

# 2次元 FEM を用いた確率論に基づく 逆解析の定式化とその解法

吉田郁政<sup>1</sup>・豊田耕一<sup>2</sup>・星谷 勝<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 東電設計株式会社 地中線土木部課長 (〒110 東京都台東区東上野 3-3-3)

<sup>2</sup>正会員 東電設計株式会社 耐震技術部

<sup>3</sup>正会員 武蔵工業大学教授 土木工学科

未知量が正規分布あるいは対数正規分布に従う場合の、確率論に基づく逆解析の定式化の工夫を示した。既往の研究と同じ問題を解き提案方法の有効性を示した。逆解析によって真値に収束させるためには所定の観測精度が必要であることを指摘し、観測量の精度、分解能と逆解析による推定精度の関係を定量的に評価できることを示した。また、収束回数よりも全体の計算時間に注目した、逆解析のための効率的な計算アルゴリズムを提案し、数値計算例を通してその有効性を示した。

**Key Words** : probabilistic back analysis, observation error, estimation error

## 1. はじめに

地盤工学における逆解析の需要は増加しており、実際の現場における施工の安全管理、情報化施工に逆解析が使われた例も報告されている<sup>1),2)</sup>。実際の施工時の計測データだけでなく、室内試験の結果の解釈などにも逆解析は有効であろう。これまでに多くの逆解析手法が提案されており、それらは、確定論に基づく方法<sup>たとえば3),4)</sup>と確率論に基づく方法<sup>たとえば5)-7)</sup>に分類されている。著者らは確率論に基づく逆解析の意味について論じ、EK-WGI法<sup>8)</sup>など拡張カルマンフィルターを用いた方法との関係を明らかにした<sup>9)</sup>。また、弾性床上の梁についての逆解析を行い、逆解析による推定値やそれを用いた順解析結果の信頼性を定量的に評価できることを示した<sup>10)</sup>。本研究ではそれらを踏まえ、2次元 FEM を用いた確率論に基づく逆解析手法の開発を行った。

逆解析を行う上での大きな問題は目的関数の設定とその解法である。目的関数の設定を考えることは、それによって最小点すなわち推定値が決まるので、最もよい推定値とは何かを考える問題となる。一方、解法の問題は、その推定値をいかに効率よく安定して求めることができるかを考えることになる。既往の研究の大部分では目的関数を観測量と計算値の残差二乗和としている。また、その数値シミュレーションでは順解析で求めた変位をそのまま観測量とすることが多く、誤差を与えていないので真値が目的関数の最小点を与える問題となっている。拡張カルマンフィルターを用いた多くの研究でも結果的

には残差二乗和が目的関数になっている場合が多い。開発した手法では、目的関数の設定はこれまでの報告<sup>9),10)</sup>と同様に確率論に従って行っており、その解法は基本的には Marquardt 法を用いている。当手法を 2次元 FEM を用いた逆解析に適用した場合の有効性を確認するため、他の逆解析手法との収束性の比較を行うと共に、観測量誤差が推定値の誤差に与える影響についても考察を行う。さらに、逆解析における計算効率も収束回数よりも計算時間が重要であることに注目して、Marquardt 法を基にしたより効率的なアルゴリズムの提案を行う。

## 2. 逆解析の定式化

観測を行う以前の未知量の平均  $\bar{x}$ 、共分散マトリックス  $M$  (事前情報) が与えられると仮定する。また、観測情報は次の形で与えられるとする。

$$z = H(x) + v \quad (1)$$

ここで、 $x$ : 未知量ベクトル

$z$ : 観測量ベクトル

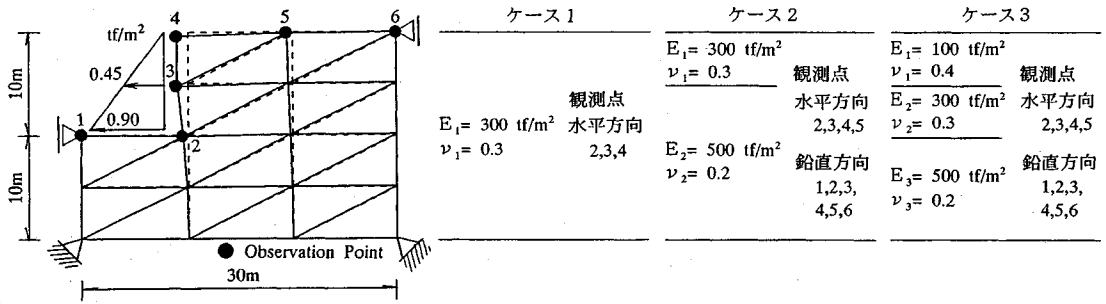
$H(x)$ : 観測量に対応する計算値ベクトル

$v$ : 観測量誤差のベクトル

この時の最適な推定値  $\hat{x}$  は、観測量  $z$  が与えられた時の  $x$  の確率密度関数  $P(x/z)$  を最大にすると考えられる。 $P(x/z)$  はベイズの定理より次式で求められる。

$$P(x/z) = P(x)P(z/x)/P(z) \quad (2)$$

$P(x)$  は平均  $\bar{x}$ 、共分散マトリックス  $M$  に従う正規分布、 $P(z/x)$  も平均  $H(x)$ 、共分散マトリックス  $R$  に従う正



図一 FEM モデルと未知量および観測点

規分布であると考えると、次式で求められる。

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{M}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (3)$$

$$P(\mathbf{z}/\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{H}(\mathbf{x}))\right\} \quad (4)$$

ここで、 $n$  : 未知量ベクトルの大きさ  
 $m$  : 観測量ベクトルの大きさ

$P(\mathbf{z})$  は正規分布とは限らないが  $\mathbf{x}$  に無関係であることから、 $P(\mathbf{x}/\mathbf{z})$  を最大にする  $\mathbf{x}$  は次の目的関数  $J$  を最小化することが導かれる<sup>11)</sup>。

$$J = \{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{z}-\mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{H}(\mathbf{x}))\} / 2 \quad (5)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{x}}$  : 未知量の事前の平均値ベクトル  
 $\mathbf{M}$  : 未知量の事前の共分散マトリックス  
 $\mathbf{R}$  : 観測量誤差の共分散マトリックス

式(5)を誘導する際に、未知量と観測量誤差は正規分布に従い両者は独立であることを仮定している。以上は文献9)で議論した内容の要約である。

この目的関数の最小化問題は通常、最適化手法あるいは非線形最小二乗法と呼ばれる共役勾配法、DFP法、Powell法などの多数の方法<sup>12)</sup>で解くことができる。ここでは、式(5)に示した目的関数についてのMarquardt法<sup>13)</sup>による解法を示す。式(6)(7)を $\mathbf{x}$ が収束するまで繰り返すことによって、目的関数の最小点(正確には極小点)を求めることができる。

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{P}_{xi} \{ \mathbf{H}_{xi}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)) + \mathbf{M}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{x}_i) \} \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_{xi} = (\mathbf{H}_{xi}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{xi} + \mathbf{M}^{-1} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{H}_{xi} = \partial \mathbf{H}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{H}_{xi}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_{xi} + \mathbf{M}^{-1})$$

$\text{diag}(\mathbf{A})$  は、行列  $\mathbf{A}$  の対角成分のみから成る対角行列

を表す。また、 $\lambda$ の項は安定化のための項であり、非線形性の強さに応じて変化させる。目的関数が減少するかどうかを非線形性の目安と考え、各イタレーションにおいて目的関数が減少するまで $\lambda$ を10倍する。目的関数を減少させることができたなら、 $\lambda$ を1/10倍して次のイタレーションでの値とし、 $\lambda$ が0.001以下になった場合は0.0とおくことにする。 $\lambda=0.0$ に対して目的関数が増加する場合には $\lambda=0.001$ から上記手順に従って計算を行う。なお、初期値は $\lambda=0.0$ とした。収束値に対する $\mathbf{P}_{xi}$ は(ただし、式(7)において $\lambda=0$ とする) $\mathbf{x}$ の事後の共分散マトリックスを近似的に表している。

上記手法を2次元FEMを用いた逆解析に適用した。未知量については次のようなスケールを行った。推定を行うパラメタは例としてソリッド要素のヤング率 $E$ 、ポアソン比 $\nu$ を考える。 $E$ や $\nu$ が正規分布に従う場合はそのまま未知量としてもよいが、未知量ベクトル $\mathbf{x}$ の中に $E$ と何桁も大きさが異なる $\nu$ が混在することとなる。また、同じ種類のパラメタであっても、弱層や構造物を含む地盤モデルでは何桁も大きさが異なる場合がある。これは、数値計算上不利であり、大きさをそろえるような変換(スケール)が好ましいとされている<sup>14)</sup>。そこで $E$ 、 $\nu$ が正規分布に従う場合は、未知量 $\mathbf{x}$ を次の関係を有するように設定する。

$$E = \mu_E + \sigma_E x_1 \quad (8)$$

$$\nu = \mu_\nu + \sigma_\nu x_2 \quad (9)$$

ここで、 $\mu$ 、 $\sigma$  : 事前情報の平均と標準偏差  
 $E$ 、 $\nu$  が対数正規分布に従う場合は次のように設定する。

$$E = \lambda_E \exp(\xi_E x_1) \quad (10)$$

$$\nu = \lambda_\nu \exp(\xi_\nu x_2) \quad (11)$$

ここで、 $\lambda$ 、 $\xi$  : 事前情報の中央値と対数標準偏差  
 この場合、未知量 $\mathbf{x}$ は正規分布に従い、その事前情報は全て、平均0.0、標準偏差1.0となる。

次に観測量について示す。実際の問題では絶対変位が観測されることは考えられず、必ずある基準点に対する相対変位あるいは距離の増分が観測されるので、観測量

は任意の2点間の水平方向、鉛直方向の相対変位あるいはその距離の増分とした。距離増分とは2点間の距離の伸び量あるいは縮み量のことである。変形に関する情報は含まない。座標  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  でそれぞれ  $(u_{x1}, u_{y1})$ ,  $(u_{x2}, u_{y2})$  の変形が生じたときの水平方向相対変位  $z_1$ 、鉛直方向相対変位  $z_2$ 、距離増分  $z_3$  は次式で与えられる。

$$z_1 = u_{x1} - u_{x2} \quad (12)$$

$$z_2 = u_{y1} - u_{y2} \quad (13)$$

$$z_3 = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} - \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \quad (14)$$

ここで、 $D_x = x_1 + u_{x1} - x_2 - u_{x2}$

$$D_y = y_1 + u_{y1} - y_2 - u_{y2}$$

$$d_x = x_1 - x_2$$

$$d_y = y_1 - y_2$$

また、実際の問題への適用を考えると節点上でしか観測量を扱えないのは不便なので、内挿関数を用いることにより節点に限らず任意点で観測量を扱えるようにした。

### 3. 逆解析の収束性と精度

簡易な2次元FEMモデルを用いた逆解析手法の比較がK. Araiら<sup>15)</sup>、村上ら<sup>16)</sup>によって報告されている。提案した手法の検証を行う目的で、同じモデル、条件で逆解析を行った。未知量と観測量の組み合わせに関して3ケースを考え、検討に用いたFEMモデルと各ケースの未知量と観測点の組み合わせを図-1に示す。観測量は順解析によって求められた節点変位をそのまま用いており、特に観測量誤差は加えていない。逆解析に用いた観測量を表-1に示す。有効桁数を十分にとり、6桁までの値を入力値とした。後述するように、観測量の精度は逆解析による推定値に大きな影響を与える。村上による逆解析手法の比較の図<sup>16)</sup>に、著者の提案する逆解析の結果も加えて図-2, 3, 4に示す。この時、未知量は正規分布に従うとして計算を行った。また、同じ条件とするため、事前情報の分散を十分大きくした。図-2, 3, 4の比較によると、提案した逆解析手法は良好に真値に収束している。ここでは、逆解析結果の考察点として収束の速さ(収束性)と推定値(収束値)の精度について考える。収束の速さは目的関数の最小化のための解法の問題であり、推定値の精度は観測量のもつ独立性や誤差に関わる問題である。まず、収束性について考察する。最小化のための解法は多くの方法が提案されており、文献<sup>17)</sup>では問題によって適用性は異なるので一般的な比較は困難であるとしながらも、DFP法、共役勾配法、Gauss-Newton法(Marquardt法)、Biggs法などの比較を行っている。その中で、逆解析の解法を考える上で重要と思われる指摘がいくつかされている。

表-1 観測量

観測点	1	2	3	4	5	6
水平方向	—	-2.15967 $\times 10^2$	-1.78979 $\times 10^2$	-5.98722 $\times 10^1$	-9.58617 $\times 10^1$	—
鉛直方向	-7.37312 $\times 10^1$	-9.48223 $\times 10^1$	-5.42959 $\times 10^1$	-1.55747 $\times 10^1$	-3.26333 $\times 10^1$	-6.43000

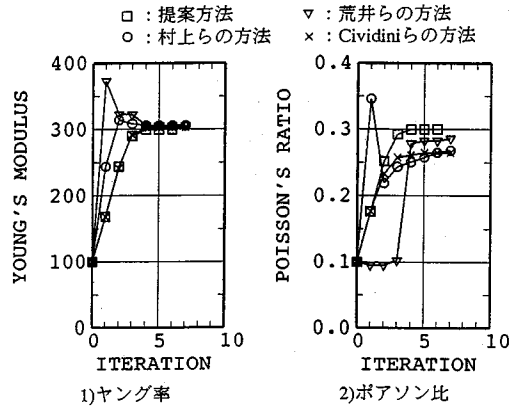


図-2 ケース1の収束過程

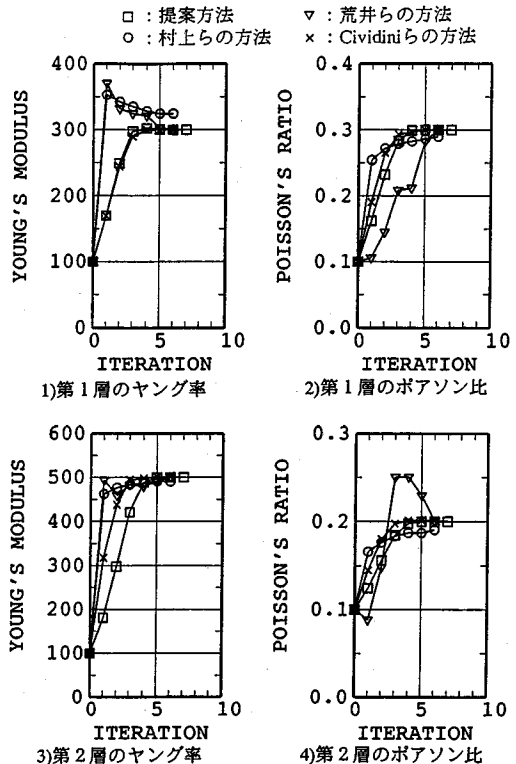


図-3 ケース2の収束過程

- (i) 共役勾配法は大規模な問題に対しては有効であるが、一般的には収束性があまりよくない。
- (ii) 目的関数が2次形式で表される場合は、より一

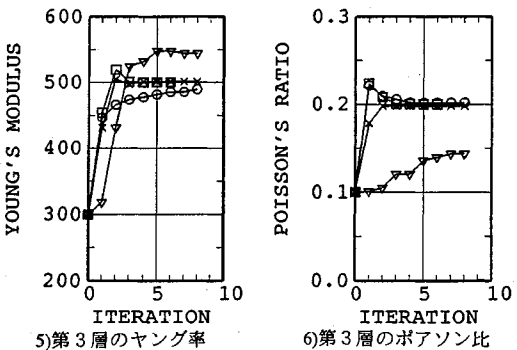
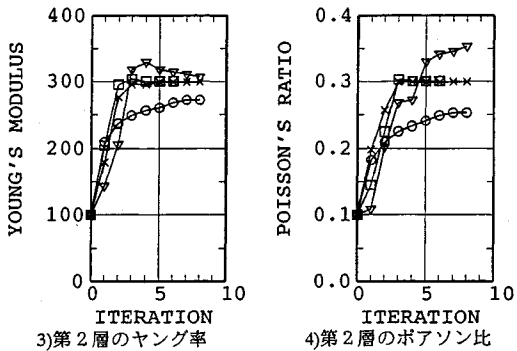
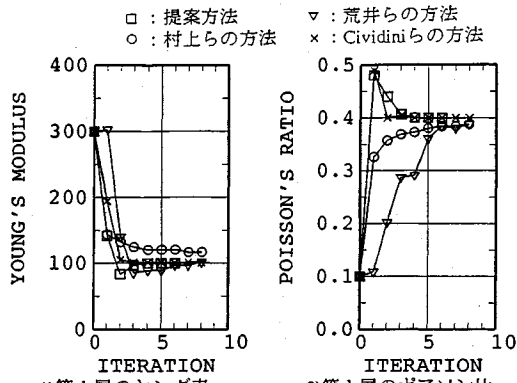


図-4 ケース3の収束過程

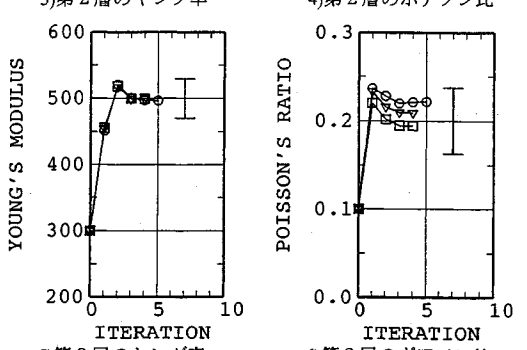
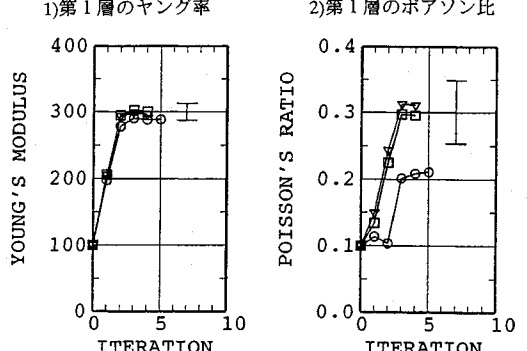
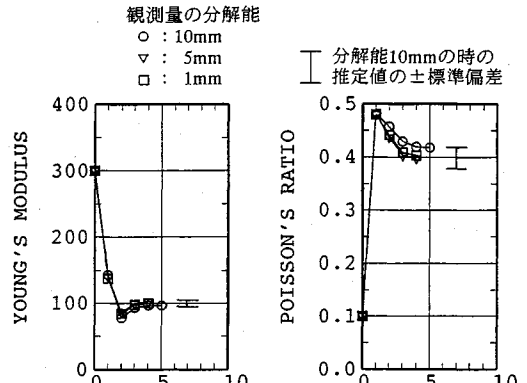


図-5 観測量の分解能、逆解析による推定値および推定精度の関係

一般的なDFP法などの最適化手法より最小二乗法の特殊性を利用するBiggs法の方が有効である。

- (iii) Gauss-Newton法とBiggs法を比べた場合、一般的には安定した収束性があるBiggs法の方がよいが、Gauss-Newton法は計算量も少なく問題によっては能率がよいので捨てがたい。

逆解析の目的関数は2次形式であるから、非線形最小二乗法であるGauss-Newton法あるいはBiggs法が好ましいことになる。Gauss-Newton法とBiggs法の比較では、指摘(iii)により我々の興味ある問題との相性が問題となる。Gauss-Newton法を用いた逆解析プログラ

ムを開発し、弾性床上の梁モデルや2次元FEMモデルの物性値を未知量としたいいくつかの問題を解いてみたが、これまでのところ収束性は良好である。初期値を真値から大きく離すと、不安定になる場合もあるがMarquardt法の導入や解の許容領域の設定(たとえばポアソン比は0より大きく0.5未満など)により数回から十数回で良好に収束している。ここで行った例題においても良好な収束性を示しており、採用したMarquardt法が有効に機能していることがわかる。

次に収束値について考察する。真の観測量が与えられ、独立な観測量の数が未知量の数より多ければ逆解析によ

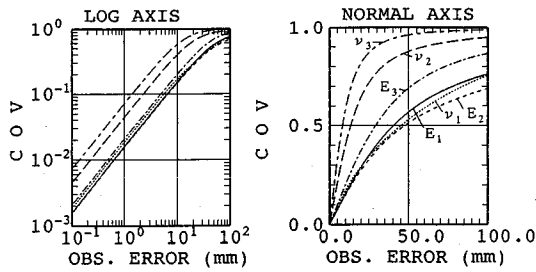


図-6 観測量誤差の標準偏差と推定精度 (事後の変動係数) 事前情報の変動係数は 1.0

り真値が求められなければならない。しかし、意識的に観測量誤差を与えなくとも、逆解析のプログラムに入力できる観測量は、有限の桁数であるから多かれ少なかれ誤差が混入していることになる。当研究で行った逆解析では観測量の桁数を十分多くとり入力したため、全ての未知量が真値に収束していると考えられる。観測量の分解能を 1, 5, 10 mm として、入力データを作成したケースの収束の様子について図-5 に示す。未知量と観測点はケース 3 と同様とした。切り捨てられた情報の大きさに応じて真値からのずれが大きくなっていることがわかる。確率論に基づく逆解析では、こうした観測量誤差と推定誤差の関係を式 (7) によって近似的にはあるが定量的に示すことができる。式 (7) によって求めた観測量誤差と推定誤差の標準偏差の関係を図-6 に示す。ここでは、全ての観測量が同じ精度を有し、その誤差が互いに独立であると仮定して算定した。すなわち、観測量誤差の共分散行列は単位行列に観測量誤差の分散を乗じた形で与えられる。事前情報としては各物性値の変動係数 1.0 を与えた。そのため観測量誤差をいくら大きくしても推定値の変動係数が 1.0 を上回ることはない。観測量誤差が十分に小さい範囲では観測量誤差と推定誤差が線形関係にあり、観測値だけから推定値が決められていることを意味し、線形関係がない領域は推定値が事前情報の影響を受けて決まっていることを示している。事前情報が乏しい、すなわち事前の変動係数を大きくすると観測量誤差が大きい領域でもそのまま線形関係が延長されることとなり大変大きな推定誤差となる。また、観測量の従属性が高い組み合わせの場合、あるいは感度が鈍い未知量の場合は、図-6 の対数軸グラフでは曲線が左上の方向へ移動し、一般軸グラフではその勾配がより大きくなる。事前情報がなく、このような好ましくない観測量しか得られない場合には、小さな観測量誤差に対しても推定精度が非常に悪くなり、悪条件 (ill-condition)<sup>18)</sup>の問題となる。

観測量の分解能が 10 mm の場合の推定値の真値からのずれを、図-6 を用いて解釈してみよう。この場合の

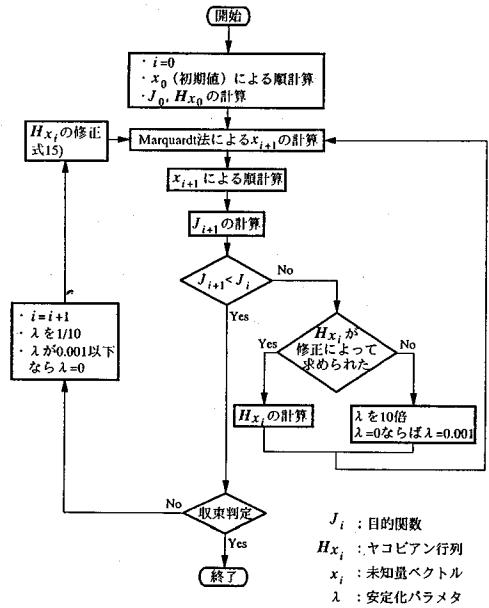


図-7 計算アルゴリズムの概略フロー

観測量の入力値を  $a$ 、真の観測量を  $b$  とすると、 $a$  は  $b \pm 5$  mm の領域の一様分布と考えることができ、その標準偏差は  $10\sqrt{12}$  mm である。これを観測量誤差の標準偏差と考え、図-6 の関係から分解能が 10 mm の場合の各推定値の標準偏差を求め、図-5 に示した。観測量の分解能が 10 mm の場合の 6 つの推定値のうち 5 つは  $\pm$  標準偏差の範囲にあり、実現値の 1 つと考えると妥当と思われる。以上のように、与えられた観測量誤差のレベルに対して、図-6 の関係からどの程度の推定精度となるかがわかる。あるいは逆に、所定の推定精度を得るにはどの程度の観測精度が必要かがわかる。例えば、変動係数 10% 程度の誤差で推定するには  $v_2, v_3$  は 1~2 mm の、その他の物性値では 5~7 mm の観測精度が必要になる。

#### 4. 逆解析のための効率的なアルゴリズムの提案

以上の検討では収束回数に注目して逆解析手法の比較を行ったが、重要なのは収束回数よりも全体的な計算時間である。モデルがある程度大きくなると計算時間に大きな影響を与えるのは式 (6), (7) のヤコビアン行列  $H_x$  の計算であり、この計算回数を少なくすることが重要である。この点に注目して、Marquardt 法を基にした計算アルゴリズムを考案した。その概略のフロー図を図-7 に示す。通常の方法では未知量ベクトルの更新を行うごとに毎回ヤコビアン行列の計算を行うのに対し、提

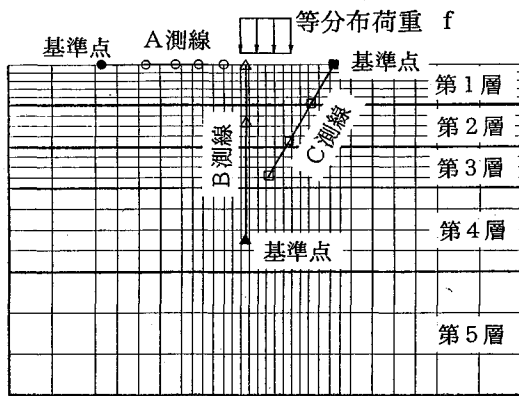


図-8 検討用 FEM モデル

案する方法では一番最初はヤコビアン行列の計算を行うものの、2回目からは次式の Broyden による修正<sup>13)</sup>を基本的に用いる。

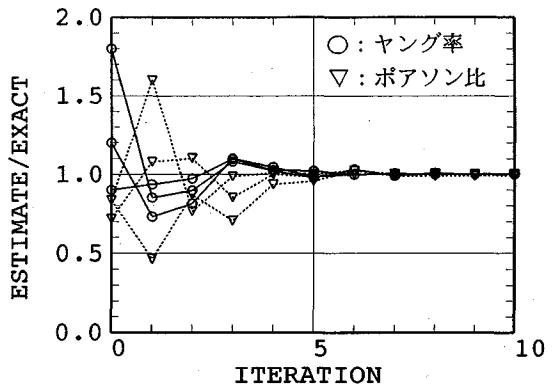
$$H_{xi+1} = H_{xi} + (\Delta z - H_{xi} \Delta x) \Delta x^T / (\Delta x^T \Delta x) \quad (15)$$

ここで、 $\Delta z = H(x_{i+1}) - H(x_i)$

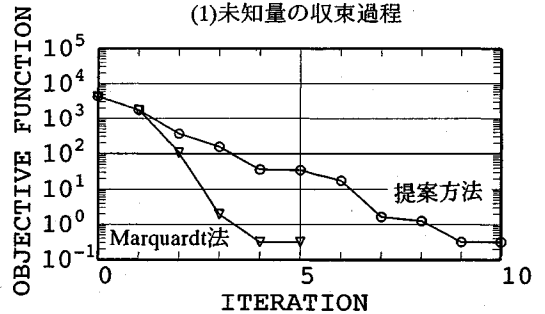
$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

しかし、修正だけでは収束を重ねるうちにヤコビアン行列に誤差が蓄積し、目的関数を減少させることができなくなる場合があるので、その時はヤコビアン行列の計算を行う。それでも目的関数を減少させることができない場合は、Marquardt法の安定化のためのパラメータ $\lambda$ を大きくすることで目的関数を減少させる。

提案した手法の有効性を数値計算例を通して示す。計算に用いた FEM モデルを図-8 に示す。モデル上端に等分布荷重が作用しており、それに伴う変形量が3測線で観測されているとする。A測線では水平方向相対変位、B測線では鉛直方向相対変位、C測線では距離の増分値が、それぞれの測線の基準点に対して求められている。未知量は第1, 2, 3層のヤング率とポアソン比とし、第4, 5層は既知で真の物性値が与えられるとした。提案する計算アルゴリズムで逆解析を行った結果の、上記6個の未知量についての収束過程を図-9 に示す。観測誤差は与えていないので真値に収束している。同じ問題を従来の Marquardt 法で解いた場合の目的関数の収束過程を図-9 (2) に示す。提案する方法では10回の収束回数を要しているのに対し、Marquardt 法では5回で収束している。ただし、計算時間を比べてみると逆に Marquardt 法の方が約2倍の計算時間を要しており、提案する計算アルゴリズムが有効であることが分かる。次に外力である等分布荷重の大きさも未知量とし、計7個の未知量に対する逆解析を行った。図-10 に示すように真値に収束しているが、外力も未知量とすることにより多くの収束回数を要する問題となっている。収束過程

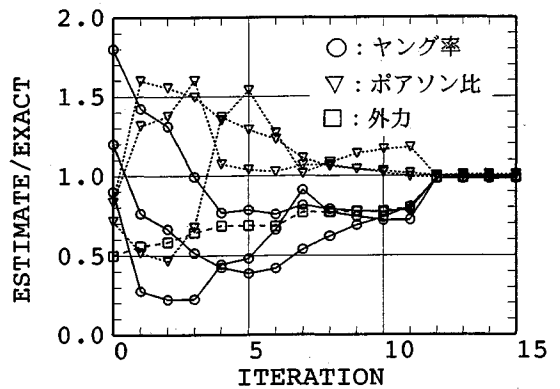


(1)未知量の収束過程

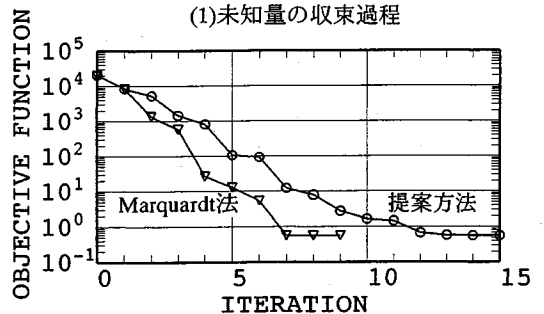


(2)目的関数の収束過程

図-9 未知数が6個の場合の逆解析



(1)未知量の収束過程



(2)目的関数の収束過程

図-10 未知数が7個の場合の逆解析

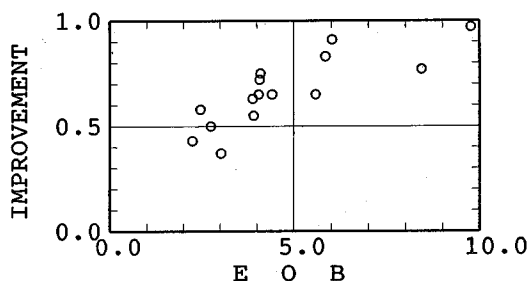


図-11 提案方法による計算時間の短縮

で安定化のパラメタは頻繁に使用されており、Gauss-Newton法では解けない問題になっていると思われる。Marquardt法で解いた場合の目的関数の収束過程を図-10(2)に示す。この場合の計算時間は提案方法の方がやや少ないもののほぼ同程度である。未知量や観測条件を変えた15ケースについて、提案方法とMarquardt法により逆解析を行い、その計算時間の比較を行った。結果をまとめるために逆解析の計算効率を表す次の指標EOB (Efficiency of Back Analysis)を導入した。

$$EOB = \frac{\text{逆解析に要する計算時間}}{\text{順解析に要する計算時間} \times (\text{未知数} + 1)} \quad (16)$$

計算時間そのものは計算機の能力やモデルの大きさなど順解析に依存し、逆解析の効率を直接表していない。そこで、(順解析に要する計算時間)×(未知数+1)で基準化することを考えた。この量は数値微分(前進差分)によりヤコビアン行列を求めるのに必要な時間をほぼ表しており、EOBは毎回数値微分によりヤコビアン行列を求める場合の逆解析の繰り返し回数に近い値となる。図-11に計算時間の比較を示す。横軸は提案方法で逆解析を行った場合のEOBを、縦軸は提案方法による計算時間とMarquardt法による計算時間の比を表している。EOBが小さいほど提案方法によって計算時間が短縮されている。EOBが大きい問題は図-10に示すような、Gauss-Newton法では解けないような収束に手間のかかる問題である。提案方法もGauss-Newton法(Marquardt法)を基にした方法であるので、Gauss-Newton法との相性が良くない問題に対しては、あまり効率的ではない。しかし、Gauss-Newton法との相性が良い問題に対してはたいへん効率的であり、例えば3章に示した例題ではたいへん有効に機能する。

## 5. 結 論

当研究では、2次元FEMを用いた確率論に基づく逆解析手法の開発、検討を行った。結論は次のようにまとめることができる。

- (1) 未知量が正規分布あるいは対数正規分布に従う場合の逆解析の定式化を示し、既往の研究と同じ条件、モデルで逆解析を行い、その検証を行った。
- (2) 確率論に基づく逆解析では、観測量誤差と推定誤差の関係を定量的に評価できることを示し、観測量の分解能と推定誤差の関係についても考察した。
- (3) 収束回数ではなく、トータルの計算時間に注目した効率的なアルゴリズムの提案を行い、数値計算によってその有効性を確かめた。

当研究では、2次元FEMを用いた逆解析の定式化やその解法といった基礎的な検討を行った。今後はより実際的な問題に適用するために掘削ステップを考慮した逆解析の開発や、確率有限要素法と逆解析を組み合わせた情報化施工への適用について研究を進めて行く予定である。

第1著者は理論展開と数値計算の一部を、第2著者は数値計算を担当し、第3著者は研究全般に渡る指導を行った。

## 参考文献

- 1) 桜井春輔, 岸本修治, 藤田修一, 末廣匡基: 斜面掘削工事における情報化施工管理について, 第23回岩盤力学に関するシンポジウム, pp.207-211, 1991.
- 2) 片山武, 矢田篤, 平川芳明: 洞内水力発電所地下発電所空洞掘削時の情報化施工, No.237, 電力土木, pp.97-107, 1992.
- 3) 桜井春輔, 谷河正也: 岩盤の不連続面の影響を考慮した大規模地下空洞の変位計測結果の逆解析, 土木学会論文集, 第403号, pp.75-84, 1989.
- 4) 小嶋啓介, 足立紀尚, 荒川克彦: 地下水面に掘削される土被りの浅い砂質地山トンネルのモデル実験と逆解析, 土木学会論文集, No.448, pp.91-99, 1992.
- 5) 門田俊一, 斉藤悦郎, 和久昭正, 後藤哲雄: 繰り返し拡張カルマンフィルターによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計算管理への適用, 土木学会論文集, 第406号, pp.107-116, 1989.
- 6) 須藤敦史, 星谷勝: EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析, 土木学会論文集, No.446, pp.177-185, 1992.
- 7) A. Ledesma, A. Grens & E. E. Alonso: Identification of Parameters of Nonlinear Geotechnical Models, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pp.1005-1010, 1991.
- 8) 星谷勝, 斉藤悦郎: 拡張カルマンフィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文集, 第339号, 1983.
- 9) 吉田郁政, 黒瀬浩公, 福井史朗: 確率論に基づく逆解析手法の基礎研究, 土木学会論文集, 第483号, pp.61-68, 1994.
- 10) 吉田郁政, 星谷勝: 既知条件の不確定性を考慮した逆解析, 土木学会論文集, No.501, pp.213-216, 1994.
- 11) 加藤寛一郎: 最適制御入門, 東京大学出版会, 1987.

- 12) 嘉納秀明：システムの最適理論と最適化, コロナ社, 1987.
- 13) 中川徹, 小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1982.
- 14) 今野浩, 山下浩：非線形計画法, 日科技連, 1978.
- 15) K. Arai, H. Ohta, M. Miyata : Comparison of Static and Statistical Methods for Back-analysis of Elastic Consolidation Problems, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pp.949-954, 1991.
- 16) 村上章, 長谷川高士：Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置, 土木学会論文集, 第 388 号, 1987.
- 17) 田辺国士：非線形最小二乗法のアルゴリズム, 応用統計学, Vol.9, No.3, pp.119-140, 1981.
- 18) 久保司郎：逆解析, 培風館, 1992.

(1994.3.17 受付)

## FORMULATION AND SOLVER FOR PROBABILISTIC BACK ANALYSIS WITH 2-D FEM

Ikumasa YOSHIDA, Kouichi TOYODA and Masaru HOSHIYA

A formulation of probabilistic back analysis is proposed, for a system of unknown parameters of normal distribution or lognormal distribution. The validity of the proposed methodology is shown by solving a same problem discussed by other researchers. It is pointed out that specific accuracy of observation is required to obtain exact estimates, and that the relation of the resolution of observation error to estimate error can be evaluated quantitatively. An effective algorithm in term of total calculation time rather than the number of iteration is proposed and demonstrated through numerical calculations.