROPOSED METHOD)



(a) Single-degree-of-freedom free-fall and bound model



(b) Elasto-plastic stiffness

Fig.5 Single-degree-of-freedom of free-fall and bound model (Model 2)

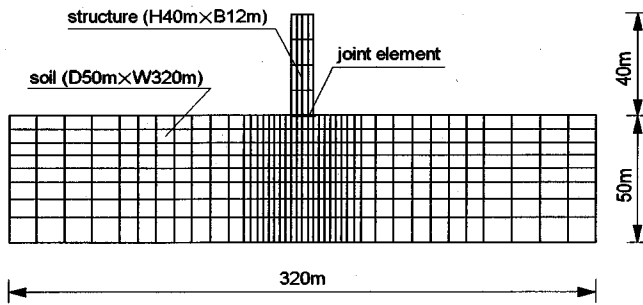


Fig.7 Finite element mesh of dynamic soil-structure interaction system (Model 3)

Table 1 Physical properties of system

	Soil	Structure	Joint
Unit weight ($\times 9.8 \text{ kN/m}^3$)	1.8	2.3	$k_s=49$ (GN/m)
Shear wave velocity (m/s)	286	2000	$k_n=49$ (GN/m)
Poisson's ratio	0.30	0.16	
Damping factor	0.08	0.05	
Friction angle($^\circ$)	36		24
Cohesion (kN/m^2)	0		0

(1) 弾塑性1自由度フレーム⁴⁾

a) 解析モデル

Fig.3 (a) に解析の対象とする弾塑性1自由度モデルとその材料特性を示す。質点は水平方向のみに自由度を持ち、バネの復元力特性は Fig.3 (b) に示す完全弾塑性性である。ただし、復元力が弾性を示す場合の固有周期は0.9秒である。

b) 解析結果と考察

Fig.3 (c) の動的荷重を作用させた場合の応答解析を行う。解析時間は2秒間とし、質点の応答変位を Fig.4 に示す。

Fig.4 によれば、 Δt が $T/90$ 、 $T/900$ の場合には、6種類ほどの積分方法でも、応答変位は精度良く近似されており、精度面で積分方法の差は見られない。しかし、 Δt が $T/9$ の場合には、CENTRAL DIFFERENCE METHOD, SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.4$), SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.0$) の3方法が依然、良い近似を行っているのに対し、SUN($\beta=1/4$, $\theta=1.0$), PROPOSED METHOD の2方法はその応答変位がやや、低く抑えられている。

(2) 1自由度自由落下-バウンドモデル

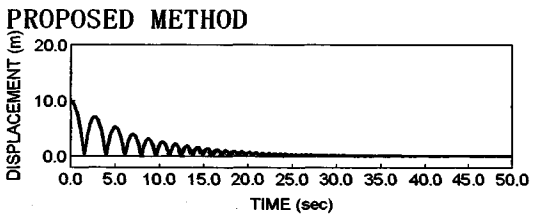
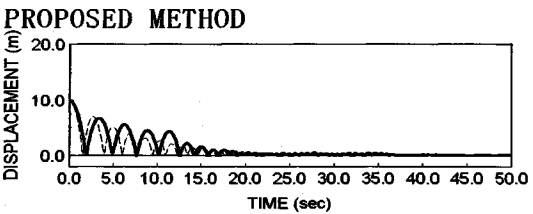
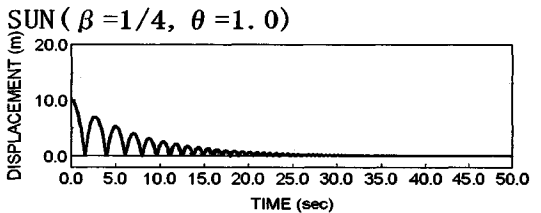
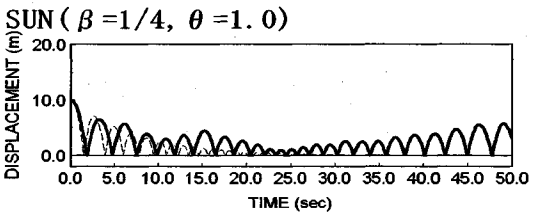
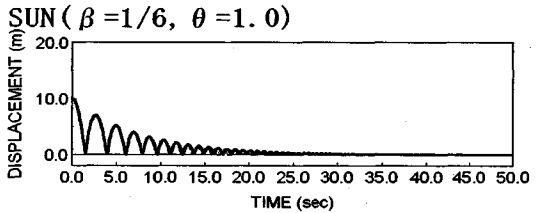
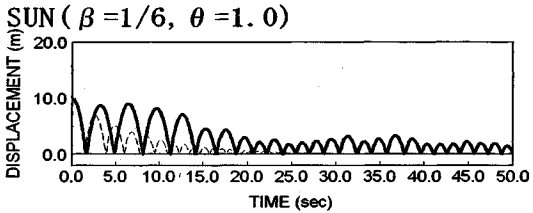
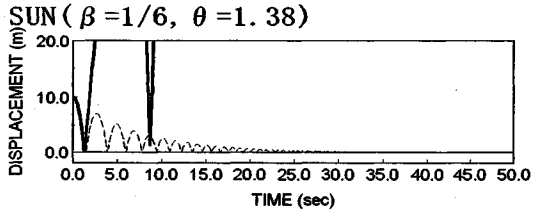
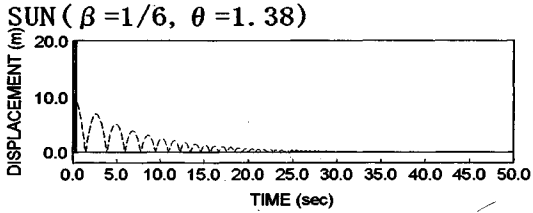
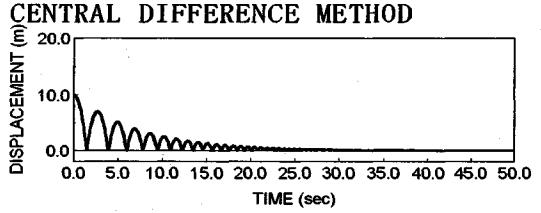
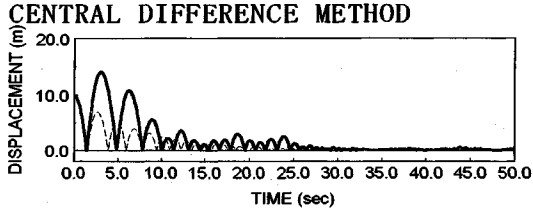
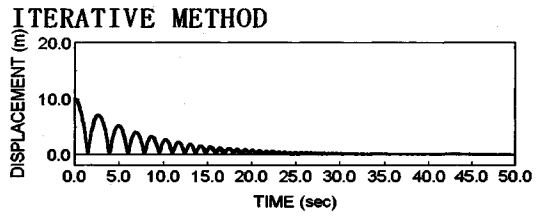
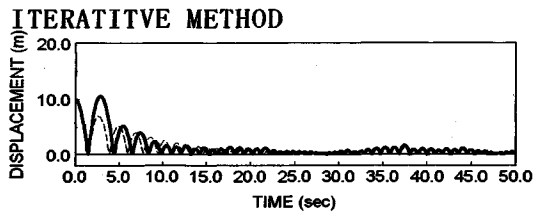
a) 解析モデル

重力加速度 $g (=9.8 \text{ m/sec}^2)$ が作用する場において、質点が自由落下し、ある境界線でバウンドする状態を想定する。振動系は Fig.5 (a) に示す材料特性をもつ、ダンパー、バネで支持される質点が、鉛直方向にのみ自由度を持つものとする。外力として、重力 (Mg) が鉛直下向きに常に作用し、バネの復元力特性は、Fig.5 (b) の弾性-完全塑性を示す。ただし、 $x \leq 0$ の場合の系の固有周期は0.04秒である。

b) 解析結果と考察

初期状態が $x_0=10 \text{ m}$, $\dot{x}_0=0 \text{ m/sec}$, $\ddot{x}_0=0 \text{ m/sec}^2$ である場合の応答を解析する。解析時間を50秒間として、質点の応答変位を Fig.6 に示す。また、図中には比較のため、 Δt が $T/32$ の場合の ITERATIVE METHOD の応答変位を破線で示す。

Fig.6 によれば、 Δt が $T/16$ の場合には、SUN($\beta=1/6$, $\theta=1.38$) は解が発散しているが、それ以外の計算法は精度の良い近似を行っている。しかし、 Δt が $T/4$ の場合には、PROPOSED METHOD の解は長周期化するが、安定しているのに対し、その他の計算法では、解が発散しないまでも応答が不安定な状態にある。



(a) $\Delta t=T/4$ (1/100 sec)

(b) $\Delta t=T/16$ (1/400 sec)

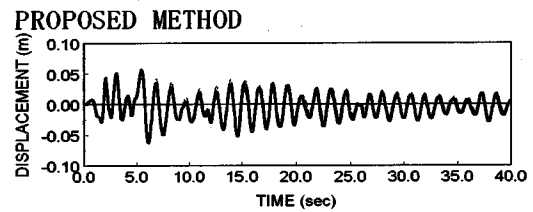
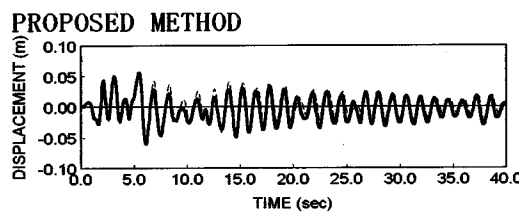
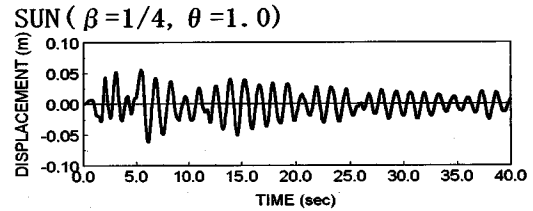
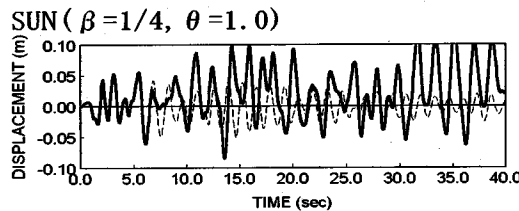
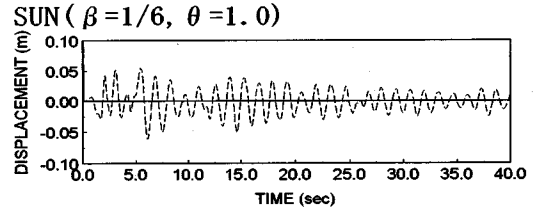
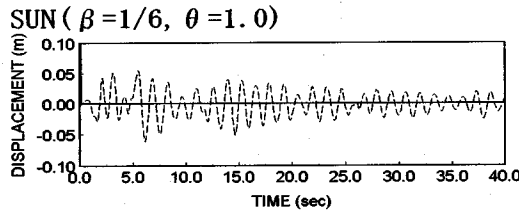
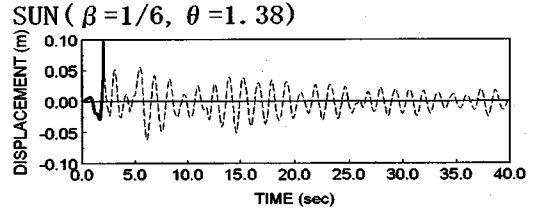
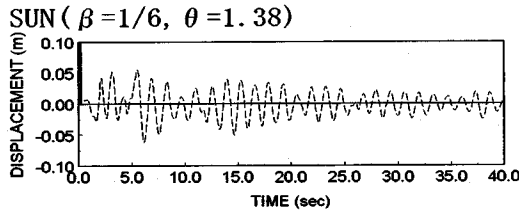
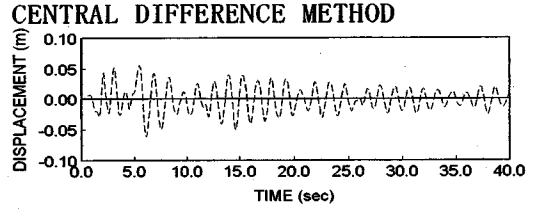
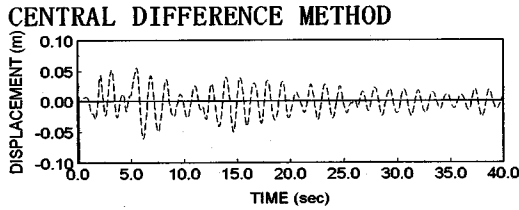
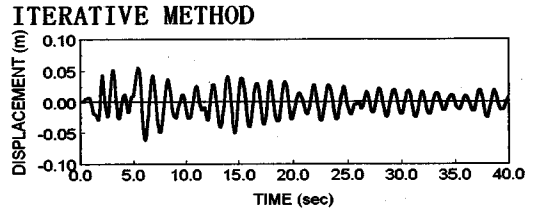
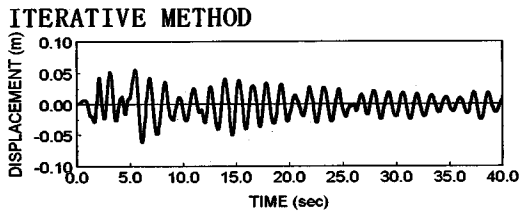
Fig.6 Calculate displacement of mass (Model 2)

(3) 地盤-構造物系の地震応答解析

a) 解析モデル

幅 320 m, 深さ 50 m の広がりをもつ等方均質な地盤上に、高さ 40 m, 幅 12 m の構造物基礎が設置されている

モデルを Fig.7 に示す。この解析では有限要素法を用いて、地盤の材料非線形性、系の構造的な非線形性を考慮した平面ひずみ問題として取り扱う。系の構造的な非線形性については、構造物と地盤（地表面）との間にジョイント要



(a) $\Delta t=1/200$ (sec)

(b) $\Delta t=1/1,000$ (sec)

Fig.8 Horizontal displacement of structure at the center of gravity (Model 3)

素⁶⁾を配置し、構造物・地盤間の剝離、滑動現象を表現する。ジョイント要素の構成関係において、せん断特性は完全弾塑性体としての挙動を示し、破壊条件はMohr-Coulombの降伏条件に従うと仮定する。

一方、地盤の非線形性は地盤を弾性-完全塑性体とし、破壊規準をMohr-Coulombの破壊規準に従うと仮定する。

地盤および構造物の材料定数をTable 1に示す。ただ

し、この系の1次の固有周期は1.3秒で、最高次の固有周期は 7×10^{-4} 秒である。

b) 解析結果と考察

本解析例では、El Centro (1940) のNS成分を最大加速度 200 gal に調整したものを水平方向の入力地震波として基盤面に入射する。解析は、 Δt を 1/1,000, 1/200 秒で、継続時間を 40 秒間とする。構造物重心位置における水平方向の応答変位を Fig.8 に示す。また、図中には比較のため、 Δt が 1/10,000 秒の場合の ITERATIVE METHOD の応答変位を破線で示す。

Fig.8 より、SUN ($\beta = 1/4$, $\theta = 1.0$) は Δt が 1/1,000 秒の場合には、高精度の近似が行えるが、 Δt が 1/200 秒になると解が不安定になる。しかし、PROPOSED METHOD は Δt が 1/200 秒でも、依然として精度の良い近似が行えている。ちなみに、 Δt が 1/10,000 秒の場合には、全ての計算方法が高精度の解を与えるが、 Δt が大きくなると、1/2,000 秒で SUN ($\beta = 1/6$, $\theta = 1.38$), SUN ($\beta = 1/6$, $\theta = 1.0$) が、1/1,000 秒では CENTRAL DIFFERENCE METHOD が、解の発散を起こしている。また、計算に要する時間は ITERATIVE METHOD では、収束条件により、大きく異なるが、本解析では節点力増分の誤差が 9.8×10^{-8} kN 以下という収束条件を設定し、計算を行っている。この場合、 Δt が 1/1,000 秒で、ITERATIVE METHOD では他の計算法の約 15 倍、1/200 秒で、約 70 倍の計算時間を要する。

以上、3つの解析例より、SUN ($\beta = 1/6$, $\theta = 1.4$ or $\theta = 1.38$) は、Fig.4 で比較的大きい Δt の場合にも高精度の近似となっていることから、安定条件を満たせば精度の良い解析結果が期待できる。しかし、その他2つの解析例では、発散傾向が他の計算法に比べて強いことから、剥離、滑動等が起こり、それにより急激な調整外力の変化が生じるような系の解析には不適であると考えられる。また、CENTRAL DIFFERENCE METHOD や SUN ($\beta = 1/6$, $\theta = 1.0$) は、 Δt が解の安定条件を満たす場合には、高精度の近似が期待できるが、有限要素法等の多自由度の応答解析を行う場合には、 Δt が結果として必要のない高次モードに対しても安定条件を満たす必要があることから、 Δt を必要以上に小さくとらなければならない、不経済な手法となる。そして、SUN ($\beta = 1/4$, $\theta = 1.0$) は、安定条件が上述の3つの積分法ほど厳しくなく、Fig.8 に示すように Δt が 1/1,000 秒の場合には、精度の良い解が得られている。しかし、 Δt が 1/200 秒とさらに大きくなると解の安定性が悪くなる。最後に、PROPOSED METHOD は、 Δt が 1/200 秒でも精度の良い近似が行えており、Fig.6 からも、最も安定性が良いことが判る。

5. ま と め

現在、非線形な系の時刻歴応答解析に用いられている時間積分法は多数あるが、解の安定条件が厳しかったり、収束計算を行わなければ充分な解の精度が期待できないなど、どの時間積分法にも実用上の問題があるのが現状である。そこで、本研究では、まず、Sun の方法を平均加速度法に拡張し、この拡張法が多自由度解析においてもかなり良い結果を与えることを示した。さらに、本論文では、中央差分法と平均加速度法の特徴、すなわち、解の精度の高さと無条件安定性を利用した動的非線形 FEM のための時間積分法を提案した。この提案法は、主な数値積分を平均加速度法に基づいて行い、復元力が非線形のために生じる調整外力増分に対する系の応答を中央差分法で求め、これを線形応答に加える方法である。この手法によれば、収束計算の必要がなく、これまでの時間積分法に比べ大幅に計算時間を短縮できる。さらに、本論文では、提案手法と中央差分法の応答を比較することで、本手法がこの増分による応答の低周波数成分は中央差分法の値にほぼ一致し、高周波数成分は減衰が大きくなる特性を有することを示した。また、解の精度と安定性について検証するため、3つの非線形モデルに対する数値解析を行った。その結果、1自由度解析の場合に解の安定性が良く、計算時間間隔を系の固有周期に対して、ある程度小さくすれば高精度の解が得られること、また、多自由度解析の場合に計算時間間隔が系の最短の固有周期より大きい場合にも解が発散することなく、低次のモードを精度良く近似できることが確かめられた。したがって、本手法は有限要素法などの多自由度の非線形解析の時間積分法として有効であると考えられる。

参考文献

- 1) N.M. Newmark : A method of computation for structural dynamics, *J.eng.mech. div. ASCE 85(EM 3)*, pp.67-94, 1959.
- 2) K.J. Bathe and E.L. Wilson : Stability and accuracy analysis of direct integration methods, *Earthquake eng. struct. dyn.* 1, pp.283-291, 1973.
- 3) A.F.D' Souza and V.K. Garg : *Advanced dynamics, modeling and Analysis*, Prentice-Hall, pp.213-227, 1984.
- 4) K. Sun and J.A. Pires : A post-correction integration for non-linear dynamic analysis of structures, *Earthquake eng. struct. dyn.* 20, pp.1083-1097, 1991.
- 5) 土岐憲三, 三浦房紀 : 地盤-構造物系の非線形地震応答解析, 土木学会論文集, 第 317, pp. 61-68, 1986
- 6) 土岐憲三, 三浦房紀 : 非線形有限要素法による断層運動と地震波動の生成, 第 1 回地盤工学における数値解析シンポジウム論文集, 日科技連, pp.163-170, 1986.

(1994. 7. 13 受付)

NON-ITERATIVE COMPUTATION SCHEME FOR NONLINEAR DYNAMIC FINITE ELEMENT METHOD

Hisakazu SAKAI, Sumio SAWADA and Kenzo TOKI

A direct integration scheme to compute dynamic response of structure with nonlinear stiffness property is proposed. This method utilizes and combines the advantage of the Central Difference Method in accuracy and that of the Averaged Acceleration Method in unconditional stability, which does not require the iterative calculations. Numerical analyses are conducted to examine the usefulness and validity of the proposed method in nonlinear dynamic response analyses using Finite Element Method. The proposed method is stable in calculation due to the high damping property in higher frequency range and the high accuracy in lower frequency range.