

# 長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化

池田清宏<sup>1</sup> ・ 中沢正利<sup>2</sup> ・ 和知 聡<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D 東北大学工学部土木工学科 助教授 (〒980-77 仙台市青葉区)

<sup>2</sup>正会員 工博 東北大学工学部土木工学科 講師

<sup>3</sup>正会員 工修 日本鋼管株式会社

本論文では、次々と多段階の分岐（面外座屈）を起こす純曲げを受ける単純支持された長方形板を対象とする。この分岐構造はこの板の変位の周期特性による「隠れた対称性」によるものである。この対称性を群論的分岐理論の既約表現の概念を用いて記述することにより、この分岐構造の仕組を求める。幾何学的対称性による分岐構造に比べ、この分岐構造は境界条件により退化することを明らかにし、その仕組を体系的に記述できたことが本論文の最大の成果である。

**Key Words :** Bifurcation, group theory, hidden symmetry, irreducible representations.

## 1. はじめに

分岐現象の大半は対象とする系の対称性の低下に起因する「対称性破壊分岐現象」である。例えば、オイラー座屈では部材軸に関する鏡映対称性を持つ自明解から鏡映対称性を持たない分岐解が発生し、円筒シェルでは軸対称性を持つ自明解から、軸対称性を持たない分岐解が発生する。対称性の記述法としては、回転および鏡映変換からなる対称性を表す群を用いるのが標準的である<sup>1)</sup>。支配方程式の対称性とは、群同変性とよばれる一種の客観性の条件を満足することである。ある群に同変な系の分岐の数学的な構造は、群論的分岐理論により先験的に知ることができる<sup>2),3),4)</sup>。群の既約表現に対応する座標変換により、釣り合い式を幾つかの独立な方程式に分解できるという、ブロック対角化原理が対称性の利用法として確立している<sup>5),6),7)</sup>。

近年構造工学の分野でも、群の表現論を用いて構造物の分岐現象を記述する研究が行なわれるようになってきている<sup>8),9),10),11)</sup>。軸対称系（円の対称性を表す群  $D_{\infty}$  または正  $n$  角形の対称性を表す群  $D_n$  に同変な系）に関しては詳細な研究が行われ、分岐構造のダイアグラム<sup>9)</sup>、離散系の接線剛性行列のブロック対角化法<sup>8),10),11)</sup>等が提案されている。分岐ダイアグラムにより分岐の仕組が先験的にわかることは数値解析上有利であり、また対称構造物の接線剛性行列を適当な座標変換によりブロック対角形に変換することには数値解析の効率と安定性の向上という利点がある。

構造物の対称性は「自然な対称性」と「隠れた対称性 (hidden symmetry)」とに分類できる。前者は軸対称シェルの周方向の対称性のような幾何学的な対称性

であり、その分岐構造は群論的分岐理論により一般的に求まる。後者は弾性床の上のり分岐座屈のような周期特性によるものであり、境界条件により分岐の仕組が「退化」している。後藤等<sup>12)</sup>が求めたはりの2次分岐はこの1例である。

本論文では「隠れた対称性」を持つ構造例として図-1に示す純曲げを受ける単純支持の長方形板を取上げる。この板は荷重を含めた幾何学的対称性からは  $y$  軸に関する鏡映対称性しか持たないが、実は  $x$  軸方向の隠れた周期対称性による分岐階層構造が発現する  $D_{\infty}$  同変系である。この板の分岐階層構造が境界条件によりどのように退化するのかを群の既約表現を用いて調べることとする。この系が「幾何学的な対称性」による  $D_{\infty}$  同変系とは全く異なる分岐構造を持つことを明らかにする。この板の固有関数である Fourier 級数により変位を展開し、級数を適当な順番に並べ変えると、接線剛性行列が既約表現に対応するブロック対角形になることを示し、各ブロックに対応する Fourier 級数の次数を与える公式を提案する。この板の分岐解析を行い、その分岐構造が本理論に従うことを示すことにより、本理論の妥当性を確認する。

## 2. 群同変系の分岐理論

この章では、幾何学的対称性を持つ系の対称性の記述法<sup>3),4),10),11)</sup>を紹介する。

### (1) 釣合方程式の群共変性

ある非線形釣合方程式 ( $N$  次元) を

$$F(f, u) = 0 \quad (1)$$

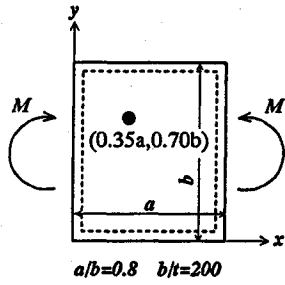


図-1 純曲げを受ける単純支持された長方形板

とする。ここに  $f$  は荷重パラメータを、 $u$  は変位ベクトルを各々表す。式(1)をある釣合点  $(f, u)$  の近傍で

$$F = Jdu + F_0(df, du) = 0 \quad (2)$$

と増分形に書き直しておく。ここに、 $J = \partial F / \partial u$  は接線剛性行列、 $F_0$  はある非線形ベクトルである。

釣合式の対称性を記述するにあたり、(鏡映や回転等を表す) 変換写像  $g$  からなる群  $G$  を想定する。例えば群  $G$  の元  $g$  が  $N$  次元ベクトル  $u$  (または  $F$ ) に作用すると、 $u$  が  $g(u)$  (または  $F$  が  $g(F)$ ) に変換される。この座標変換の仕組は  $N \times N$  の表現行列  $T(g)$

$$T(g)u = g(u), \quad T(g)F = g(F), \quad g \in G \quad (3)$$

により定義される。表現行列とは元  $g$  が引き起こす座標変換を、対応するベクトル空間に対して書き表したものであり、本論文では  $T(g)$  は直交行列と仮定する。群  $G$  の全ての元  $g$  が引き起こす座標変換に対して、

$$T(g)F(f, u) = F(f, T(g)u), \quad g \in G \quad (4)$$

が成り立つとき、釣合方程式  $F(f, u)$  は群  $G$  に対して同変であると呼ばれる。条件式(4)は変数  $u$  を  $T(g)$  により変換することと、式  $F$  全体を  $T(g)$  で変換したものが同一であることを表す、一般的な幾何学的対称条件である。解  $u$  の不変性は、式(4)と同変性とは全く異なる概念であり、 $T(g)u = u$  ( $g \in G$ ) が成り立つとき、 $u$  は  $G$  不変であると呼ぶ。 $G$  不変な  $u$  に対し接線剛性行列  $J = \partial F / \partial u$  は式(4)により  $T(g)J = JT(g)$  ( $g \in G$ ) という対称条件を満たし、適当な座標変換によりブロック対角化可能である。ある群に対して同変性(4)を持つ釣合方程式も適当な座標変換により、その群の既約表現に対応する式に分解できる<sup>14)</sup>。どのような既約表現が存在するかは、群毎の個別論であるので具体例に即して述べる。

群  $G$  の既約表現行列を

$$T^\mu(g) = T_i^\mu(g), \quad i = 1, \dots, a^\mu, \quad g \in G, \quad \mu \in R(G) \quad (5)$$

と定義する。ここに  $\mu$  は群  $G$  のある既約表現を、 $R(G)$  は既約表現の全体を、 $a^\mu$  は表現行列  $T(g)$  における既

約表現  $\mu$  の重複度を表す。既約表現行列は構造に全く依存せず、群  $G$  のみに依存するものである。この行列に対して一般原理を組み立てておき、各構造物の表現行列  $T(g)$  と既約表現行列との変換行列  $H$  を求めることにより、各構造物の対称性を記述するというのが「群の表現論」の基本的な考え方である。このことは  $T(g)$  を

$$H^T T(g) H = \bigoplus_{\mu \in R(G)} \bigoplus_{i=1}^{a^\mu} T_i^\mu(g), \quad g \in G \quad (6)$$

と各既約表現毎にブロック対角化する変換行列  $H$  を求めることに相当する。ここに  $\bigoplus$  は直和を表す。行列  $H$  の具体形は対象とする変位  $u$  や作用する群  $G$  に依存する個別論であるので、次の章で具体例に即して述べることとする。

解  $u$  の張る空間  $X$  は

$$X = \bigoplus_{\mu \in R(G)} X^\mu \quad (7)$$

と、式(6)に対応する部分空間  $X^\mu$  の直和の形に標準分解 (isotypic or standard decomposition) できる<sup>14)</sup>。この各部分空間が主径路の解や分岐解にそれぞれ対応する。変換行列は  $H \equiv [\dots, H^\mu, \dots]$  と各既約成分に対応するブロック  $H^\mu$  に分解でき、この行列により接線剛性行列を

$$\tilde{J} = H^T J H = \text{diag}[\dots, \tilde{J}^\mu, \dots] \quad (8)$$

とブロック対角化できる。ここに  $\text{diag}[\dots]$  はブロック対角行列を表す。ブロック対角化により、行列のサイズを小さくできることは数値解析上有利である。

既約表現に対応する座標系  $w = [\dots, (w^\mu)^T, \dots]^T$  を

$$u = Hw = \sum_{\mu} H^\mu w^\mu \quad (9)$$

と定義する。式(9)により座標変換すると釣合式(2)は、

$$\tilde{J}^\mu dw^\mu + (H^\mu)^T F_0 = 0 \quad (10a)$$

$$\tilde{J}^\mu dw^\mu = 0, \quad \mu \neq \mu^* \quad (10b)$$

と既約表現に対応する形に分解できる。ここに式(10a)の  $\mu^*$  は単位表現であり、主釣合径路に対応する。一方、式(10b)は  $\tilde{J}^\mu$  が正則である場合には自明解を与え、特異となる場合には分岐モードを与える。 $\tilde{J}^\mu$  が特異となる分岐点でも主釣合径路は式(10a)から何等支障なく求まること<sup>2),10)</sup>、式(10)のブロック分解が特異点の分類に対応すること<sup>11)</sup> はブロック対角化法の大きな利点である。

ある群  $G$  に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られている<sup>2),3),4),9)</sup>。この種の分岐現象には、群の連鎖構造  $G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots$  が対応する。ここに、 $G_i \rightarrow G_{i+1}$  は  $G_i$  不変な解から  $G_{i+1}$  不変な解が分岐することを示す。この式はこの系の対称性が  $G$  不変な状態から、 $G_1$  不変、 $G_2$  不変と低下して行

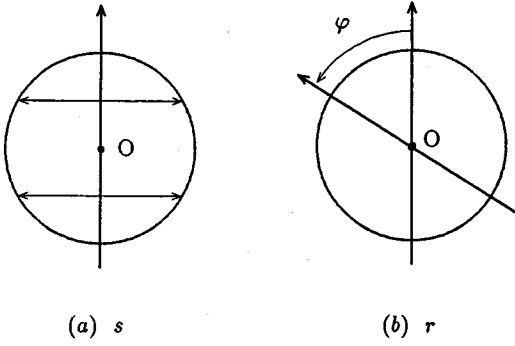


図-2 変換  $s$  と  $r$  の作用

くことに対応している。群  $G, G_1, G_2, \dots$  の分岐構造を各々調べて行くことにより群  $G$  に同変な系の分岐階層構造が数値解析に先立ち先験的に求まるのである。

### 3. $D_\infty$ 同変な系の分岐構造

本論文では特に  $D_\infty$  同変な系の

$$D_\infty \rightarrow D_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \quad (11)$$

という分岐階層構造に着目する。式(11)の  $D_\infty$  は円の対称性を表す群であり、 $D_\infty \equiv \langle s, r(\varphi) \rangle$  と定義される。式中、 $\langle \rangle$  は括弧内の要素から生成されることを示し、 $s$  はある鏡映、 $r(\varphi)$  は反時計回りの  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) の回転(図-2の原点  $O$  回り)である。また、 $D_n \equiv \langle s, r(2\pi/n) \rangle$  は正  $n$  角形状の構造物の対称性を表す二面体群である。式(11)の  $D_n$  以下の部分に現れる、 $D_n$  の部分群は

$$D_m^j \equiv \langle r(2\pi/m), sr(2\pi(j-1)/m) \rangle, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (12a)$$

$$C_m \equiv \langle r(2\pi/m) \rangle \quad (12b)$$

と定義できる。ここで  $D_m = D_m^1$ ,  $C_1 = \langle 1 \rangle$  とし、位数  $m$  の二面体群  $D_m^j$  は  $m$  本の線対称軸に関する線対称性を、巡回群  $C_m$  は角度  $2\pi/m$  に対する回転対称性を、 $C_1$  は非対称モードをそれぞれ表す。

#### (1) $D_\infty$ 不変な解からの1次分岐

$D_\infty$  不変な解からの1次分岐を調べる<sup>3),4)</sup>。群  $D_\infty$  の既約表現の全体は

$$R(D_\infty) = ((1,1)_{D_\infty}, (1,2)_{D_\infty}, (2,1)_{D_\infty}, (2,2)_{D_\infty}, \dots) \quad (13)$$

と表される。ここに、 $(1,1)_{D_\infty}$  と  $(1,2)_{D_\infty}$  は1次既約表現であり、その既約表現行列は  $1 \times 1$  の行列

$$T^{(1,1)_{D_\infty}}(r(\varphi)) = 1, \quad T^{(1,1)_{D_\infty}}(s) = 1 \quad (14a)$$

$$T^{(1,2)_{D_\infty}}(r(\varphi)) = 1, \quad T^{(1,2)_{D_\infty}}(s) = -1 \quad (14b)$$

である。 $(2,n)_{D_\infty}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は2次既約表現であり、その表現行列は下記の  $2 \times 2$  の行列である。

$$T^{(2,n)_{D_\infty}}(r(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \quad (15a)$$

$$T^{(2,n)_{D_\infty}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15b)$$

空間  $X$  の  $D_\infty$  に対する標準分解は

$$X = X^{(1,1)_{D_\infty}} \oplus X^{(1,2)_{D_\infty}} \oplus \left( \bigoplus_{n=1}^{\infty} X^{(2,n)_{D_\infty}} \right) \quad (16)$$

となる。ここに、 $X^{(2,n)_{D_\infty}}$  はさらに

$$X^{(2,n)_{D_\infty}} = X^{(2,n)_{D_\infty}^+} \oplus X^{(2,n)_{D_\infty}^-} \quad (17)$$

と2個の部分空間の直和に分解される。この場合の座標変換行列  $H$  は

$$H = \begin{bmatrix} H^{(1,1)_{D_\infty}}, H^{(1,2)_{D_\infty}}, \\ H^{(2,1)_{D_\infty}^+}, H^{(2,1)_{D_\infty}^-}, H^{(2,2)_{D_\infty}^+}, H^{(2,2)_{D_\infty}^-}, \dots \end{bmatrix} \quad (18)$$

と定義できる。各既約表現に対応するブロック  $H^\mu$  は以下のような対称性を持つように取れる。

$$\Sigma(H^{(1,1)_{D_\infty}}) = D_\infty, \quad \Sigma(H^{(1,2)_{D_\infty}}) = C_\infty \quad (19a)$$

$$\Sigma(H^{(2,n)_{D_\infty}^+}) = D_n, \quad \Sigma(H^{(2,n)_{D_\infty}^-}) = C_n \quad (19b)$$

ここに  $\Sigma(\cdot)$  は括弧の中の行列の列ベクトルの対称性を表す群を意味する。接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{J} = \text{diag} \left[ \tilde{J}^{(1,1)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(1,2)_{D_\infty}}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_\infty}^+}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_\infty}^-}, \tilde{J}^{(2,2)_{D_\infty}^+}, \tilde{J}^{(2,2)_{D_\infty}^-}, \dots \right] \quad (20)$$

となる。1次既約表現に対応する特異点は1個の対角ブロックが特異となる、単純特異点である。単位表現  $(1,1)_{D_\infty}$  は荷重の極大・極小点に、1次既約表現  $(1,2)_{D_\infty}$  は単純対称分岐点に対応する。2次既約表現には2個の同一の対角ブロックに対応するので、対応する特異点は(群論的)2重分岐点になる。特異点で特異となる対角ブロックの種類に応じて、表-1に示すように特異点を分類できる。

#### (2) $D_n$ 不変な解からの分岐

$D_\infty$  同変な系の分岐解として現れる  $D_n$  不変な解の分岐の仕組を調べる<sup>9)</sup>。  $D_n$  の既約表現の全体は

$$R(D_n) = \{ \mu \equiv (d,j)_{D_n} \mid j = 1, \dots, m_d; d = 1, 2 \} \quad (21)$$

により与えられる<sup>10)</sup>。  $(d,j)_G$  は群  $G$  の  $j$  番目の  $d$  次既約表現を意味する。  $m_d$  は同値でない  $d$  次既約表現の個数であり、この場合以下のように与えられる。

$$\begin{cases} m_1 = 4, & m_2 = n/2 - 1, & \text{when } n = \text{even} \\ m_1 = 2, & m_2 = (n-1)/2, & \text{when } n = \text{odd} \end{cases} \quad (22)$$

表-1  $D_\infty$ 不変な系の分岐解の分類

$\det J^\mu = 0$ をみたす $\mu$	$(1,1)_{D_\infty}$	$(1,2)_{D_\infty}$	$(2,n)_{D_\infty}$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	2重分岐点
(分岐) 解の対称性	$D_\infty$	$C_\infty$	$D_n$

表-2  $D_n$ 不変な系の分岐解の分類

$\det J^\mu = 0$ をみたす $\mu$	$(1,1)_{D_n}$	$(1,2)_{D_n}$	$(1,3)_{D_n}$	$(1,4)_{D_n}$	$(2,j)_{D_n}$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	単純対称分岐点	単純対称分岐点	2重分岐点
(分岐) 解の対称性	$D_n$	$C_n$	$D_{n/2}$	$D_{n/2}^2$	$D_{\gcd(j,n)}^k$

表-3  $C_n$ 不変な系の分岐解の分類

$\det J^\mu = 0$ をみたす $\mu$	$(1,1)_{C_n}$	$(1,2)_{C_n}$	$(2,j)_{C_n}$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	2重分岐点
(分岐) 解の対称性	$C_n$	$C_{n/2}$	$C_{\gcd(j,n)}$

1次既約表現  $(1, j)_{D_n}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) の既約表現行列は

$$\begin{cases} T^{(1,1)_{D_n}}(r) = 1, & T^{(1,1)_{D_n}}(s) = 1 \\ T^{(1,2)_{D_n}}(r) = 1, & T^{(1,2)_{D_n}}(s) = -1 \\ T^{(1,3)_{D_n}}(r) = -1, & T^{(1,3)_{D_n}}(s) = 1 \\ T^{(1,4)_{D_n}}(r) = -1, & T^{(1,4)_{D_n}}(s) = -1 \end{cases} \quad (23)$$

である。2次既約表現  $(2, j)_{D_n}$  の既約表現行列は

$$T^{(2,j)_{D_n}}(r) = R^j, \quad T^{(2,j)_{D_n}}(s) = S \quad (24)$$

( $j = 1, 2, \dots$ ) である。ここに、

$$R = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

である。空間  $X$  は群  $D_n$  に関して

$$X = \left( \bigoplus_{j=1}^{m_1} X^{(1,j)_{D_n}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{m_2} X^{(2,j)_{D_n}} \right) \quad (26)$$

という形に標準分解される。ただし、 $X^{(2,j)_{D_n}}$  は

$$X^{(2,j)_{D_n}} = X^{(2,j)_{D_n}^+} \oplus X^{(2,j)_{D_n}^-} \quad (27)$$

とさらに分解される。

座標変換行列は

$$H = \left[ \begin{array}{cccc} H^{(1,1)_{D_n}}, \dots, H^{(1,m_1)_{D_n}}, \\ H^{(2,1)_{D_n}^+}, H^{(2,1)_{D_n}^-}, \dots, H^{(2,m_2)_{D_n}^+}, H^{(2,m_2)_{D_n}^-} \end{array} \right] \quad (28)$$

と定義できる。座標変換行列  $H$  のブロック  $H^\mu$  は以下のような対称性を持つように取れる。

$$\Sigma(H^{(1,1)_{D_n}}) = D_n, \quad \Sigma(H^{(1,2)_{D_n}}) = C_n \quad (29a)$$

$$\Sigma(H^{(1,3)_{D_n}}) = D_{n/2}, \quad \Sigma(H^{(1,4)_{D_n}}) = D_{n/2}^2 \quad (29b)$$

$$\Sigma(H^{(2,j)_{D_n}^+}) = D_{\gcd(j,n)}^k \quad (29c)$$

$$\Sigma(H^{(2,j)_{D_n}^-}) = \begin{cases} D_{\gcd(j,n)}^{k+n'/2}, & \text{when } n' = \text{even} \\ C_{\gcd(j,n)}, & \text{when } n' = \text{odd} \end{cases} \quad (29d)$$

$$n' = n/\gcd(j, n), \quad 1 \leq k \leq n', \quad j = 1, \dots, m_2$$

ここに、 $\gcd(j, n)$  は  $j$  と  $n$  の最大公約数を表す。

接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{J} = \text{diag} \left[ \tilde{J}^{(1,1)_{D_n}}, \dots, \tilde{J}^{(1,m_1)_{D_n}}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_n}}, \tilde{J}^{(2,1)_{D_n}}, \dots, \tilde{J}^{(2,m_2)_{D_n}}, \tilde{J}^{(2,m_2)_{D_n}} \right] \quad (30)$$

となる。特異となる対角ブロックの種類により、表-2に示すように特異点を分類できる。単位表現  $(1, 1)_{D_n}$  は荷重の極大・極小点に、2次既約表現は2重分岐点に対応する。2重分岐点に対応する空間  $X^{(2,j)}$  の対称性は  $C_{\gcd(j,n)}$  であるが、分岐解はより高い対称性  $D_{\gcd(j,n)}^k$  を持つ。

### (3) $C_n$ 不変な解からの分岐

$D_n$ 不変な解から分岐する  $C_n$ 不変な解の分岐の仕組をこの節では調べる<sup>9)</sup>。回転群  $C_n$  の既約表現の個数は

$$\begin{cases} m_1 = 2, \quad m_2 = n/2 - 1, & \text{when } n = \text{even} \\ m_1 = 1, \quad m_2 = (n-1)/2, & \text{when } n = \text{odd} \end{cases} \quad (31)$$

により与えられる。既約表現行列は

$$T^{(1,1)_{C_n}}(r) = 1, \quad T^{(1,2)_{C_n}}(r) = -1, \quad T^{(2,j)_{C_n}}(r) = R^j \quad (32)$$

である。 $D_n$ の場合と同様に空間  $X$  は式(26)の形に、座標変換行列  $H$  は式(28)の形に、接線剛性行列  $\tilde{J}$  のブロック対角形は式(30)の形に分解できる。ただし、式(22)と(31)に示すように、1次既約表現の個数  $m_1$  が  $D_n$  の場合と異なるので、これらの具体形は若干異なること

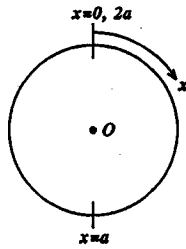


図-3 領域  $[0, 2a]$  の両端をつないだ仮想円

には注意を要する。座標変換行列  $H$  の各既約表現に対応するブロック  $H^\mu$  の対称性は

$$\Sigma(H^{(1,1)}c_n) = C_n, \quad \Sigma(H^{(1,2)}c_n) = C_{n/2} \quad (33a)$$

$$\Sigma(H^{(2,j)}c_n) = \Sigma(H^{(2,j)}c_n) = C_{\text{gcd}(j,n)} \quad (33b)$$

( $j = 1, \dots, m_2$ ) である。表-3に特異点の分類を示す。2重分岐点の分岐解はポテンシャル系にだけ存在する。

#### 4. $D_\infty$ 同変系の分岐構造の退化

長さ  $a$  の領域 ( $0 \leq x \leq a$ ) 上のある (偏) 微分方程式

$$F(f, v) = 0 \quad (34)$$

を考える。ここに、 $v$ は変位である。自明解として  $v = 0$  を持つ分岐問題であることと、境界条件により変位  $v$ は

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \quad (35)$$

という sine の Fourier 級数の形に書けることを仮定する。この仮定から明らかなように、この章の議論は境界条件毎に異なる個別論であるが、その考え方は他の境界条件にも適用可能である。変位ベクトル  $u = (u_1, u_2, \dots)^T$  を定義し、式 (34) を離散化すると、離散化された非線形釣合式 (1) が求まる。

この問題の解の対称性を記述するにあたり、区間  $[0, a]$  を2倍に拡張した解空間  $[0, 2a]$  を考える<sup>2)</sup>。図-3のように、区間  $[0, 2a]$  の両端をつなぐと円になるので、自明解  $v = 0$  は円の対称性 ( $D_\infty$ 不変性) を持ち、式 (34) は  $D_\infty$ 同変系である。境界条件を満足する変位が張る空間を  $X$  とし、一方境界条件を必ずしも満足しない変位が張る空間を拡張した解空間と呼び、 $\hat{X}$  とすると、各々

$$X = \text{span} \left[ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \right]_{n=1}^{\infty} \quad (36a)$$

$$\hat{X} = \text{span} \left[ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right), \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \right]_{n=1}^{\infty} \quad (36b)$$

( $0 \leq x \leq 2a$ ) と表される。ここに、 $\text{span}[\cdot]$  は括弧内の関数により対応する空間が張られていることを示す。空間  $\hat{X}$  に対する分岐の仕組みは2章で既に述べたように既知である。この章ではこの仕組みが境界条件により制限された空間  $X$  上でどのように変化、遺伝するの

かを調べることで、各既約表現に対応する空間  $X^\mu$  を張る Fourier 級数項を求めることとする。

#### (1) $D_\infty$ 不変な解からの1次分岐

この節では、 $D_\infty$ 不変な自明解  $v = 0$  からの1次分岐解について調べる。変換  $r(\varphi)$  と  $s$  の作用は

$$r(\varphi) : x \rightarrow x + \frac{\varphi}{\pi} L, \quad s : x \rightarrow -x \quad (37)$$

と表される。Fourier 級数に対する  $r(\varphi)$  と  $s$  の作用は

$$r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix} = T^{(2,n)}_{D_\infty}(r(\varphi)) \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$s \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix} = T^{(2,n)}_{D_\infty}(s) \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \\ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \end{pmatrix} \quad (39)$$

を満足するので (式 (15) 参照)、 $n$  次モード  $\cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right)$  と  $\sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right)$  が2次の既約表現  $(2, n)_{D_\infty}$  に対応することが分かる。また自明解  $v = 0$  が  $(1, 1)_{D_\infty}$  に対応し、 $(1, 2)_{D_\infty}$  に対応する解は存在しない。

拡張された空間  $\hat{X}$  の標準分解による部分空間を張る項は、式 (16) より

$$\hat{X}^{(1,1)}_{D_\infty} = \text{span} [0], \quad \hat{X}^{(2,n)}_{D_\infty} = \text{span} \left[ \cos\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \right] \quad (40a)$$

$$\hat{X}^{(2,n)}_{D_\infty} = \text{span} \left[ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \right] \quad (40b)$$

である。境界条件により制限を受ける空間  $X$  については cosine の項が存在しないので

$$X^{(1,1)}_{D_\infty} = \text{span} [0] \quad (41a)$$

$$X^{(2,n)}_{D_\infty} = \text{span} \left[ \sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right) \right] \quad (41b)$$

となるが、境界条件による退化のために式 (17) のような分解はもはやできない。式 (41) は、主径路の解は自明解  $v = 0$  であり、 $D_n$ 不変な分岐モード  $\sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right)$  に対応する  $D_\infty \rightarrow D_n$  という分岐が単純分岐点で起こることを表している。この分岐点では2重分岐点が、境界条件により単純分岐点に退化している。また  $D_\infty \rightarrow C_\infty$  という分岐も退化のために、もはや存在しない。

#### (2) $D_n$ 不変な解からの分岐

この節では  $D_n$ 不変な解からの分岐解を求める。 $D_n$ 不変なモード  $\sin\left(n \frac{x}{a} \pi\right)$  の対称性を調べると、図-4のように鏡映の軸が  $n$  の偶奇により異なることに着目し、

$$r \equiv r\left(\frac{2\pi}{n}\right) : x \rightarrow x + \frac{2a}{n} \quad (42)$$

$$s : \begin{cases} x + \frac{a}{2} \rightarrow -(x + \frac{a}{2}), & n = \text{odd} \\ x + \frac{a}{2n} \rightarrow -(x + \frac{a}{2n}), & n = \text{even} \end{cases} \quad (43)$$

と定義する。鏡映の軸の位置にあわせた座標系

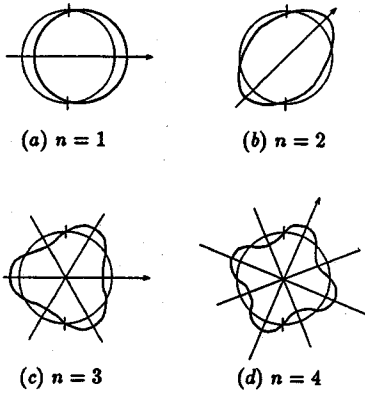


図-4  $n$  の偶奇による鏡映面の位置の変化

$$x^* = \begin{cases} x + \frac{a}{2}, & n = \text{odd} \\ x + \frac{a}{2n}, & n = \text{even} \end{cases} \quad (44)$$

を考えると,  $r$  と  $s$  の作用は

$$r: x^* \rightarrow x^* + \frac{2a}{n}, \quad s: x^* \rightarrow -x^* \quad (45)$$

と書き直せる.  $x^*$  の Fourier 級数に対する  $r$  と  $s$  の作用

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} &= R^i \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{2i}{n} \pi \right) & -\sin \left( \frac{2i}{n} \pi \right) \\ \sin \left( \frac{2i}{n} \pi \right) & \cos \left( \frac{2i}{n} \pi \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} s \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

の仕組を調べることに,  $D_n$  不変な解からの分岐の構造を調べる.  $i$  番目の cosine と sine の項は,  $2i$  が  $n$  の整数倍のときには式 (46) の  $R^i$  が対角行列になるので, 2 個の 1 次既約表現に対応するが, そうでないときには 1 個の 2 次既約表現に対応することが理論展開上重要である.

a)  $n = \text{odd}$  のとき

1 次既約表現  $(1, 1)_{D_n}$  に対応する成分  $v$  は式 (23) より  $s \cdot v = v$ ,  $r \cdot v = v$  を満足する. 式 (46) と (47) から, この  $v$  は波数  $i$  が  $n$  の整数倍のときの  $x^*$  の cosine の項

$$\cos \left( k' n \frac{x^*}{a} \pi \right), \quad k' = 1, 2, \dots \quad (48)$$

であることが分かる. 式 (44) を用いて, この項を  $x$  の関数として書き直すと

$$\cos \left( 2kn \frac{x}{a} \pi \right) \quad \text{or} \quad \sin \left( (2k-1)n \frac{x}{a} \pi \right) \quad (49)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ) である. この式の sine の項だけを取りることにより, 空間  $X^{(1,1)_{D_n}}$  を張る項が

$$X^{(1,1)_{D_n}} = \text{span} \left[ \sin \left( (2k-1)n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=1}^{\infty} \quad (50)$$

と求まる. 式 (41) では  $n$  次の項しかなかったのに, この式では  $n$  の奇数倍の次数の項が存在している. このことは  $D_{\infty}$  不変な主径路から別れた  $D_n$  不変な分岐解は, 分岐点の近傍では綺麗な  $n$  次の sine 波のモードを持つが, モード混合 (mode interaction) により高次の波を励起し, 波形が崩れてしまうことを示している.

1 次既約表現  $(1, 2)_{D_n}$  に対応する成分  $v$  は式 (23) より  $s \cdot v = -v$ ,  $r \cdot v = v$  を満足する. 式 (46) と (47) から, このような  $v$  は波数  $i$  が  $n$  の整数倍のときの  $x^*$  の sine の項である. この項を式 (44) を用いて  $x$  の関数として書き直すと

$$X^{(1,2)_{D_n}} = \text{span} \left[ \sin \left( 2kn \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=1}^{\infty} \quad (51)$$

であることが分る.

2 次既約表現  $(2, j)_{D_n}$  ( $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ ) には波数  $i \neq k'n$  の Fourier 級数が対応する. このような  $i$  を

$$k'n + j, \quad (k'+1)n - j, \quad j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}, \quad k' = 0, 1, \dots \quad (52)$$

と 2 組に分類しておく. 式 (24) より  $R^j = T^{(2,j)_{D_n}}$  であることを用いると, 波数  $i = nk' + j$  に対し, 式 (46) は

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} \cos \left( (k'n + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( (k'n + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \\ = T^{(2,j)_{D_n}} \begin{pmatrix} \cos \left( (k'n + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ \sin \left( (k'n + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

となる. 式 (46) と (53) より, この Fourier 成分のペアが  $j$  番目の 2 次既約表現  $(2, j)$  に対応することが分かる. この Fourier 成分を  $x$  の関数として書き直すと

$$\begin{aligned} &\cos \left( (k'n + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ &\begin{cases} (-1)^{k+\frac{j-1}{2}} \sin \left( (2kn + j) \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k+\frac{n+j}{2}} \cos \left( \{(2k+1)n + j\} \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{k+\frac{j}{2}} \cos \left( (2kn + j) \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k+\frac{j}{2}+n} \sin \left( \{(2k+1)n + j\} \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} \\ & \hspace{15em} j = \text{even} \end{cases} \quad (54)$$

となる ( $k = 0, 1, \dots$ ).  $x^*$  の sine に関する式は, この式で sine と cosine の項を入れ替えたものに符号を除いて等しいので, 省略した. 以後  $x^*$  の sine に関する式は同様に省略する.

同様に, 波数  $i = (k'+1)n - j$  の Fourier 成分のペア

$$\begin{pmatrix} \cos \left( \{(k'+1)n - j\} \frac{x^*}{a} \pi \right) \\ -\sin \left( \{(k'+1)n - j\} \frac{x^*}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \quad (55)$$

表-4 境界条件により退化した  $D_n$  不変な系の分岐解の分類  
(a)  $n = \text{odd}$

$\det J^\mu = 0$ をみたくす $\mu$	$(1, 1)_{D_n}$	$(1, 2)_{D_n}$	$(2, j)_{D_n}^+$	$(2, j)_{D_n}^-$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	単純対称分岐点	単純対称分岐点
(分岐) 解の対称性	$D_n$	$C_n$	$D_{\text{gcd}(j, n)}$	$C_{\text{gcd}(j, n)}$

(b)  $n = \text{even}$

$\det J^\mu = 0$ をみたくす $\mu$	$(1, 1)_{D_n}$	$(1, 2)_{D_n}$	$(1, 3)_{D_n}$	$(2, j)_{D_n}$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	単純対称分岐点	単純対称分岐点
(分岐) 解の対称性	$D_n$	$C_n$	$C_{n/2}$	$C_{\text{gcd}(j, n)}$

が  $j$  番目の 2 次既約表現に対応する。この成分を  $x$  の Fourier 級数として書き直すと

$$\cos \left( \left\{ (k' + 1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) = \begin{cases} \begin{cases} (-1)^{k + \frac{n-j}{2}} \cos \left( \left\{ (2k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k + \frac{j-1}{2}} \sin \left( \left\{ 2(k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} & j = \text{odd} \\ \begin{cases} (-1)^{k - \frac{j}{2} + n} \sin \left( \left\{ (2k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k+1 - \frac{j}{2}} \cos \left( \left\{ 2(k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} & j = \text{even} \end{cases} \quad (56)$$

となる ( $k = 0, 1, \dots$ )。式 (54) と (56) より,  $(2, j)_{D_n}$  に対応する空間  $X^{(2, j)_{D_n}}$  は, さらに

$$X^{(2, j)_{D_n}} = X^{(2, j)_{D_n}^+} \oplus X^{(2, j)_{D_n}^-} \quad (57)$$

と 2 つの空間に分解でき,

$$X^{(2, j)_{D_n}^+} = \text{span} \left[ \sin \left( (2kn + j) \frac{x}{a} \pi \right), \sin \left( \{2(k+1)n - j\} \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (58a)$$

$$X^{(2, j)_{D_n}^-} = \text{span} \left[ \sin \left( \{2(k+1)n - j\} \frac{x}{a} \pi \right), \sin \left( (2k + 1)n + j \right) \frac{x}{a} \pi \right]_{k=0}^{\infty} \quad (58b)$$

となる。各部分空間は

$$\Sigma(X^{(1, 1)_{D_n}}) = D_n, \quad \Sigma(X^{(1, 2)_{D_n}}) = C_n \quad (59a)$$

$$\Sigma(X^{(2, j)_{D_n}^+}) = D_{\text{gcd}(j, n)} \quad (59b)$$

$$\Sigma(X^{(2, j)_{D_n}^-}) = C_{\text{gcd}(j, n)} \quad (59c)$$

という対称性を持つ。

接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{J} = \text{diag} \left[ \tilde{J}^{(1, 1)_{D_n}}, \tilde{J}^{(1, 2)_{D_n}}, \tilde{J}^{(2, 1)_{D_n}^+}, \tilde{J}^{(2, 1)_{D_n}^-}, \dots, \tilde{J}^{((n-1)/2)_{D_n}^+}, \tilde{J}^{((n-1)/2)_{D_n}^-} \right] \quad (60)$$

となる。境界条件による退化のために, ブロック  $\tilde{J}^{(2, j)_{D_n}^+}$  と  $\tilde{J}^{(2, j)_{D_n}^-}$  は, 式 (30) のように同一の行列とならないので, 2 次既約表現  $(2, j)_{D_n}$  に対応する分岐点は単純分岐点に退化する。表-4(a) に特異点を分類する。

b)  $n = \text{even}$  のとき

1 次既約表現  $(1, 1)_{D_n}$  と  $(1, 2)_{D_n}$  にはそれぞれ

$$\cos \left( k' n \frac{x}{a} \pi \right) = \begin{cases} (-1)^k \sin \left( (2k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k+1} \cos \left( 2(k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} \quad (61a)$$

$$\sin \left( k' n \frac{x}{a} \pi \right) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \cos \left( (2k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \\ (-1)^{k+1} \sin \left( 2(k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \end{cases} \quad (61b)$$

( $k = 0, 1, \dots, k' = 1, 2, \dots$ ) が対応するので,

$$X^{(1, 1)_{D_n}} = \text{span} \left[ \sin \left( (2k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (62a)$$

$$X^{(1, 2)_{D_n}} = \text{span} \left[ \sin \left( 2(k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (62b)$$

である。1 次既約表現  $(1, 3)_{D_n}$  と  $(1, 4)_{D_n}$  にはそれぞれ

$$\cos \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) n \frac{x}{a} \pi \right) = \cos \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) n \frac{x}{a} \pi + \left( \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \right) \pi \right) \quad (63)$$

$$\sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) n \frac{x}{a} \pi \right) = \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) n \frac{x}{a} \pi + \left( \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \right) \pi \right) \quad (64)$$

( $k = 0, 1, \dots$ ) が対応する。アンダーラインの項のために, sine や cosine 単独の式にならず, 境界条件により制限された空間  $X$  では,  $(1, 3)_{D_n}$  と  $(1, 4)_{D_n}$  に対応する既約表現が区別できないために,  $r \cdot v = -v$  という作用だけを満足する一つの既約表現  $\mu = (1, 3)_{D_n}$  に退化してしまう。この既約表現には下記の空間が対応する。

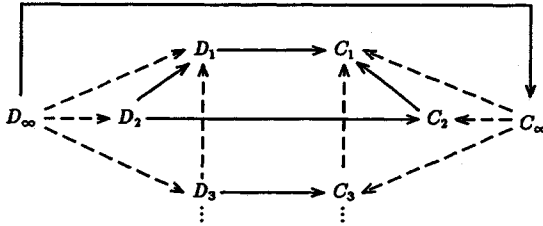
$$X^{(1, 3)_{D_n}} = \text{span} \left[ \sin \left( \left( k + \frac{1}{2} \right) n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (65)$$

2 次既約表現  $(2, j)_{D_n}$  ( $j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$ ) には波数  $i = kn + j$ ,  $(k+1)n - j$  が対応する。この波数の  $x^*$  の項を  $x$  について書き直すと

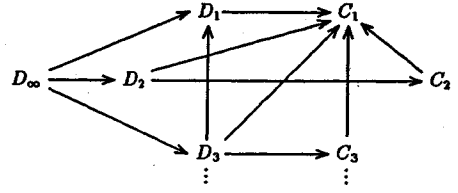
$$\cos \left( (kn + j) \frac{x^*}{a} \pi \right) = \cos \left( (kn + j) \frac{x}{a} \pi + \left( \frac{k}{2} + \frac{j}{2n} \right) \pi \right) \quad (66)$$

表-5  $C_n$ 不変な系の分岐解の分類

$\det \tilde{J}^\mu = 0$ をみたくす $\mu$	$(1,1)_{C_n}$	$(1,2)_{C_n}$	$(2,j)_{C_n}$
特異点の種類	極大・極小点	単純対称分岐点	単純対称分岐点
(分岐) 解の対称性	$C_n$	$C_{n/2}$	$C_{\gcd(j,n)}$



(a) 一般的な場合



(b) 退化した場合

図-5  $D_\infty$ 同変な系の分岐階層構造のダイアグラム

$$\begin{aligned} & \cos \left( \left\{ (k+1)n - j \right\} \frac{x^* \pi}{a} \right) \\ &= \cos \left( \left\{ (k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi + \left( \frac{k+1}{2} - \frac{j}{2n} \right) \pi \right) \end{aligned} \quad (67)$$

となる。アンダーラインの項のために、sine と cosine 単独の式にならず、空間  $X^{(2,j)D_n}$  は式 (27) のようには分解できないので、この空間を張る Fourier 級数は

$$X^{(2,j)D_n} = \text{span} \left[ \sin \left( (kn + j) \frac{x}{a} \pi \right), \sin \left( (k+1)n - j \right) \frac{x}{a} \pi \right]_{k=0}^{\infty} \quad (68)$$

となる。

以上の結果をまとめると空間  $X$  の標準分解は

$$X = X^{(1,1)D_n} \oplus X^{(1,2)D_n} \oplus X^{(1,3)D_n} \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{n/2-1} X^{(2,j)D_n} \right) \quad (69)$$

であることが分る。各部分空間は

$$\Sigma(X^{(1,1)D_n}) = D_n, \quad \Sigma(X^{(1,2)D_n}) = C_n \quad (70a)$$

$$\Sigma(X^{(1,3)D_n}) = C_{n/2} \quad (70b)$$

$$\Sigma(X^{(2,j)D_n}) = C_{\gcd(j,n)} \quad (70c)$$

という対称性を持つ。接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{J} = \text{diag} \left[ \tilde{j}^{(1,1)D_n}, \tilde{j}^{(1,2)D_n}, \tilde{j}^{(1,3)D_n}, \tilde{j}^{(2,1)D_n}, \dots, \tilde{j}^{(2,n/2-1)D_n} \right] \quad (71)$$

となる。境界条件による退化のためにブロック  $\tilde{j}^{(2,j)D_n}$  は、式 (30) のように 2 個のブロックにもはや分解できないことに注目されたし、特異となる対角ブロックの種類に応じて、表-4(b) に示すように特異点を分類できる。

### (3) $C_n$ 不変な解からの分岐

この節では  $C_n$ 不変な解からの分岐解を求める。回転群  $C_n$  の生成元  $r$  が  $x$  の Fourier 級数に及ぼす作用は

$$r \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \end{pmatrix} = R^i \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{2i}{n} \pi \right) & -\sin \left( \frac{2i}{n} \pi \right) \\ \sin \left( \frac{2i}{n} \pi \right) & \cos \left( \frac{2i}{n} \pi \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \\ \sin \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \end{pmatrix}$$

となる。この式から、 $2i/n$  が整数となるような波数  $i$  に対し表現行列  $R^i$  が対角行列となり、1 次既約表現に対応することが分る。各部分空間を張る Fourier 級数は

$$X^{(1,1)C_n} = \text{span} \left[ \sin \left( (k+1)n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (73a)$$

$$X^{(1,2)C_n} = \text{span} \left[ \sin \left( (k+1/2)n \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (73b)$$

$$X^{(2,j)C_n} = \text{span} \left[ \sin \left( (kn + j) \frac{x}{a} \pi \right), \sin \left( \left\{ (k+1)n - j \right\} \frac{x}{a} \pi \right) \right]_{k=0}^{\infty} \quad (73c)$$

となり、接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{J} = \text{diag} [\tilde{j}^{(1,1)C_n}, \tilde{j}^{(1,2)C_n}, \tilde{j}^{(2,1)C_n}, \dots, \tilde{j}^{(2,m_2)C_n}] \quad (74)$$

となる ( $X^{(1,2)C_n}$  と  $\tilde{j}^{(1,2)C_n}$  は  $n$  が偶数のときのみ存在する)。境界条件による退化のためにブロック  $\tilde{j}^{(2,j)C_n}$  は、式 (30) のように 2 個のブロックにもはや分解できない。表-5 に特異点を分類する。

## 5. 分岐階層構造

前節までの結果により、 $D_\infty$ 、 $D_n$ 、 $C_n$  不変な径路からの分岐の規則が明らかになった。これらの分岐の規則を、繰り返し適用すると  $D_\infty$  同変系の分岐階層構



表-6 各部分空間とモードとの対応 ( $N_x = 6$ )

(a) $D_3$	$\mu$	$(1,1)_{D_3}$	$(1,2)_{D_3}$	$(2,1)_{D_3}^+$	$(2,1)_{D_3}^-$
	次数	3	6	1, 5	2, 4
(b) $D_2$	$\mu$	$(1,1)_{D_2}$	$(1,2)_{D_2}$	$(1,3)_{D_2}'$	
	次数	2, 6	4	1, 3, 5	
(c) $D_1$	$\mu$	$(1,1)_{D_1}$	$(1,2)_{D_1}$		
	次数	1, 3, 5	2, 4, 6		
(d) $C_3$	$\mu$	$(1,1)_{C_3}$	$(2,1)_{C_3}$		
	次数	3, 6	1, 2, 4, 5		
(e) $C_2$	$\mu$	$(1,1)_{C_2}$	$(1,2)_{C_2}$		
	次数	2, 4, 6	1, 3, 5		
(f) $C_1$	$\mu$	$(1,1)_{C_1}$			
	次数	1, 2, 3, 4, 5, 6			

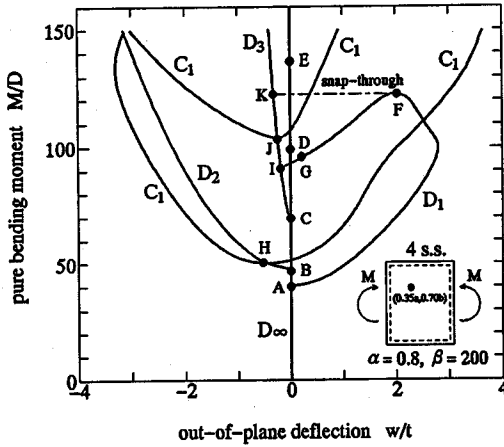


図-6 釣合径路図

造か図-5に示すように求める。図中実線は単純分岐点に、破線は2重分岐点に対応する分岐プロセスをそれぞれ表す。図-5(a)に示す一般的な場合の構造と(b)に示す境界条件により退化する場合の構造とは大きく異なっており、退化の仕組みを考えることの重要性を物語っている。  $D_\infty$  不変な系の分岐構造は、非常に複雑であるが、しっかりとした先験的な規則を持っているので、この規則を踏まえた分岐解析を行うことが望ましい。

## 6. 単純支持された長方形板の分岐解析

数値解析例として図-1に示す単純支持された長方形板を取上げる。式の誘導と数値解析の詳細については文献<sup>15),16),17)</sup>を参照されたし。支配方程式として面外

変位に関する von Kármán の式

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (75)$$

$$\nabla^4 F = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (76)$$

を用いる。ここに  $w \equiv w(x, y)$  は面外たわみを、  $F(x, y)$  は応力関数を、  $t$  は板厚を、  $D \equiv Et^3 / (12(1-\nu^2))$  は板の曲げ剛性を、  $E$  は弾性係数を、  $\nu$  はポアソン比をそれぞれ表す。図-1から明らかなように、この系は純曲げモーメントのために  $y$  軸方向の対称性は存在せず、  $x$  軸方向の鏡映と回転対称性を持つ  $D_\infty$  同変系である。

4 辺単純支持の境界条件を満足する面外たわみを

$$w = t \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} w_{ij} \sin \left( i \frac{x}{a} \pi \right) \sin \left( j \frac{y}{b} \pi \right) \quad (77)$$

と  $x$  方向の項数  $N_x$ 、  $y$  方向の項数  $N_y$  の有限2重 Fourier 級数により近似する。本手法は式(75)に Galerkin 法を適用し、その結果として得られる3次代数方程式を Newton-Raphson 法で解く準解析的手法であり、その幾何学的非線形性は、はり・柱と同じ程度と考えられる。

変数  $w_{ij}$  を並べ替えたベクトルを

$$u = (w_1^T, \dots, w_{N_x}^T)^T, \quad w_i = (w_{\rho_i,1}, \dots, w_{\rho_i, N_y})^T \quad (78)$$

と定義する。ここに、  $\rho_i$  は  $x$  方向の sine 波の並べ替えを表す置換であり、下記のように定義する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N_x \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N_x} \end{pmatrix} \quad (79)$$

数値解析においては、式(77)の Fourier 級数の項数を  $N_x = N_y = 6$  とした。例えば  $D_1$  不変な分岐径路では、式(50)と(51)より、1,3,5次のモードが空間  $X^{(1,1)_{D_1}}$  に対応し、2,4,6次のモードが空間  $X^{(1,2)_{D_1}}$  に対応することがわかる。モードの次数と部分空間との対応を求め、表-6に示す。式(79)の順列を、表-6に従い第4章で求めた部分空間  $X^\mu$  の構成と整合するように、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (80)$$

と選ぶことにより<sup>1)</sup>、  $u$  に関する接線剛性行列をブロック対角化する。

分岐解析を行った結果を図-6に示す。分岐解析は変位の正負の方向に存在するが、両者は物理的に等価な解であるので、図を簡略化するために一方のみ記入した。横軸は  $(x, y) = (0.35a, 0.70b)$  におけるたわみを、縦軸は曲げモーメントをそれぞれ表す。図中に分岐径路の対称群を明記し、特異点を(●)で示す。自明解  $w = 0$  上の特異点 A, ..., E はそれぞれ sine の 1, ..., 5 次の分岐モードに対応する分岐点である。特異点 F は荷重の極大点(飛び移り点)である。分岐点 A, B, C から

<sup>1)</sup> このような並べ替えは鎖適合基底 (chain adapted basis) として一般化されている<sup>10)</sup>。

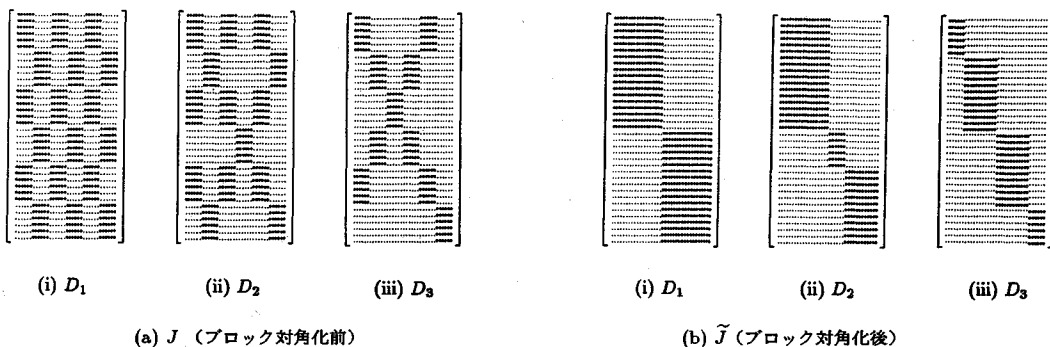


図-7 接線剛性行列の非ゼロ要素の分布

分岐する  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  不変な分岐解を求めた (分岐点  $D$  と  $E$  から分岐する解は省略した).  $D_3$  不変な径路上の分岐点  $I$  でさらに  $D_1$  不変な径路が枝別れし, 主径路から枝別れしてきた別の  $D_1$  不変な径路とつながっている. また  $D_2$  不変な径路上の分岐点  $H$  と  $D_3$  不変な径路上の分岐点  $J$  からは  $C_1$  不変な径路がそれぞれ分岐している. 完全に対称性を失っている  $C_1$  不変な径路からはもはや分岐しない. このように一見非常に複雑な分岐の仕組み, 全て図-5 に示す分岐ダイアグラムの規則に従っており, 本理論の先験性と妥当性を示している.  $C_2$  不変と  $C_3$  不変モードは図-5 中には存在するが, 図-6 中には出現しなかった. このことは, 群論的分岐理論は起こり得る全ての可能性を示すだけであり, 実際にどの可能性が発現するかは, 構造例毎に異なる個別論であることに対応する.

図-7 に各径路上のブロック対角化前後の接線剛性行列  $J$  と  $\tilde{J}$  を示す. 図中  $(\cdot)$  がゼロとなる成分を,  $(\bullet)$  が非ゼロ成分をそれぞれ表す.

$D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  不変な分岐解はそれぞれ分岐点の近傍では 1, 2, 3 次の sine 波に対応する変形モードを持つ. しかし,  $D_1$  不変な分岐径路では分岐点を離れるにつれて, 図-8 に示すように, “mode interaction” により高次モードを励起し波形が崩れてしまう. この mode interaction の仕組は式 (50) により完全に記述されている. 式 (50) より  $D_1$  不変な分岐径路上の変形モードは 1, 3, 5, ... 次の sine 波の重ね合わせである. この数値計算例では, 6 次の項まで取っているため, 1, 3, 5 次の sine 波が mode interaction を起こすことにより, 波形が次第に崩れるのである. 同様に式 (62a) より  $D_2$  不変な分岐径路上の変形モードは 2, 6 次の sine 波が mode interaction を起こす. 一方,  $D_3$  不変な径路では 3 次モードが完全に保存されている. このことは式 (50) より  $D_3$  不変な分岐径路上の変形モードは 3, 9, 15, ... 次の sine 波の重ね合わせであるが, 6 次の項までしか取っていないために mode

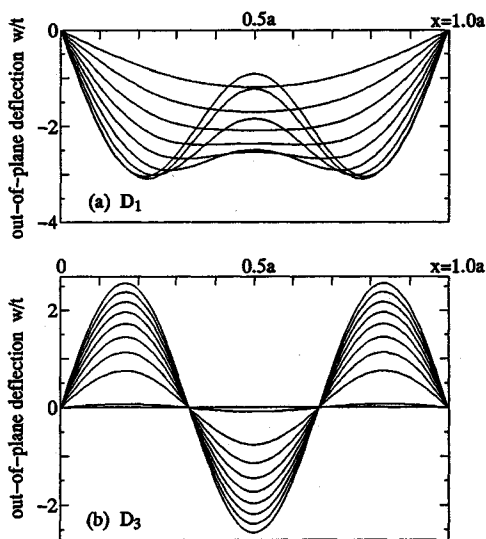


図-8 Mode interaction による面外たわみの進行 ( $y = 0.7b$ )

interaction を起こせないのである. これは一種の離散化誤差であるといえよう.

## 7. 結語

群論的分岐理論の特徴はその先験性にある. この理論により, 可能な分岐の仕組を数値計算に先立ち知ることができる. 分岐解析手法を車だとすれば, 群論的分岐理論は地図のようなものである. 両者が補間しあうことによって本論文で取上げたような複雑な分岐現象も, 必然の積み重ねとして理解できるのである.

## 参考文献

- 1) Baumslag, B. and Chandler, B. : Theory and Problems of Group Theory, Outline Series in Mathematics,

- McGraw-Hill, New York, 1968.
- 2) Fujii, H. and Yamaguti, M. : Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity, *J. Math. Kyoto Univ.*, 20, pp.498-590, 1980.
  - 3) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G. : *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.1, Springer, Berlin, 1985.
  - 4) Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D.G. : *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.2, Springer, Berlin, 1988.
  - 5) van der Waerden, B.L. : *Group Theory and Quantum Mechanics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 214, Springer, Berlin, 1980.
  - 6) Zloković, G. : *Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis*, John Wiley and Sons, Chichester, 1989.
  - 7) Dinkevich, S. : Finite symmetric systems and their analysis, *Int. J. Solids Structures*, Vol.27, No.10, pp.1215-1253, 1991.
  - 8) Healey, T.J. : A group theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry, *Computer Methods Applied Mech. Engng*, 67, pp.257-295, 1988.
  - 9) Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H. : Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol.27, No.12, pp.1551-1573, 1991.
  - 10) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM J. Sci. Statistical Computing*, Vol.12, No. 2, pp.273-297, 1991.
  - 11) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.86, No.2, pp.215-243, 1991.
  - 12) 後藤芳順, 川西直樹, 鳥羽保行, 小畑誠 : 構造物の塑性座屈モードの局所化による変形能の低下と繰り返し荷重下の挙動, *土木学会論文集*, No.483, I-26, pp.87-91, 1993.
  - 13) Ario, I., Ikeda, K., and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *J. of Struct. Mech. Earth. Eng., JSCE*, No.489, I-27, pp.1s-10s, 1994.
  - 14) Serre, J.-P. : *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, New York, 1977.
  - 15) Nakazawa, M., Iwakuma, T., and Kuranishi, S. : Elastic buckling strength and post-buckling behavior of a panel under unequal bending and shear, *Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE*, Vol.8, No.1, pp.11s-20s, 1991.
  - 16) Nakazawa, M., Iwakuma, T., Kuranishi, S., and Hidaka, M. : Instability phenomena of a rectangular elastic plate under bending and shear, *Int. J. Solids Structures*, Vol.30, No.20, pp.2729-2741, 1993.
  - 17) 中沢正利, 池田清宏, 和知聡, 倉西茂 : 等曲げを受ける弾性矩形板に生じる二次座屈現象の解明, 投稿中.

(1994. 3. 29 受付)

## DEGENERATION OF BIFURCATION HIERARCHY OF A RECTANGULAR PLATE DUE TO BOUNDARY CONDITIONS

Kiyohiro IKEDA, Masatoshi NAKAZAWA and Satoshi WACHI

A simply-supported rectangular plate subject to a pure bending undergoes successive hierarchical bifurcation. The bifurcation structure of this plate arises from the "hidden (circular) symmetry" of the periodic nature of its displacement. We will arrive at this structure by means of the concept of irreducible representations in the group-theoretic bifurcation theory. The boundary conditions are revealed to significantly alter the bifurcation structure.