

# エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の挙動の感度係数を用いない最適設計法に関する研究

大久保禎二<sup>1</sup>・和多田康男<sup>2</sup>・大森久義<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 愛媛大学教授 工学部 土木海洋工学科 (〒790 松山市文京町3番)

<sup>2</sup>正会員 工修 宇部興産(株) (〒755 宇部市大字小串字沖の山1980番地)

<sup>3</sup>正会員 工修 西松建設(株) (〒105 東京都港区虎ノ門1丁目)

本論文で、材料の非線形特性をも考慮した線形・非線形トラス構造物の最適設計問題を、エネルギー原理に基づき、挙動に関する感度係数を用いることなく統一かつ効率的に解くことのできる新しい最適設計法を提案している。まず最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づき構造物の線形・非線形解析問題において満足すべき必要条件を導入し、これを原設計制約条件群と共に等号制約条件として考慮する。さらに設計変数として部材断面面積のみならず、挙動変数をも独立な設計変数として考慮し、挙動の感度係数を用いることなく逐次線形計画法の手法を用いて目的関数の最小化を行う。計算例において、本論文で提案した最適設計法と構造物の挙動の感度係数を用いた従来の最適設計法との比較を行い、本論文で提案した方法の汎用性及び有効性を明らかにしている。

**Key Words :** material nonlinear truss, optimization, energy principle, without behavior sensitivity, sequential linear programming

## 1. ま え が き

近年、構造物の設計において考慮すべき設計条件として、従来から考慮されている材料の弾性限度、座屈限界、疲労限界などに加えて、構造物の終局強度に対する検討をも行うことが要求されており、構造物の弾性域を越えた終局耐力や非線形挙動に対する基準も設計を行う場合の重要な基準の一つとなっている。このような状況において、従来からの構造物の弾性域内における挙動に対する条件を考慮した最適設計法に加えて、弾性域を越えた弾塑性あるいは非線形挙動状態にある構造物の各要素の最適な諸元を決定する最適設計法の方法論的研究がきわめて重要な課題となっている。

ところで、このような弾塑性あるいは非線形挙動状態にある構造物の最適設計法に関しては、1950～70年代に完全塑性崩壊状態を考慮した塑性解析理論に基礎をおく剛節骨組構造物の最適設計法に関する研究が数多く行われている<sup>1),2)</sup>。また、トラス構造物の最適弾塑性設計法に関して、石川、三原<sup>3),4)</sup>らは完全弾塑性材料よりなるトラス構造物についてホロノミック弾塑性解析の基本条件式を用い、降伏部材選択のための感度解析や節点変位および崩壊荷重係数の感度解析を行い、SLPや双対法の手法を用いて最適設計を行う方法について研究を行っている。

また、最近になって、1989年にJ.E. Taylor<sup>5)</sup>が、

1992年にはS. Kaliszky, J. Logo<sup>6),7)</sup>らが、非線形挙動状態にある構造物の最適設計問題を変分原理を用いて定式化する方法に関する論文を発表している。これらの研究では、パイリニアあるいは複数の折れ線で定義される非線形応力度—ひずみ曲線を有する材料よりなる構造物のポテンシャルエネルギーあるいはコンプリメンタリーエネルギーの任意の上限値に対して抵抗し得る最大の荷重係数を、力の釣合方程式を満足し、かつ、エネルギーの上限値を越えないという条件のもとで決定する問題として定式化している。

ところで、著者らは1986年以来、エネルギー原理および数値計画法の手法を用いて静荷重を受けるトラス、はり、ラーメンなどの骨組構造物の材料の線形・非線形挙動の解析を統一かつ能率的に行うことができる解析法に関する研究を行い、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを各可動節点における力の釣合条件のもとで逐次二次計画法(SQP)の手法を用いて最小化することにより、部材力および可動節点変位を正確かつ効率的に決定できることを明らかにしてきた<sup>8)-12)</sup>。

本研究では、これらの最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく骨組構造物の非線形解析法に関する研究成果を基本として、構造物の応力度やたわみなどの挙動に関する感度係数を用いることなく、線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の最適設計問題を統一かつ能率的に解くことのできる新しい最適設計法を提案

している。

まず、トラス構造物の線形・非線形解析問題をコンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化し、そのラグランジュ関数を導入し、停留条件を用いてトラス構造物の線形・非線形挙動の解析において満足すべき必要条件を導入する。つぎにこの解析上の必要条件を、トラス構造物の設計において通常考慮されている応力度や変位などの挙動に関する制約条件に加えるとともに、設計変数として、通常考慮されているトラス構造物の各部材の断面積のみならず、応力度および可動節点変位をも独立の設計変数として考慮し、トラス構造物の最適設計問題を定式化する。このようにして導入した最適設計問題の目的関数および各制約条件を、各部材の断面積、応力度および各可動節点変位に関して線形近似し、逐次線形計画法 (SLP) の手法を用いて設計変数の改良を行う。この場合、各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件は、それぞれ応力度および可動節点変位についてのみ線形近似し、部材断面積に関する感度係数は使用していない。このようにして、目的関数、各部材の断面積、応力度、可動節点変位の改良を繰り返し、目的関数およびすべての変数の値が一定値に収束した時点で最適解が得られたものとした。

設計例として、10 および 16 部材トラスの各部材の材料の応力度—ひずみ関係が線形、パイリニア—、複数の折れ線、曲線で表わされる材料よりなる場合について、本論文で提案した方法、および通常最適設計法、すなわち構造物の各部材の断面積のみを設計変数とし、各部材の応力度や各可動節点の変位の制約条件の各部材断面積に関する感度係数を用いる最適設計法による解との比較を行い、本論文で提案した最適設計法によりきわめて正確かつ効率的に最適解が得られることを明らかにしている。

## 2. 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によるトラス構造物の材料非線形解析法<sup>3)</sup>

### (1) トラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー

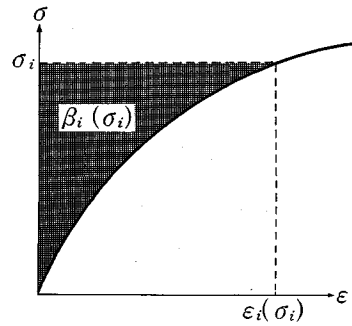
いま図—1 に示す応力度—ひずみ関係を有する材料よりなる部材  $i$  を考えると、部材  $i$  におけるひずみ  $\varepsilon_i$  は応力度  $\sigma_i$  の関数として次のように与えられる。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i) \quad (1)$$

また、部材  $i$  のコンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_{ci}(\sigma_i)$  は次式で表わされる。

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i) A_i l_i \quad (2)$$

ここに、 $\sigma_i$ 、 $A_i$ 、 $l_i$  は、それぞれ部材  $i$  の荷重による実応力度、断面積および部材長、 $\beta_i$  はコンプリメンタリーエネルギー密度であり次式より求められる。



図—1 材料の非線形応力度—ひずみ関係およびコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta_i$

$$\beta_i(\sigma_i) = \int_0^{\sigma_i} \varepsilon_i(\sigma) d\sigma \quad (3)$$

したがって、 $n$  個の部材からなるトラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギー  $\Pi_c(\sigma)$  は

$$\Pi_c(\sigma) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(\sigma_i) \quad (4)$$

により求められる。

### (2) 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の線形・非線形解析法

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、各可動節点における力の釣合方程式を満足する部材力の中で、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小にする部材力が真の部材力となる。したがって、トラス構造物の線形あるいは非線形挙動状態にある各部材の真の応力度  $\sigma$  を決定する問題は、次のような非線形のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化することができる<sup>3)</sup>。

find  $\sigma$ , which

$$\min. \quad \Pi_c(\sigma) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(\sigma_i) \quad (5 \cdot a)$$

$$\text{s. t.} \quad g_j = P_j - \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i = 0 \quad (5 \cdot b)$$

$$(j=1, \dots, m)$$

ここに、 $\mathbf{g} = [g_1(\sigma), \dots, g_m(\sigma)]^T$  は各可動節点における力の釣合方程式、 $C_{ji}$  は  $\sigma_i A_i$  すなわち各部材の軸力の可動節点変位成分  $j$  への変換マトリックス成分、 $P_j$  は可動節点変位成分  $j$  に作用する外力であり、 $m$  は自由度の数である。

式 (5 · a)、(5 · b) で定式化したトラス構造物のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、逐次二次計画法 (SQP) および線形計画法 (LP) の手法を用いて解くことができる。この解法の詳細については文献<sup>8)</sup>で詳述しているので参照されたい。

### 3. 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によるトラス構造物の線形・非線形解析問題における必要条件の導入

#### (1) 必要条件の導入

式(5・a), (5・b)で表わされるトラス構造物の線形・非線形解析問題において, 解が満足すべき必要条件を求めるため, 式(5・a) (5・b)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数  $L(\sigma, \lambda)$  を導入する。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\sigma) \quad (6)$$

ここに,  $\lambda_j$  は  $g_j(\sigma)$  に関するラグランジュ乗数であるが, 3.(2)で述べるように可動節点変位成分  $j$  の変位と同一の値となる。

式(6)のラグランジュ関数  $L(\sigma, \lambda)$  の極値が満足すべき必要条件(停留条件)は,  $L(\sigma, \lambda)$  の  $\sigma$  および  $\lambda$  に関する一次の偏微分係数を0と置くことにより次式のように導入される。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (7)$$

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = -g_j(\sigma) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (8)$$

ここで, 式(7)における  $\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i}$  の値は, 式(2)~(4)および図-2より明らかなように次式によりきわめて簡単に求めることができる<sup>9)</sup>。

$$\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} \doteq \varepsilon_i(\sigma) A_i l_i \quad (9)$$

また,  $\partial g_j(\sigma)/\partial \sigma_i$  の値も式(5・b)より次式により簡単に求めることができる。

$$\frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = -C_{ji} A_i \quad (10)$$

式(9)および式(10)を式(7)に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma) A_i l_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} A_i = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (11)$$

上式より

$$\varepsilon_i(\sigma) l_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (12)$$

を得る。また式(5・b)を式(8)に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (13)$$

式(12)は各可動節点変位および各部材の伸びの適合条件式, また式(13)は各可動節点変位成分における外力と軸力の釣合方程式となっている。

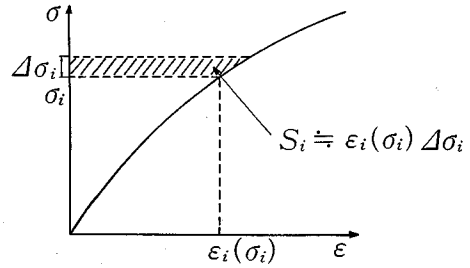


図-2  $\beta_i$  の変化量:  $S_i$

#### (2) ラグランジュ乗数と節点変位の関係

いま, 式(5・b)の制約条件  $g_j$  を

$$\bar{g}_j(\sigma) = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (14)$$

と書き改めると, 式(6)で導入したラグランジュ関数  $L(\sigma, \lambda)$  は次式で表わされる。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (P_j - \bar{g}_j(\sigma)) \quad (15)$$

上式で定義されたラグランジュ関数の停留値における  $\Pi_c(\sigma)$  および  $\lambda$  をそれぞれ  $\Pi_c^*(\sigma)$  および  $\lambda^*$  と表わすこととすると, 可動節点変位成分  $j$  における  $\lambda_j^*$  は次式で表わされる<sup>14)</sup>。

$$\lambda_j^* = \frac{\partial \Pi_c^*(\sigma)}{\partial P_j} \quad (16)$$

ところで, Crotti-Engesser の定理により, 外力による可動節点変位成分  $j$  における実変位  $u_j$  は次式で表わされることが明らかにされている<sup>15)</sup>。

$$u_j = \frac{\partial \Pi_c^*(\sigma)}{\partial P_j} \quad (17)$$

式(16)と式(17)を比較することにより  $\lambda_j^* = u_j$  となる。すなわち, 式(6)のラグランジュ関数  $L(\sigma, \lambda)$  を  $\sigma$  について最小化,  $\lambda$  について最大化して求めた停留値  $L^*(\sigma^*, \lambda^*)$  においては,  $\lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]^T$  は外力による実変位  $u = [u_1, \dots, u_m]^T$  と等しくなる。なお, このことの数値的な検証については文献16)で行っているので参照されたい。

### 4. エネルギー原理に基づく線形・非線形トラス構造物の統一的最適設計法の定式化

#### (1) 線形・非線形トラス構造物の原最適設計問題

本論文では, 線形・非線形挙動状態にあるトラス構造物の原最適設計問題として, 各部材の断面積  $A = [A_1, \dots, A_n]^T$  を設計変数とし, 各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件のもとでトラス構造物の全重量あるいは全製作費  $W$  を最小化する最適設計問題を考える。すなわち,

find  $\mathbf{A}$ , which

$$\min. \quad W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & g_{\sigma_k}(\mathbf{A}) = \sigma_k(\mathbf{A}) - \sigma_{ak} \leq 0 & (k=1, \dots, n) \\ & g_{\lambda_l}(\mathbf{A}) = \lambda_l(\mathbf{A}) - \lambda_{al} \leq 0 & (l=1, \dots, m) \\ & A_i^L \leq A_i \leq A_i^U & (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

ここに、 $\rho_i$  は部材  $i$  の単位体積当たりの重量あるいは製作費である。また  $g_{\sigma_k}$ ,  $g_{\lambda_l}$  は、それぞれ部材  $k$  の応力度および可動節点変位成分  $l$  の変位に関する制約条件、 $\sigma_k(\mathbf{A})$ ,  $\sigma_{ak}$  はそれぞれ部材  $k$  の実応力度および許容応力度、 $\lambda_l(\mathbf{A})$ ,  $\lambda_{al}$  はそれぞれ可動節点変位成分  $l$  の実変位および許容変位である。 $A_i$  の肩文字  $L$  および  $U$  は、それぞれ  $A_i$  の下限値および上限値を示す。

## (2) 最適設計問題の再定式化

式(18)で定式化した最適設計問題を解く方法として、これまでに構造物の挙動に関する制約条件  $g_{\sigma_k}(\mathbf{A})$ ,  $g_{\lambda_l}(\mathbf{A})$  の  $\mathbf{A}$  に関する感度係数  $\partial g_{\sigma_k}(\mathbf{A})/\partial A_i$ ,  $\partial g_{\lambda_l}(\mathbf{A})/\partial A_i$  を用い、種々の非線形計画法のアルゴリズムを利用して最適解を求める方法が数多く研究されてきた。しかし、通常、構造物の挙動変数の設計変数に関する感度係数を求めるためにはきわめて多量の計算を行う必要があり、さらに本研究のように非線形挙動状態にあるトラス構造物の挙動の感度係数を計算する場合には、さらに数多くの困難を伴うこととなる。

そこで本研究では、3.(1)で導入したトラス構造物の線形・非線形挙動の解析上満足すべき等号条件式、すなわち式(12)および式(13)を式(18)の原最適設計問題の制約条件式群に加えることにより、常に解析上の必要条件を満足させつつ設計変数の改良を行うこととした。この場合、構造物の挙動、すなわち  $\boldsymbol{\sigma}$  および  $\boldsymbol{\lambda}$  はともに  $\mathbf{A}$  の関数であるが、式(12)および式(13)が  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  の関数として表わされており、また式(18)の目的関数が  $\mathbf{A}$  のみの関数、制約条件式が  $\boldsymbol{\sigma}$  のみおよび  $\boldsymbol{\lambda}$  のみで表わされている関数となっていることより、本研究では原最適設計問題の設計変数  $\mathbf{A}$  に加えて  $\boldsymbol{\sigma}$  および  $\boldsymbol{\lambda}$  をも独立の設計変数として考慮し、 $\mathbf{A}$  のみならず  $\boldsymbol{\sigma}$  および  $\boldsymbol{\lambda}$  をも式(12), (13), (18)の制約条件を満足し、かつ目的関数を減少するように直接改良することにより、 $g_{\sigma_k}(\mathbf{A})$ ,  $g_{\lambda_l}(\mathbf{A})$  の  $\mathbf{A}$  に関する感度係数を用いることなく最適解を求めることとした。このような考えに基づき、式(18)の原最適設計問題を次のように再定式化する。

find  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ , which

$$\min. \quad W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i l_i \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & g_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \varepsilon_i(\sigma_i) l_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 & (i=1, \dots, n) \\ & g_j(\mathbf{A}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 & (j=1, \dots, m) \\ & g_{\sigma_k}(\sigma_k) = \sigma_k - \sigma_{ak} \leq 0 & (k=1, \dots, n) \\ & g_{\lambda_l}(\lambda_l) = \lambda_l - \lambda_{al} \leq 0 & (l=1, \dots, m) \\ & A_i^L \leq A_i \leq A_i^U & (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

なお、式(18)の最適設計問題の定式化は、単に固定荷重を受けるトラス構造物のみならず、変動荷重等の荷重の載荷経路を考慮しなければならない場合の最適設計問題に対しても、その荷重履歴における支配的な応力度やたわみ等に関する制約条件を考慮することにより、固定荷重を受ける場合と全く同様にしておくことができる。また荷重の経路を考慮しなければならない場合の最小コンプリメンタリーエネルギー原理による解析問題が満足すべき必要条件、すなわち式(12)および(13)も、著者らが文献(17)で発表している解析法を用いることにより、3.(1)で述べた方法と全く同一の方法で導入することができる。したがって、本論文で提案している最適設計法の定式化(式(18)および(19))は、単に固定荷重を受けるトラス構造物の最適設計問題のみならず、荷重の載荷経路を考慮しなければならないトラス構造物の最適設計問題に対しても全く同様に適用することができる。

## 5. 最適設計問題の解法

### (1) 線形近似最適設計問題の導入

式(19)で導入した最適設計問題においては、目的関数  $W$ 、および制約条件  $g_{\sigma_k}$  および  $g_{\lambda_l}$  はすべて設計変数  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  の線形な関数となっており、さらに解析上の必要条件  $g_i$ ,  $g_j$  は  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  のきわめて単純な関数となっている。そこで、本研究では式(19)の最適設計問題を逐次線形計画法(SLP)の手法を用いて解くこととした。本研究では、本論文で提案している最適設計法の妥当性および有効性を検討するため、これまで構造物の最適設計法として一般的に用いられている挙動変数の設計変数に関する感度係数を用いた方法による解との比較を行っている。以下本研究で提案している方法を[方法I]、従来からの感度係数を用いた方法を[方法II]と呼ぶこととする。

方法Iにおいて式(19)の最適設計問題における目的関数  $W$  を  $\mathbf{A}^0$ 、変位の適合条件式  $g_i$  を  $\boldsymbol{\sigma}^0$  および  $\boldsymbol{\lambda}^0$ 、力の釣合方程式  $g_j$  を  $\mathbf{A}^0$  および  $\boldsymbol{\sigma}^0$ 、応力度に関する制約条件  $g_{\sigma}$  を  $\boldsymbol{\sigma}^0$ 、変位に関する制約条件  $g_{\lambda}$  を  $\boldsymbol{\lambda}^0$  の回りで Taylor 展開し、 $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  に関する一次の偏微分係数の項までを考慮して近似することにより、方法Iの線形近似最適設計問題として  $\Delta \mathbf{A}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}$  を設計変数とする

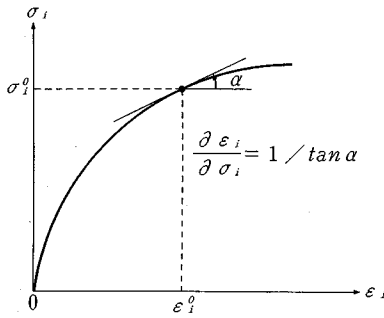


図-3  $\sigma_i^0$  における  $\partial \epsilon_i / \partial \sigma_i$

表-1 近似LP問題におけるシンプレックス表(方法I)

	$W$	$\rho_i \ell_i$	$-\rho_i \ell_i$	0	0	0	0	0	0
COMPATIBILITY EQUATIONS	$g_i^0$ ( $i=1, \dots, n$ )	0	0	$\ell_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \sigma_i}$	$-\ell_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \sigma_i}$	$C_{ji}$	$-C_{ji}$	0	0
EQUILIBRIUM EQUATIONS	$g_j^0$ ( $j=1, \dots, m$ )	$C_{ji} \sigma_i^0$	$-C_{ji} \sigma_i^0$	$C_{ji} A_i^0$	$-C_{ji} A_i^0$	0	0	0	0
STRESS CONSTRAINTS	$g_k^0$ ( $k=1, \dots, n$ )	0	0	1	-1	0	0	1	0
DISPLACEMENT CONSTRAINTS	$g_l^0$ ( $l=1, \dots, m$ )	0	0	0	0	1	-1	0	1

次式の最適設計問題を導入することができる。

find  $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ , which

$$\min. W(\Delta A) = W^0 + \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta A_i \ell_i \quad (20)$$

$$\text{s. t. } g_i(\Delta \sigma, \Delta \lambda) = g_i^0 + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \sigma_i} \ell_i \Delta \sigma_i + \sum_{j=1}^m C_{ji} \Delta \lambda_j = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$g_j(\Delta A, \Delta \sigma) = g_j^0 + \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i^0 \Delta A_i + \sum_{i=1}^n C_{ji} \Delta \sigma_i A_i^0 = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

$$g_k(\Delta \sigma_k) = g_k^0 + \Delta \sigma_k \leq 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

$$g_l(\Delta \lambda_l) = g_l^0 + \Delta \lambda_l \leq 0 \quad (l=1, \dots, m)$$

上式における  $\partial \epsilon_i / \partial \sigma_i$  は、 $\sigma_i^0$  における接線弾性係数の逆数となり、図-3に示すように材料の応力度—ひずみ曲線  $\epsilon_i^0$  における接線勾配の逆数として容易に求めることができる。

## (2) 逐次線形計画法 (SLP) による解法

式(20)のように線形近似された最適設計問題において設計変数  $\Delta A_i, \Delta \sigma_i, \Delta \lambda_j$  を次のように定義し、

$$\Delta A_i = \Delta A_i' - \Delta A_i'' \quad \Delta A_i' \geq 0, \Delta A_i'' \geq 0 \quad (21)$$

$$\Delta \sigma_i = \Delta \sigma_i' - \Delta \sigma_i'' \quad \Delta \sigma_i' \geq 0, \Delta \sigma_i'' \geq 0 \quad (22)$$

$$\Delta \lambda_j = \Delta \lambda_j' - \Delta \lambda_j'' \quad \Delta \lambda_j' \geq 0, \Delta \lambda_j'' \geq 0 \quad (23)$$

不等号制約条件である各部材の応力度に関する制約条件  $g_{\sigma k}$  および各可動節点変位に関する制約条件  $g_{\lambda l}$  についてのみスラックス変数  $S_i, S_j$  を導入することにより、式(20)の近似LP問題に対して表-1に示すシンプレックス表を作成する。このシンプレックス表を用いて次の手順により設計変数の改良値  $\Delta A', \Delta A'', \Delta \sigma', \Delta \sigma'', \Delta \lambda', \Delta \lambda''$  を決定する。

① まず等号制約条件式群について各条件式の違反度を調べ、違反している条件がある場合には最も違反している条件に着目し、その条件を満足させ、かつ目的関数が最大に減少あるいは最小に増加するような設計変数をピボット要素として選択し、ピボット操作を行う。

② ①の操作をすべての違反している等号制約条件に対して行うことにより、すべての等号制約条件を満足させたのち、不等号制約条件、すなわち各部材の応力度および各可動節点変位の制約条件について、次式により違反度あるいは余裕度を計算する。

$$\alpha_{\sigma k} = g_{\sigma k}^0 / \sigma_{\sigma k} \quad (k=1, \dots, n) \quad (24)$$

$$\alpha_{\lambda l} = g_{\lambda l}^0 / \lambda_{\lambda l} \quad (l=1, \dots, m) \quad (25)$$

式(24)、(25)において、 $\alpha_{\sigma k}$  および  $\alpha_{\lambda l}$  の値が正の場合は違反度を示し、負の場合は余裕度を示す。

③ 違反している制約条件がある場合には、最も違反度の大きい制約条件を満足し、かつ目的関数が最大に減少あるいは最小に増加するような設計変数をピボット要素として選択し、ピボット操作を行う。

④ すべての不等号制約条件が満足している場合には、最も余裕度の小さい制約条件について目的関数が最大に減少するような設計変数をピボット要素として選択し、ピボット操作を行う。

⑤ ③あるいは④のピボット操作により等号制約条件が満足されなくなる場合には、その都度①の操作を行い、等号制約条件を満足させるように設計変数を改良する。

⑥ 上記の①~⑤の操作をすべての等号制約条件および不等号制約条件が満足され、かつ目的関数を減少させることができなくなるまで行うことにより  $\Delta A', \Delta A'', \Delta \sigma', \Delta \sigma'', \Delta \lambda', \Delta \lambda''$  を決定し、 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$  の値を式(21)~(23)により算定する。この場合、 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$  の値が move limit を越えている場合には、その値を move limit 内に制限する。

上記の手順により決定した  $A$  の改良値  $\Delta A$  を用いて、各部材の断面積を次式により改良する。

$$A^1 = A^0 + \Delta A \quad (26)$$

この改良解  $A^1$  を新たな断面積の初期値として再び式(20)の線形近似最適設計問題を定式化し、全重量あるいは製作費  $W$ 、各部材断面積  $A$ 、各部材の応力度  $\sigma$  および各可動節点変位  $\lambda$  が一定値に収束するまで断面積  $A$  の改良を繰り返すことにより、最適解  $W_{opt}$  および

$A_{opt}$  を決定することができる。

## 6. 挙動変数の制約条件の感度係数を用いた最適設計法

前節で述べたごとく、4. および5.(1), (2) で述べた新しい最適設計法の妥当性および有効性を検討するため、本研究では、従来から構造物の最適設計法として一般的に用いられている挙動変数の感度係数を用いた方法(方法Ⅱ)による最適解との比較検討を行った。

方法Ⅱでは、式(18)の原最適設計問題の目的関数および挙動変数に関する制約条件  $g_{\sigma_k}$ ,  $g_{\lambda_l}$  を  $A^0$  の回りで Taylor 展開し、 $\Delta A$  に関する一次の偏微分係数の項までを考慮して近似することにより、次の線形近似最適設計問題を導入することができる。

$$\begin{aligned} & \text{find } \Delta A, \text{ which} \\ & \text{min. } W(\Delta A) = W^0 + \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta A_i l_i \quad (27) \\ & \text{s. t. } g_{\sigma_k}(\Delta A) = g_{\sigma_k}^0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} \Delta A_i \leq 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ & \quad g_{\lambda_l}(\Delta A) = g_{\lambda_l}^0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda_l}{\partial A_i} \Delta A_i \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \end{aligned}$$

上式における応力度  $\sigma_k$ 、および変位  $\lambda_l$  の断面積  $A_i$  に関する感度係数  $\partial \sigma_k / \partial A_i$ 、 $\partial \lambda_l / \partial A_i$  は次のようにして求めている。

すなわち、まず与えられた断面積  $A^0 = [A_1^0, \dots, A_n^0]^T$  における応力度  $\sigma^0 = [\sigma_1^0, \dots, \sigma_n^0]^T$  および可動節点変位  $\lambda^0 = [\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0]^T$  を求める。本研究ではこれらの値を2. で述べた最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく非線形解析法を用いて決定している。

次に部材  $i$  の断面積のみを  $\Delta A_i$  だけ変化させて、再度全コンプリメンタリーエネルギー最小化の方法により解析を行い、得られた応力度および可動節点変位をそれぞれ  $\sigma' = [\sigma_1', \dots, \sigma_n']^T$ ,  $\lambda' = [\lambda_1', \dots, \lambda_m']^T$  とすると、部材  $i$  の断面積の変化量  $\Delta A_i$  に対する各部材の応力度および各可動節点変位成分の変位の感度係数は近似的に次式より求めることができる。

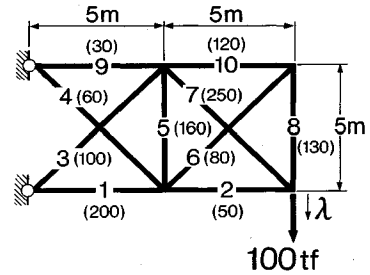
$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} \doteq \frac{(\sigma_k' - \sigma_k^0)}{\Delta A_i} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \lambda_l}{\partial A_i} \doteq \frac{(\lambda_l' - \lambda_l^0)}{\Delta A_i} \quad (29)$$

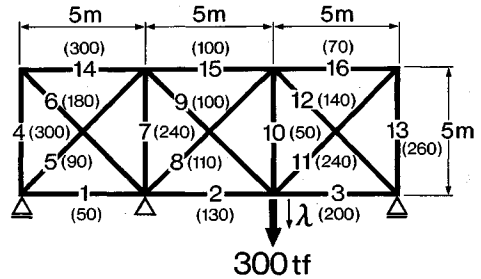
式(27)で導入した線形近似最適設計問題のシンプレックス表を表-2に示す。このシンプレックス表を用いて通常のピボット操作を行うことにより  $A$  の改良値  $\Delta A$  を決定し、各部材の断面積  $A$  を式(26)により改良し  $A^1$  を得る。このようにして改良された断面積  $A^1$  を新たな初期値として上記の改良を繰り返し、目的関数  $W$  および各部材の断面積  $A$  を一定値に収束させることによ

表-2 近似LP問題におけるシンプレックス表(方法Ⅱ)

		$\Delta A_i$ ( $i=1, \dots, n$ )	$-\Delta A_i$ ( $i=1, \dots, n$ )	$S_i$ ( $i=1, \dots, n$ )	$S_j$ ( $j=1, \dots, m$ )
	$W$	$\rho_i l_i$	$-\rho_i l_i$	0	0
STRESS CONSTRAINTS	$g_{\sigma_k}^0$ ( $k=1, \dots, n$ )	$\frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i}$	$-\frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i}$	1	0
DISPLACEMENT CONSTRAINTS	$g_{\lambda_l}^0$ ( $l=1, \dots, m$ )	$\frac{\partial \lambda_l}{\partial A_i}$	$-\frac{\partial \lambda_l}{\partial A_i}$	0	1



(a) 10部材トラス



(b) 16部材トラス

( ) 内の数字は各部材断面積の初期値 (cm<sup>2</sup>) を表わす。

図-4 設計モデル

り最適解を決定することができる。

## 7. 最適設計例

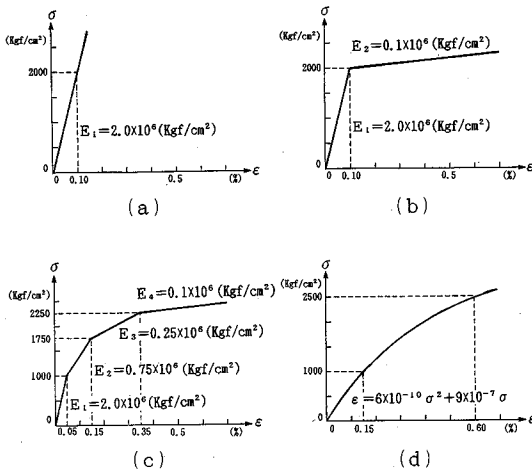
5. および6. で述べた方法Ⅰおよび方法Ⅱにより、線形および非線形の応力度—ひずみ関係を有する材料よりなる数多くの不静定トラス構造物の最適設計を行い、その結果の比較検討を行ったが、ここでは図-4に示す10および16部材トラスについて得られた最適解、収束性などの比較検討を行った結果について述べる。

使用材料としては図-5の(a)~(d)に示す4種類の線形および非線形な応力度—ひずみ関係を有する材料を考え、各材料を用いた場合について最適解を求め、本研究で提案している最適設計法が材料の線形・非線形性

表—3 10部材トラスの方法Ⅰおよび方法Ⅱによる最適解の比較

変位制限 $\lambda_a$ (cm)	50.0				7.0				3.0			
$\sigma_a$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	3000				3000				3000			
方法	Ⅰ <sup>1)</sup>		Ⅱ <sup>2)</sup>		Ⅰ <sup>1)</sup>		Ⅱ <sup>2)</sup>		Ⅰ <sup>1)</sup>		Ⅱ <sup>2)</sup>	
初期値 $A_0$ (cm <sup>2</sup> )	図-4 <sup>4)</sup> (a)	全部材 <sup>4)</sup> 100.0	全部材	100.0	図-4 <sup>4)</sup> (a)	全部材 <sup>4)</sup> 100.0	全部材	100.0	図-4 <sup>4)</sup> (a)	全部材 <sup>4)</sup> 100.0	全部材	100.0
設計変数	A, $\sigma$ , $\lambda$		A		A, $\sigma$ , $\lambda$		A		A, $\sigma$ , $\lambda$		A	
部材番号	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	34.0	3001	34.0	3001	49.2	2064	49.2	2062	67.0	1507	68.2	1481
2	32.6	3000	32.6	3003	47.4	2079	47.2	2088	65.8	1506	66.9	1481
3	46.1	3001	46.1	3001	65.5	2125	67.0	2081	95.0	1474	92.9	1506
4	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
5	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
6	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
7	46.1	3000	46.0	3003	67.4	2068	67.1	2075	93.5	1497	92.1	1520
8	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
9	65.9	3003	66.0	3001	97.6	2035	95.9	2069	130.7	1522	131.1	1518
10	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
W (kgf)	1054.7		1054.5		1522.6		1522.0		2103.5		2094.9	
$\lambda_{max}$ (cm)	44.1		44.1		7.0		7.0		3.0		3.0	
CPU TIME (sec.)	1.0	1.3	3.8		5.8	4.2	7.7		3.5	6.7	12.5	
IT E <sup>3)</sup>	18		23		32		148		102		169	
初期値 での状態	応力違反	実行可能	実行可能		応力・変位 違反	実行可能	実行可能		応力・変位 違反	実行可能	実行可能	
activeな 制約条件	応力		応力		変位		変位		変位		変位	

1) 挙動変数の感度係数を使用しない方法 2) 設計上考慮すべき制約条件のみを考慮し、挙動変数の感度係数を用いた方法 3) 最終解を得るために要した繰り返し回数 4) 初期値  $A^0$  が図4 (a) に示す場合および全部材を 100 cm<sup>2</sup> と仮定した場合のいずれにおいても同一の最適解を得ているので、その最適な部材断面積、部材応力度、目的関数値  $W$  および最大節点変位  $\lambda_{max}$  は 1組にまとめて示す。



図—5 線形材料および非線形材料の応力度—ひずみ関係

に関係なく統一的に最適設計を行うことができることも確認している。

なお上記の設計モデルにおいては、トラスの各部材はすべて同一の応力度—ひずみ関係を有する材料よりなるものとし、その単位体積重量  $\rho$  および許容応力度  $\sigma_a$  としては、図—5 に示すすべての材料について  $\rho = 7.85$  gf/cm<sup>3</sup>、および  $\sigma_a = 3000$  kgf/cm<sup>2</sup> と仮定した。またトラスの各部材の断面積の初期値として、図—4 (a) および (b) の ( ) 内の数値、およびすべて 100.0 cm<sup>2</sup> と仮定した 2 種類の場合について最適設計を行った。な

お各部材の断面積の下限値を 1.0 cm<sup>2</sup> に設定した。

また、逐次線形計画法を用いて最小化を行う場合、move limit がその収束性に重要な影響を与えるため、本研究では解の収束状況に応じて adaptive に move limit の調整を行った。最適解への収束判定基準としては、目的関数すなわちトラス構造物の全重量の変化量が 1/10000 以下となった時点で解が収束したものと判定した。

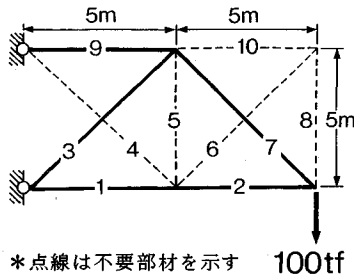
### (1) 10部材トラスの最適設計例

図—4 (a) に示す 10 部材トラスの最適設計例について述べる。

#### a) 方法Ⅰおよび方法Ⅱの最適解および収束状況の比較

使用材料として図—5 (b) に示す応力度—ひずみ関係を有する材料を用い、断面積の初期値  $A^0$  を図—4 (a) の ( ) 内の値に仮定した場合、およびすべての部材断面積を 100.0 cm<sup>2</sup> と仮定した場合について、許容節点変位  $\lambda_a$  を 50.0 cm, 7.0 cm, 3.0 cm とした設計問題の方法Ⅰおよび方法Ⅱにより得られた最適解、最適解を得るために必要とした計算時間および反復改良回数等を表—3 に示す。なお、初期値  $A^0$  が図—4 (a) に示す場合および全部材を 100 cm<sup>2</sup> と仮定した場合のいずれにおいても同一の最適解を得ているので、その最適な部材断面積、部材応力度、目的関数の値  $W$  および最大節点変位  $\lambda_{max}$  は、両初期値の場合を 1 組にまとめて示している。

$\lambda_a = 50.0$  cm とした場合、最適解において必要となる部材は 1, 2, 3, 7, 9 であり、いずれも fully stress となっ



図—6 10部材トラスの最適部材配置

ているのに対し、不必要となる部材の断面積は下限値の  $1.0 \text{ cm}^2$  に収束している。以下このような部材を不要部材と記す。最適な部材配置を図—6 に示す。また、可動節点の最大変位は  $44.1 \text{ cm}$  となっており、この設計問題では応力制限のみが支配的な制約条件となっている。

つぎに、 $\lambda_a = 7.0 \text{ cm}$  と変位の制限を厳しく制限した場合においても、必要となる部材の配置は  $\lambda_a = 50.0 \text{ cm}$  の場合と同一となるが、最適解における可動節点の最大変位は  $7.0 \text{ cm}$  となっており、可動節点変位の制約条件がアクティブな制約条件となっている。最適解における各部材の断面積は  $\lambda_a = 50.0 \text{ cm}$  の場合の最適断面積の  $1.42 \sim 1.48$  倍となっており、すべての部材の応力度は、多少のばらつきはあるがほぼ  $2070 \text{ kgf/cm}^2$  と必要な部材すべてが応力度の弾性限度  $\sigma = 2000 \text{ kgf/cm}^2$  を少し越えた同一の応力度を受けている。

$\lambda_a$  をさらに厳しく制限し、 $\lambda_a = 3.0 \text{ cm}$  とした場合も、変位の制約条件が支配的な制約条件となり、最適解において必要となる部材の応力度はすべて  $1500 \text{ kgf/cm}^2$  程度と、応力度の弾性限度内で同一の応力分布となっている。 $\lambda_a = 7.0 \text{ cm}$  および  $\lambda_a = 3.0 \text{ cm}$  の場合の最適解より明らかなように、変位の制約条件が支配的な最適設計問題では、材料の線形領域のみならず非線形領域において最適解が決定される場合においても、最適解において必要となる部材のひずみエネルギー密度あるいはコンプライメンタリーエネルギー密度が、すべての部材においてほとんど等しくなっていることはきわめて興味深いことである。

$\lambda_a = 50.0 \text{ cm}$ ,  $7.0 \text{ cm}$ ,  $3.0 \text{ cm}$  の設計例より明らかなごとく、本論文で提案している方法により、材料の応力度—ひずみ関係の線形領域、非線形領域に関係なくトラス構造物の最適設計を統一的行うことができ、最適解を決定できることが明らかとなった。

方法 I および方法 II の最適解への収束状況に関しては、いずれの設計例においても方法 I の方が方法 II と比較して計算時間で約  $1/3 \sim 1/2$ 、また反復改良回数でも約  $2/3$  と少ない計算時間および反復改良回数で最適解を得ており、解析上必要な条件式、すなわち式 (12) およ

表—4  $\sigma$ - $\epsilon$  関係の異なる材料の 10 部材トラスの最適解 (方法 I)

材料	(a)		(b)		(c)		(d)	
	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf/cm}^2$ )
1	34.0	3000	49.2	2064	56.5	1793	91.6	1101
2	32.7	2999	47.4	2079	54.4	1816	91.5	1085
3	46.2	3000	65.5	2125	77.3	1805	126.1	1113
4	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
5	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
6	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
7	46.3	2999	67.4	2068	77.5	1802	125.0	1123
8	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
9	66.0	3000	97.6	2035	108.1	1838	175.7	1134
10	1.0	—	1.0	—	1.0	—	1.0	—
W (kgf)	1056.8		1522.6		1741.5		2824.8	
初期値 $A^0$ ( $\text{cm}^2$ )	100.0		100.0		100.0		100.0	
$\sigma_a$ ( $\text{kgf/cm}^2$ )	3000		3000		3000		3000	
変位制限 $\lambda_a$ (cm)	7.0		7.0		7.0		7.0	
$\lambda_{\text{max}}$ (cm)	6.0		7.0		7.0		7.0	
CPU TIME (sec.)	0.8		4.2		4.0		3.3	
IT E <sup>13</sup>	18		102		93		76	
初期値 での状態	実行可能		実行可能		実行可能		実行可能	
activeな 制約条件	応力		変位		変位		変位	

1) 最終解を得るために要した繰り返し回数

び (13) をも考慮し、 $A$  のみならず  $\sigma$  および  $\lambda$  をも独立な設計変数として考慮し、それぞれを改良することにより、方法 II と比較してきわめて少ない計算量で能率的に最適解を決定できることが明らかとなった。

#### b) 材料の $\sigma$ - $\epsilon$ 関係の違いによる最適値および収束状況の検討

前節では非線形材料として図—5 (b) に示すパイリニアな応力度—ひずみ関係を有する材料からなる 10 部材トラスの種々の設計条件における方法 I および方法 II により得られた最適解の比較を行ったが、ここでは、図—5 (a)~(d) に示す 4 種類の線形および非線形材料を用いて方法 I により最適設計を行った結果を表—4 に示す。この場合、いずれの材料においても断面積の初期値  $A^0$  および許容節点変位  $\lambda_a$  として、それぞれ  $A^0 = 100.0 \text{ cm}^2$  および  $\lambda_a = 7.0 \text{ cm}$  と仮定した。

使用材料の応力度—ひずみ関係の違いにより、支配的な制約条件は表—4 の最下段に示すごとく変位制約あるいは応力制約と異なるが、いずれの材料に対しても方法 I により確実に最適解が得られており、本研究で提案している最適設計法により、いかなる線形および非線形の応力度—ひずみ関係を有する材料からなるトラス構造物の最適設計問題も統一的に解くことができることが明らかとなった。

#### (2) 16 部材トラスの最適設計例

図—4 (b) に示す 16 部材トラスの最適設計例について述べる。

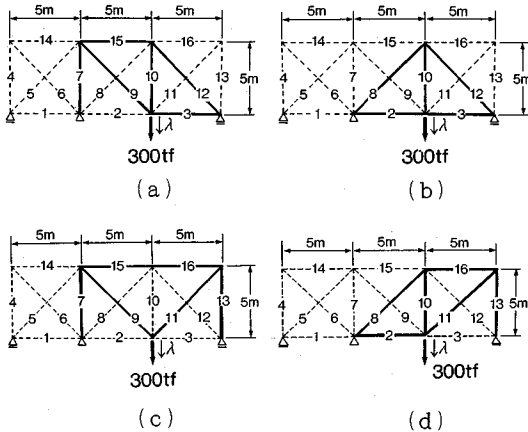
a) 方法 I および方法 II の最適解および収束状況の検討  
使用材料として図—5 (b) に示す応力度—ひずみ関



表一5 16部材トラスの方法Ⅰおよび方法Ⅱによる最適解の比較

変位制限 $\lambda_a$ (cm)	50.0				5.0					
	3000		3000		3000		3000			
方法	Ⅰ <sup>1)</sup>				Ⅱ <sup>2)</sup>					
初期値 $A_0$ (cm <sup>2</sup> )	図-4 (b)		全部材 100.0		全部材 100.0		図-4 (b)		全部材 100.0	
設計変数	A, $\sigma$ , $\lambda$		A, $\sigma$ , $\lambda$		A		A, $\sigma$ , $\lambda$		A	
部材番号	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	断面積 (cm <sup>2</sup> )	応力度 (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
2	48.8	3000	1.0	-	48.8	3000	1.0	-	1.0	-
3	1.0	-	48.9	3000	48.8	3000	1.0	-	1.0	-
4	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
5	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
6	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
7	1.0	-	49.5	3000	1.0	-	69.7	2147	70.3	2134
8	70.0	3000	1.0	-	70.0	3000	1.0	-	1.0	-
9	1.0	-	70.0	3000	1.0	-	99.2	2129	99.5	2125
10	50.3	3000	49.7	3000	98.3	3000	96.0	-	96.0	-
11	69.1	3000	1.0	-	69.1	3000	96.9	2160	96.0	2161
12	1.0	-	69.1	3000	1.0	-	69.0	-	69.0	-
13	48.9	3000	1.0	-	1.0	-	68.3	2166	68.2	2169
14	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
15	1.0	-	48.9	3000	1.0	-	68.4	2163	68.7	2155
16	48.9	3000	1.0	-	1.0	-	68.9	2147	68.0	2173
最適部材配置	図-7 (d)		図-7 (a)		図-7 (b)		図-7 (c)		図-7 (c)	
W (kgf)	1590.6		1590.7		1590.7		2214.5		2214.5	
$\lambda_{max}$ (cm)	22.0		22.0		22.0		5.0		5.0	
CPU TIME (sec.)	1.7		2.8		13.0		17.4		12.2	
ITE <sup>3)</sup>	9		13		31		104		79	
初期値での状態	実行可能		実行可能		実行可能		実行可能		実行可能	
activeな制約条件	応力		応力		応力		変位		変位	

1) 準動変数の感度係数を使用しない方法 2) 設計上考慮すべき制約条件のみを考慮し、準動変数の感度係数を用いた方法  
3) 最終解を得るために要した繰り返し回数



\*点線は不要部材を示す

図-7 16部材トラスの最適部材配置

係を有する材料を用い、断面積の初期値  $A^0$  を図-4 (b) の ( ) 内の値に仮定した場合、およびすべての部材断面積を  $100.0 \text{ cm}^2$  と仮定した場合について、許容節点変位  $\lambda_a$  を  $50.0 \text{ cm}$  および  $5.0 \text{ cm}$  とした設計問題の方法Ⅰおよび方法Ⅱにより得られた最適解、最適解を得るために必要とした計算時間および反復改良回数等を表一5に示す。

$\lambda_a = 50.0 \text{ cm}$  とした場合、方法Ⅰおよび方法Ⅱにおける各部材断面の改良過程で各部材の改良順序が微妙に異

なるため、方法Ⅰの図-4 (b) に示す初期断面積の場合2, 8, 10, 11, 13, 16 (図-7 (d)), すべての部材の初期値を  $100.0 \text{ cm}^2$  とした場合3, 7, 9, 10, 12, 15 (図-7 (a)), 方法Ⅱの場合2, 3, 8, 10, 12 (図-7 (b)) となり最終的に得られた最適な部材配置は多少異なっている。しかし、いずれの方法および初期値の設定によって得られた目的関数の値もすべて同一の値となっており、すべて全域的な最適解であると判断することができる。なお、本研究では基本的な構造計画を行うための理論的な観点からの最適な部材配置を決定することを目的としているため、構造物の安定、不安定の制約条件は考慮していない。したがって、結果的に図-7 (a), (c), (d) は不安定構造となっているが、実際の設計を行う場合には、これらすべての理論的見地からの最適部材配置を参考とし、不安定構造となる部材配置を採用する場合には、当然のことながら不安定構造物とならないように二次的な部材をも配置すべきである。また、この設計問題では可動節点の最大変位が  $22.0 \text{ cm}$  となっており、応力制限のみが支配的な制約条件となっている。

$\lambda_a = 5.0 \text{ cm}$  と変位の制限を厳しくした場合には、方法Ⅰの初期値を図-4 (b) とした場合、すべての部材の断面積を  $100.0 \text{ cm}^2$  とした場合および方法Ⅱのいずれの方法によって得られた最適解においても、必要となる部材は7, 9, 11, 13, 15 および 16 と同一となり、不要部材の断面積は下限値の  $1.0 \text{ cm}^2$  に収束している。最適な部材配置を図-7 (c) に示す。最適解における可動

表一6  $\sigma$ - $\varepsilon$  関係の異なる材料の16部材トラスの最適解 (方法 I)

材料 部材番号	(a)		(b)		(c)		(d)	
	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )	断面積 ( $\text{cm}^2$ )	応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )
1	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
2	48.9	3001	1.0	-	1.0	-	1.0	-
3	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
4	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
5	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
6	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
7	1.0	-	69.7	2147	74.4	2006	106.3	1405
8	69.8	2997	1.0	-	1.0	-	1.0	-
9	1.0	-	99.2	2129	105.3	2004	147.6	1430
10	50.1	3001	1.0	-	1.0	-	1.0	-
11	69.2	3003	96.9	2160	104.5	2006	148.0	1421
12	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
13	49.0	3000	68.3	2166	75.3	1969	104.7	1420
14	1.0	-	1.0	-	1.0	-	1.0	-
15	1.0	-	68.4	2163	75.3	1968	103.9	1430
16	49.0	3000	68.9	2147	72.8	2037	103.2	1442
最適部材 配置	図-7 (d)		図-7 (c)		図-7 (c)		図-7 (c)	
W (kgf)	1590.7		2214.5		2379.4		3328.0	
初期値 $A_0$ ( $\text{cm}^2$ )	100.0		100.0		100.0		100.0	
$\sigma_a$ ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )	3000		3000		3000		3000	
変位制限 $\lambda_a$ (cm)	5.0		5.0		5.0		5.0	
$\lambda_{\text{max}}$ (cm)	3.0		5.0		5.0		5.0	
CPU TIME (sec.)	1.4		12.2		24.4		15.7	
ITER <sup>1)</sup>	9		79		156		99	
初期値 での状態	実行可能		実行可能		実行可能		実行可能	
activeな 制約条件	応力		変位		変位		変位	

1) 最終解を得るために要した繰り返し回数

節点の最大変位は5.0 cm となっており、この最適設計問題では可動節点変位の制約条件がアクティブな制約条件となっている。一方、最適解において必要となるすべての部材の応力度はほぼ2150 kgf/cm<sup>2</sup> となっており、必要となる部材すべての応力度が弾性限度  $\sigma_a = 2000$  kgf/cm<sup>2</sup> を越えた同一の応力度となっている。この性質は10部材トラスの場合と全く同様であり、変位制約が支配的な最適設計問題では、最適解における各部材のエネルギー密度はすべて等しくなっている。

各方法の最適解を求めるために必要とした計算時間および反復改良回数は、いずれの設計例においても方法 I の方が方法 II と比較して計算時間で約1/4.6~1/2、また反復改良回数でも約1/2.4~1/1.7 と少ない計算時間および反復改良回数で最適解を得ており、本研究で提案している方法 I が方法 II と比較してきわめて有効な最適設計法であるといえることができる。

b) 材料の  $\sigma$ - $\varepsilon$  関係の違いによる最適値および収束状況の検討

図一5 (a)~(d) に示す4種類の線形および非線形の材料を用いて、方法 I により最適設計を行った結果を表一6 に示す。この場合、いずれの材料においても断面積の初期値  $A^0$  および許容節点変位  $\lambda_a$  として、それぞれ  $A^0 = 100.0 \text{ cm}^2$  および  $\lambda_a = 5.0 \text{ cm}$  と仮定している。

使用材料の応力度一ひずみ関係の違いにより、最適な部材配置および支配的な制約条件は図一7 (c), (d) および表一6 に示すごとく異なるが、10部材トラスの最

適設計例の場合と同様に、いずれの線形および非線形材料に対しても本研究で提案した方法により確実に全域的な最適解が得られており、本論文で提案している最適設計法が極めて優れた線形・非線形トラス構造物の汎用性のある統一的かつ能率的な最適設計法であるといえることができる。

9. 結 論

本研究により得られた主な結論は次の通りである。

- (1) 最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の解析問題に関するラグランジュ関数を導入し、これを各部材の応力度およびラグランジュ乗数(各可動節点変位)に関して偏微分することにより、構造物の線形・非線形解析において満足すべき必要条件をきわめて単純な式として導入することができる。
- (2) トラス構造物の原設計問題において考慮すべき挙動変数に関する制約条件群に加えて、さらに非線形解析問題において満足すべき必要条件をも等号制約条件として付加し、各部材の断面積のみならず応力度および各可動節点変位をも独立な設計変数として考慮して最適設計問題を再定式化し最適化を行うことにより、従来から用いられているトラス構造物の部材断面積のみを設計変数とし、挙動に関する制約条件の各部材断面積に関する感度係数を用いた最適設計法と比較して、きわめて能率的に最適解を決定することができる。
- (3) (2) で再定式化した最適設計問題は、線形近似の概念と、5.(2) で述べた逐次線形計画法の手法を用いることにより、容易に最適解を決定することができる。
- (4) 本研究で提案した最適設計法により、トラス構造物の挙動が材料の線形領域および非線形領域のいずれの領域において生ずる場合についても、構造物の挙動を全コンプリメンタリーエネルギー最小化の方法を用いて求めることにより、最適設計問題を全く同一の形式で定式化することができ、かつ、同一の最適化アルゴリズムにより統一的に最適な部材配置、各部材の断面積および応力度、各可動節点の変位を決定することができ、きわめて大きな汎用性を有する。
- (5) 本研究で提案した最適設計法は、いかなる線形および非線形の応力度一ひずみ関係を有する材料に対しても統一的に適用することができる。
- (6) 可動節点変位に関する制約条件のみがアクティブとなる最適設計問題では、最適解における各部材の応力度が応力度一ひずみ関係の弾性領域あるいは非線形領域であることに関係なく最適解において必要となるすべての部材のコンプリメンタリーエネルギー密度、言い換えれば応力度が等しくなる。

上記の結論により、本論文で提案したトラス構造物の

最適設計法は、構造物の線形および非線形領域における挙動を統一的に考慮して最適設計問題を定式化することができ、かつ、従来の方法のように構造物の応力度や可動節点変位などの挙動の各部材断面積に関する感度係数を用いることなく、きわめて能率的に全域的な最適解を決定することができる汎用的な最適設計法であることが明らかとなった。

最後に、本研究における計算は、愛媛大学構造工学研究室に設置されている DEC 3000/300 を使用し、計算結果の整理および図面の作成には、愛媛大学大学院工学研究科に在学中の田中賢太君および青野将也君のご助力を得た。ここに記して謝意を表すものである。

#### 参考文献

- 1) Cohn, M. Z. and Maier, G. eds. : *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Pergamon Press, Part II 7, 8, pp.135~196, 1979.
- 2) Ishikawa, N. : Iterative Optimal Plastic Design of Steel Frames, 土木学会論文報告集, 第 237 号, pp.109-119, 1975.5.
- 3) 石川信隆, 香月智, 三原徹治, 古川浩平 : 降伏部材選択方式によるトラス構造物の最適弾塑性設計法に関する一考察, 土木学会論文集, 第 350 号 / I -2, pp. 321-329, 1984.10.
- 4) 三原徹治, 北小路雅倫, 石川信隆, 太田俊昭 : 感度解析を用いたトラス構造物の最適弾塑性設計法とその応用例, 土木学会論文集, 第 392 号 / I -9, pp.249-258, 1988.4.
- 5) Taylor, J. E. : Toward a Unified Model for Elasto Plastic Structural Analysis, *Mechs. Res. Comms.*, pp. 125-131, 1989.
- 6) Kaliszky, S., Logo, J. and Havady, T. : Optimal Design of Elasto-Plastic Structures under Various Loading Conditions and Displacement Constraints, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, pp.107-123, 1989.
- 7) Kaliszky, S. and Logo, J. : Variational Principles for the Analysis and Optimal Design of Structures with Bilinear Force-Deformation Relations, *Proc. of EPMESEC*, IV, pp.37-43, 1992.
- 8) 大久保禎二, 和多田康男 : エネルギー原理および SQP によるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究, 土木学会論文集, 第 374 号 / I -6, pp.427-436, 1986.10.
- 9) Ohkubo, S., Watada, Y. and Fujiwaki, T. : Nonlinear Analysis of Truss by Energy Minimization, *Computer & Structures*, Vol.27, No.1, pp.129-145, 1987.
- 10) 大久保禎二, 藤脇敏夫 : コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の材料非線形解析法, 土木学会論文集, 第 398 号 / I -10, pp.227-236, 1988.10.
- 11) Ohkubo, S. and Makino, K. : Material Nonlinear Analysis of Rigid Plane Frames by Total Complementary Energy Minimization, *Structural Eng./Earthquake Eng.* JSCE, Vol.7. No.1, pp.25s-36s. (*Proc. of JSCE, No.416/I-13*) April. 1990.
- 12) Ohkubo, S. and Makino, K. : Nonlinear Stress and Displacement Analysis of Rigid Plane Frames by Total Complementary Energy Minimization, *Computers & Structures*, Vol.44, No.1/2, pp.193-206, 1992.
- 13) Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Third Edition, Pergamon Press, 1982.
- 14) たとえば三根久 : オペレーションズリサーチ-数理計画法入門一上巻, 朝倉書店, pp.115-122, 1966.
- 15) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : *Mechanics of Materials*, D. Van Nostrand Company, pp.437-444, 1972.
- 16) 田中賢太, 大久保禎二, 和多田康男, 大森久義 : エネルギー原理に基づくトラス構造物の変位解析法について, 土木学会第 49 回年次学術講演会講演概要集, 第 1 部 (A), pp.642-643, 1994.
- 17) 大久保禎二, 和多田康男, 西村一隆 : エネルギー原理による構造物の弾塑性履歴挙動の解析法について, 土木学会第 45 回年次学術講演会講演概要集, 第 1 部, pp.172-173, 1990.

(1994.5.20 受付)

## OPTIMUM DESIGN METHOD FOR MATERIAL NONLINEAR TRUSS WITHOUT BEHAVIOR SENSITIVITY BASED ON ENERGY PRINCIPLE.

Sadaji OHKUBO, Yasuo WATADA and Hisayoshi OHMORI

This paper proposes a unified and efficient new optimum design method for linear and nonlinear truss structures which is developed on the bases of energy principles and without behavior sensitivities. By using the principle of minimum complementary energy and the Lagrangian interpretation, the necessary conditions for structural analysis problem are derived, then the primary optimum design problem is reformulated considering both the primary design constraints and the necessary conditions for analysis problem derived above. In the reformulation of optimum design problem, structural behaviors are also considered as the design variables in addition to the cross-sectional areas of member elements. This reformulated optimum design problem is solved by using the sequential linear approximation concept and a modified linear programming algorithm, however, in the optimization process no behavior sensitivity are used. The generality, rigorousness and efficiency of the proposed optimum design method are shown by several numerical design examples of statically indeterminate trusses.