

直交異方性弾性体間の界面き裂周辺の 応力解析に関する基礎的な研究

長瀬裕信¹・中川建治²

¹正会員 工修 (株)熊谷組名古屋支店土木部技術課長 (〒454 名古屋市中西区西日置 1-1-5)
²正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

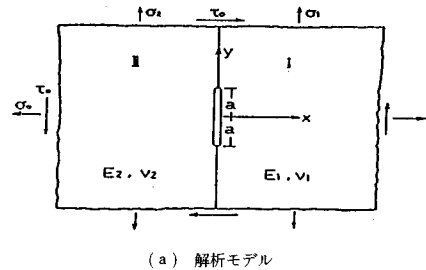
本文は直交異方性弾性体間の境界面に生じているき裂の周辺で振動特異性を持たない有限で滑らかな応力分布を与える解析解を導いたものである。本研究の特徴はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定した点であり、これによって従来の研究では界面き裂周辺の応力が振動特異性を示すという不自然な点を解消して、任意の主軸傾きに対してもプロセスゾーンで滑らかな連続した応力と変位の曲面を表現できた。この解析法は複合材料や異方性の岩盤を対象としたき裂解析に活用できるものである。

Key Words : interface crack, anisotropic composite materials, stress function, finite stress

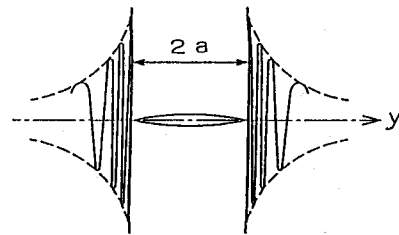
1. はじめに

近年、複合材料の研究開発が進むにつれて弾性定数の異なる材料の接合面に生じている空隙やき裂の応力解析がますます重要になってきている。いわゆるインターフェイスクラック問題であるが土木工学の分野ではこの種の問題が多く、たとえばコンクリートダムの基礎岩盤とその上に打設されたコンクリートとの接合面あるいは LNG 備蓄地下空洞の覆工コンクリートと周辺岩盤との接合部の空隙周辺の応力集中問題、ダム吐き出し部の洗掘部に補修用のファイバーコンクリートを打ち足した場合の接触面不良部分あるいは温度応力によるき裂進展問題などが挙げられよう。

弾性定数が異なる 2 種類の等方性材料の界面き裂の問題は多くの研究者たとえば、Williams¹⁾、Rice と Sih²⁾、England³⁾、Erdogan⁴⁾などによる研究が報告されているが、内在する課題も多い。最も大きな問題は、き裂先端で応力が急激に振動する特異性が現れて変位のめり込みが生じるという工学的には不合理な現象であろう (図-1¹⁾参照)。これらの特異性を回避するために Comninou 等⁵⁾⁻⁹⁾は、き裂先端にせん断抵抗はないが、モード I の引張でありながら圧縮応力が生じて開口はしないコンタクトゾーンを想定したモデルを導入して、上記の不合理性を回避している。しかしこの理論によると応力が振動するコンタクトゾーンの長さが分子レベルのオーダー (10⁻⁴ cm) 以下になるという結果が導かれるので、実際にはこれらの結果は工学上実用的でない。工学的に望まれる異方性体の界面き裂の解はファイバーコンクリー



(a) 解析モデル



(b) き裂先端近傍の応力集中

図-1 Williams 等の解析モデル

トや繊維強化プラスチックなどの複合材料のみならず、自然の地盤、岩盤などのようにきめの荒い不均一性と異方性を示す材料に対して適用可能なものでなければならず、10⁻⁴ cm のオーダーの周期変化を生じるようなものは望ましくない。

他方、工学的応用が期待される直交異方性弾性体界面き裂の問題は重要な課題であるにもかかわらずあまり論じられていない。応力拡大係数自体の定義さえも不明確な状態である。なぜならば、等方性異質弾性体界面き裂

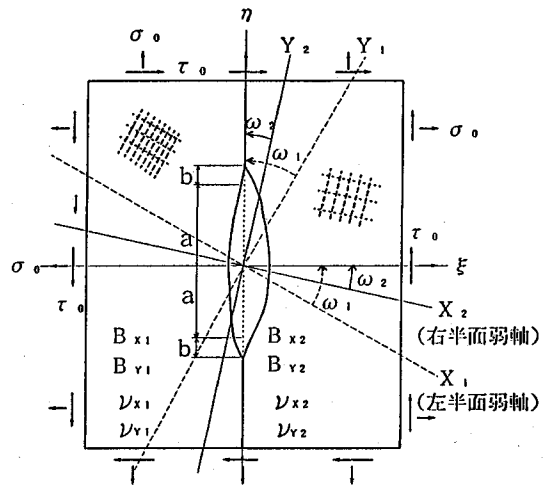
問題と同様にき裂近傍の応力が真性特異点状になること、異方性主軸の傾きにより引張・せん断モードと共に伸縮、面内曲げのモードも同時に混在してその挙動がさらに複雑になるからである。

現在までの直交異方性弾性体界面き裂に関する研究には、Wang 等の研究^{10)~12)}、結城等の研究¹³⁾、著者等^{14)~16)}のフーリエ積分を用いた解析的研究などがあるが、その数は少ない。Wang 等¹¹⁾は、Lekhnitskii の応力ポテンシャルと直交異方性理論に基づいて直交異方性弾性体界面き裂の問題を検討した。しかし、得られた解は問題としている振動特異性を含んでいたためにさらに直交異方性弾性体間に摩擦力のない接触部分を持つような部分的に閉じたモデルも提案した。これらのモデルはき裂先端で $1/\sqrt{r}$ のオーダーの特異性を示すものである。

結城等は、Williams, England, Erdogan が指摘したき裂先端の応力振動や変位のオーバーラップ問題にたいして振動応力は十分小さく無視できるという立場で等方性異質弾性体界面き裂研究を行っている^{17), 18)}。厳密解として従来より与えられている無限板中の界面き裂を引用して振動応力の生じるき裂先端を避けて、き裂先端から離れたところの安定解を採用し、境界要素法により境界上の応力分布を求め外挿法により応力拡大係数を求めている。さらに、直交異方性弾性体界面き裂の応力拡大係数の定義の曖昧さから均質異方性弾性体き裂の応力拡大係数を定義し直して、同様の方法で直交異方性弾性体界面き裂の応力拡大係数を求めている¹³⁾。ただし具体的な解は異方性の主軸と境界面が一致している場合でしかもき裂先端が開口型（引張を受けるケース）のみに限定されている。主軸が任意の傾きを持つ場合の応力拡大係数の定義が明らかにされていないことや、せん断を受けるときの変位のオーバーラップ問題を取り扱い得ていない。

著者等はフーリエ積分を用いて直交異方性弾性体界面き裂問題を解いて報告している^{14)~16)}。この方法は応力関数がフーリエ積分で表わされた重調和関数であるとみなして、開口変位をフーリエ級数の有限項で示されると仮定して開口部の応力や変位の連続条件によりフーリエ係数を決定している。その結果、き裂先端において不合理な真性特異点を消滅させて有限でなめらかな応力集中を表現できた。さらに任意の主軸方向と任意の剛性比を持つ直交異方性弾性体界面き裂の応力集中の分布を求めその有用性を示した。しかし、この解法の限界は境界線上の応力と変位しか得られないことと、プロセスゾーンが小さくなると級数解の収束性が低下することである。

本文では、直交異方性弾性体界面のき裂周辺でも従来の応力の特異性が生じない有限で滑らかな応力分布を与える解析解を導き得たので報告する次第である。これは級数解でないので収束性の問題は生じないものである。



図—2 界面き裂の解析モデル

2. 解析モデルと基礎式

(1) 解析モデルと定数

弾性特性がそれぞれ異なる 2 種類の直交異方性弾性体の半無限板（厚さ一定）が図—2 に示すように直交座標系 (ξ, η) の η 軸 ($\xi=0$) を境界面として接合され、原点を中心にしてインターフェイスクラックが $2a$ の範囲で存在するものとする。それぞれの弾性定数と主軸を以下のように定義する。ここで添字 $j=1, 2$ はそれぞれ左半平面、右半平面を表す。 b は応力と開口変位が共存する部分とする。

j 半平面

ω_j : 最弱 (X_j) 軸より反時計方向で ξ 正軸へ向かう角度

X_j : j 平面の弱軸 (剛さ B_{X_j})

Y_j : j 平面の強軸 (剛さ B_{Y_j})

無限遠点では一様引張応力 σ_0 と一様せん断応力 τ_0 が作用しているものとする。剛性とポアソン比とねじり定数については B_0 を基準剛性として次の関係が成立しているものとする。

$$B_{X_j} = \beta_{X_j}^4 B_0 \quad B_{Y_j} = \beta_{Y_j}^4 B_0 \quad \nu_{Y_j} B_{X_j} = \nu_{X_j} B_{Y_j}$$

G_{XY_j} : せん断弾性定数

κ_j : ねじり定数

$$2\kappa_j = \sqrt{B_{X_j} B_{Y_j} / G_{XY_j}} - 2\nu_{Y_j} \sqrt{B_{X_j} / B_{Y_j}}$$

(2) 直交異方性弾性体の基礎式

主軸座標 (X_j, Y_j) に関して、応力 $\sigma_{X_j}, \sigma_{Y_j}, \tau_{XY_j}$ 、変位 U_j, V_j 、ひずみ $\epsilon_{X_j}, \epsilon_{Y_j}, \gamma_{XY_j}$ と応力関数 $W(X_j, Y_j)$ に関する周知の関係式を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{X_i} &= \partial^2 W / \partial Y_i^2 & \sigma_{Y_i} &= \partial^2 W / \partial X_i^2 \\ \tau_{XY_i} &= -\partial^2 W / \partial X_i \partial Y_i \\ \varepsilon_{X_i} &= \partial U_i / \partial X_i = \sigma_{X_i} / B_{X_i} - \nu_{X_i} \sigma_{Y_i} / B_{Y_i} \\ \varepsilon_{Y_i} &= \partial V_i / \partial Y_i = \sigma_{Y_i} / B_{Y_i} - \nu_{X_i} \sigma_{X_i} / B_{X_i} \\ \gamma_{XY_i} &= \partial V_i / \partial X_i + \partial U_i / \partial Y_i = \tau_{XY_i} / G_{XY_i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (B_{X_i} \partial^4 / \partial X_i^4 + 2\kappa_j \sqrt{B_{X_i} B_{Y_i}} \partial^4 / \partial X_i^2 \partial Y_i^2 \\ + B_{Y_i} \partial^4 / \partial Y_i^4) W(X_i, Y_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(3) 応力関数の一般解

一般解を導くについてまず変数変換を行って、 $X_j = \beta_{X_j} \cdot x_j$, $Y_j = \beta_{Y_j} \cdot y_j$ とすると式(2)は

$$(\partial^4 / \partial x_j^4 + 2\kappa_j \partial^4 / \partial x_j^2 \partial y_j^2 + \partial^4 / \partial y_j^4) W(x_j, y_j) = 0 \quad (3)$$

と基準化される。ここで微分演算子を因数分解すると

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\zeta_j} = \sqrt{(1+\kappa_j)/2} + i\sqrt{(1-\kappa_j)/2} \text{ によって} \\ (\partial / \partial x_j + i\sqrt{\zeta_j} \partial / \partial y_j) (\partial / \partial x_j - i\sqrt{\zeta_j} \partial / \partial y_j) (\partial / \partial y_j \\ + i\sqrt{\zeta_j} \partial / \partial x_j) (\partial / \partial y_j - i\sqrt{\zeta_j} \partial / \partial x_j) W(x_j, y_j) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と表され、一般解は任意関数 $f_1(Z) \sim f_4(Z)$ によって

$$\left. \begin{aligned} W(x_j, y_j) &= f_1(Z_{j1}) + f_2(Z_{j2}) + f_3(Z_{j3}) + f_4(Z_{j4}) \quad (5) \\ \left. \begin{aligned} Z_{j1} &= \sqrt{\zeta_j} x_j + i y_j & Z_{j2} &= \sqrt{\zeta_j} x_j - i y_j \\ Z_{j3} &= \sqrt{\zeta_j} y_j + i x_j & Z_{j4} &= \sqrt{\zeta_j} y_j - i x_j \end{aligned} \right\} \quad (6) \end{aligned} \right\}$$

と表されることになる¹⁹⁾。

(4) $\xi\eta$ 系の一般解

主軸座標軸 (X_j, Y_j) より境界面座標軸 (ξ, η) へ変換する行列は、 $C_j = \cos \omega_j$, $S_j = \sin \omega_j$ と略記すると

$$\begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_j & -\sin \omega_j \\ \sin \omega_j & \cos \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j & -S_j \\ S_j & C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。式(6)を $\xi\eta$ 系で表すと

$$\left. \begin{aligned} Z_{j\frac{1}{2}} &= \left[\sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right] \frac{X_j}{\beta_{X_j}} \pm i \frac{Y_j}{\beta_{Y_j}} \\ &= \left[\sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right] \frac{(C_j \xi - S_j \eta)}{\beta_{X_j}} \pm i \frac{(S_j \xi + C_j \eta)}{\beta_{Y_j}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となるが、ここで境界条件を導入し易い一般解を導くために $Z_{j\frac{1}{2}}$ を複素定数で割った変数 $z_{j\frac{1}{2}}$ を定義する。この点が本研究の1つの特徴である。

$$\left. \begin{aligned} Z_{j\frac{1}{2}} &= \left\{ \left[\pm \frac{C_j}{\beta_{Y_j}} - \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right] + i \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} \right\} \cdot (P_{j\frac{1}{2}} \xi + i\eta) \\ &= \left\{ \left[\pm \frac{C_j}{\beta_{Y_j}} - \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right] + i \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} \right\} z_{j\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{j\frac{1}{2}} &= (P_{j1R} + iP_{j1I}) & z_{j\frac{1}{2}} &= P_{j\frac{1}{2}} \xi + i\eta \\ P_{j\frac{3}{2}} &= (P_{j3R} + iP_{j3I}) & z_{j\frac{3}{2}} &= P_{j\frac{3}{2}} \xi + i\eta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$P_{j\frac{1}{2}} = \frac{\left\{ \frac{C_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} + i \left[\frac{C_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \pm \frac{S_j}{\beta_{Y_j}} \right] \right\}}{\left\{ \left[\pm \frac{C_j}{\beta_{Y_j}} - \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1-\kappa_j}{2}} \right] + i \frac{S_j}{\beta_{X_j}} \sqrt{\frac{1+\kappa_j}{2}} \right\}} \quad (11)$$

すなわち、一般解を $Z_{j\frac{1}{2}}$ の任意の関数であるという定義の代わりにこれと同等な

$$z_{j1} = P_{j1} \xi + i\eta = (P_{j1R} + iP_{j1I}) \xi + i\eta \quad (12)$$

$$z_{j2} = P_{j2} \xi + i\eta = (P_{j2R} + iP_{j2I}) \xi + i\eta \quad (13)$$

による任意関数として定義して解を導くのであるが、この方が境界条件を導入する場合に表現が簡単になる。たとえば、 $j=1$ (左側) でも $j=2$ (右側) でも $\xi \rightarrow \pm 0$ で $z_{11} = z_{12}$, $f(z_{11}) = f(z_{12}) = f(i\eta)$ となるので η 軸上の連続条件が簡単になる。

3. 座標変換した応力と変位

XY 系の応力 $\sigma_X, \sigma_Y, \tau_{XY}$ と $\xi\eta$ 系の応力 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ との応力変換は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2SC \\ S^2 & C^2 & -2SC \\ -SC & SC & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A \\ T_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2SC \\ S^2 & C^2 & 2SC \\ SC & -SC & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial \eta^2 \\ \partial^2 / \partial \xi^2 \\ -\partial^2 / \partial \eta \partial \xi \end{bmatrix} W \\ = \begin{bmatrix} T_B \\ T_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial \eta^2 \\ \partial^2 / \partial \xi^2 \\ -\partial^2 / \partial \eta \partial \xi \end{bmatrix} W \quad (15)$$

XY 系の変位 UV と $\xi\eta$ 系の変位 uv との関係は

$$(u - iv) = e^{i\omega} U - e^{i\omega} iV = e^{i\omega} (U - iV) \quad (16)$$

となるので、ひずみと応力関数 W の関係式は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial U / \partial X \\ \partial V / \partial Y \\ \partial U / \partial Y + \partial V / \partial X \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1/B_X & -\nu_Y/B_Y & 0 \\ -\nu_X/B_X & 1/B_Y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{XY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial Y^2 \\ \partial^2 / \partial X^2 \\ -\partial^2 / \partial X \partial Y \end{bmatrix} W \\ = \begin{bmatrix} T_D \\ T_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial Y^2 \\ \partial^2 / \partial X^2 \\ -\partial^2 / \partial X \partial Y \end{bmatrix} W \quad (17)$$

と表される。変位は境界面上では $\xi\eta$ 系の変位の u, v で扱い、剛性は弾性主軸 XY 系の B_X, B_Y, G_{XY} で取り扱う必要があるため、式(7)より微分変換を導き式(17)を用いて式(18)の変換式を導く。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial \xi \\ \partial v / \partial \eta \\ \partial u / \partial \eta + \partial v / \partial \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix} = T_C \begin{pmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_C \\ T_D \\ T_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2 / \partial \eta^2 \\ \partial^2 / \partial \xi^2 \\ -\partial^2 / \partial \xi \partial \eta \end{pmatrix} W \quad (18)$$

さて、一般解としての応力関数 W_j は、 $z_{j1} = P_{j1}\xi + i\eta$ と $z_{j2} = P_{j2}\xi + i\eta$ との任意関数 $f_{j1}(z_{j1}) \sim f_{j2}(z_{j2})$ で形成されているので

$$\begin{pmatrix} \partial^2 / \partial \eta^2 \\ \partial^2 / \partial \xi^2 \\ -\partial^2 / \partial \xi \partial \eta \end{pmatrix} W_j = \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j1}^2 \\ -iP_{j1} \end{pmatrix} f''_{j1}(z_{j1}) + \begin{pmatrix} -1 \\ P_{j2}^2 \\ -iP_{j2} \end{pmatrix} f''_{j2}(z_{j2})$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 \\ \bar{P}_{j1}^2 \\ i\bar{P}_{j1} \end{pmatrix} f''_{j3}(\bar{z}_{j1}) + \begin{pmatrix} -1 \\ \bar{P}_{j2}^2 \\ i\bar{P}_{j2} \end{pmatrix} f''_{j4}(\bar{z}_{j2}) \quad (19)$$

と表される。式 (19) で導入した材料 $j=1, 2$ に対する応力関数 W_j を用いると変位と応力とは次のように表される。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} R_{j1k} \\ R_{j2k} \\ R_{j3k} \\ R_{j4k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W'_j(z_{j1}) \\ W'_j(z_{j2}) \\ W'_j(z_{j3}) \\ W'_j(z_{j4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\eta \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} T_{j1k} \\ T_{j2k} \\ T_{j3k} \\ T_{j4k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W'_j(z_{j1}) \\ W'_j(z_{j2}) \\ W'_j(z_{j3}) \\ W'_j(z_{j4}) \end{pmatrix} \quad (20)$$

4. 基本開口関数

$z = x + iy$ として y 軸上の区間 $(-t < y < t)$ で虚数曲面が開口を構成する複素関数 $h(z, t)$ の代表例は

$$h(z, t) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{z+it}{z-it} \right) \quad (21)$$

である。この関数による y 軸に沿う開口は $\pm\pi/2$ の長方形のくい違いを生じさせるため、著者等^{20)~22)}が提案している重み積分法を用いて開口形状を平滑化して、同時に応力と開口変位が共存するプロセスゾーン相当の部分 (図-2のb部) を構成する開口関数 $H(z, a, b)$ を次のように導く。

式 (21) を平滑化して滑らかなプロセスゾーンを構成するには4次式の重みを乗じて次のような重み積分をする。

$$\rho_4(t) = C_4(t-a)^2(t-a-b)^2 \quad (22)$$

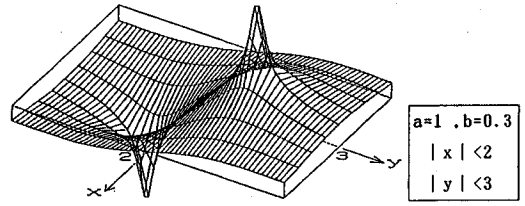


図-3 (a) 関数 $H(z, a, b)$ の実数曲面

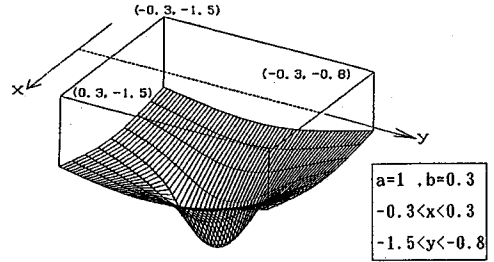


図-3 (b) 関数 $H(z, a, b)$ の実数曲面拡大図

$$H_0(z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho_4 h(z, t) dt$$

$$= \frac{1}{2} C_4 \int_a^{a+b} (t-a)^2 (t-a-b)^2 \cdot \log \left(\frac{z+it}{z-it} \right) dt \quad (23)$$

定数 C_4 は重みの総和が1になるように定める。なお重み積分の誘導の詳細については文献²¹⁾に円周に沿う例を示してある。ここでは直線に沿うものであるから詳細を割愛して結果のみを示す。図-3, 4には原点を中心として y 軸上に界面き裂が存在する場合の次式 (24) の開口関数 $H(z, a, b)$ に対する実数部曲面、虚数部曲面を示す。図より実数曲面の無限項が有限化していること、虚数曲面については y 軸上で0から $\pm\pi/2$ に滑らかに立ち上がることが認識できる。

$$H(z, a, b) = H_0(z, a, b) - H_0(z, -a, -b) \quad (24)$$

$$H_0(z, a, b) = \frac{i}{2b^5} [- \{ (z+ia+ib)^5 - 5(z+ia)(z+ia+ib)^4 + 10(z+ia)^2(z+ia+ib)^3 \cdot \log(z+ia+ib) + \{ (z+ia)^5 - 5(z+ia)^4(z+ia+ib) + 10(z+ia)^3(z+ia+ib)^2 \} \log(z+ia) + \frac{47}{60} \{ (z+ia+ib)^5 - (z+ia)^5 \} - \frac{15}{12} (z+ia)(z+ia+ib) \{ (z+ia+ib)^3 - (z+ia)^3 \} - \frac{55}{3} ib(z+ia)^2(z+ia+ib)^2] \quad (25)$$

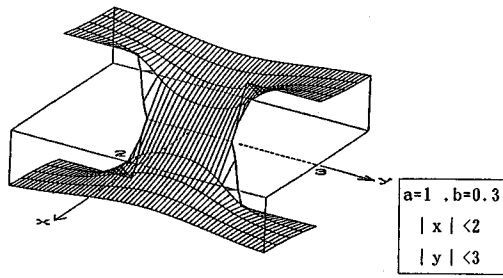


図-4 (a) 関数 $H(z, a, b)$ の虚数曲面

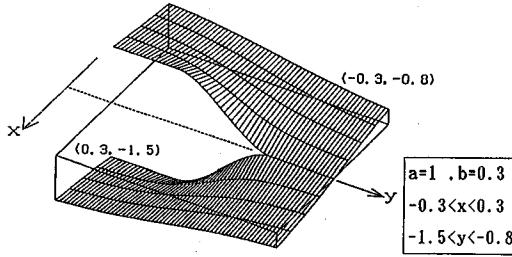


図-4 (b) 関数 $H(z, a, b)$ の虚数曲面拡大図

さて、 $H(z, a, b)$ と z_{j1} とによって異質材料の界面き裂の応力関数となり得る関数を数多く定義できるが、それらの基本となる次のような関数を本研究では基本関数と仮称する。これらはすべて滑らかな開口を形成する関数である。

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(z) &= \cosh\{(1+i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &\quad - \cosh\{(1-i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &= i2\sinh\{H(z, a, b)\}\sin\{\alpha H(z, a, b)\} \\
 f_2(z) &= \sinh\{(1+i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &\quad + \sinh\{(1-i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &= 2\sinh\{H(z, a, b)\}\cos\{\alpha H(z, a, b)\} \\
 f_3(z) &= i[\cosh\{(1+i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &\quad + \cosh\{(1-i\alpha)H(z, a, b)\}] \\
 &= i2\cosh\{H(z, a, b)\}\cos\{\alpha H(z, a, b)\} \\
 f_4(z) &= -i[\sinh\{(1+i\alpha)H(z, a, b)\} \\
 &\quad - \sinh\{(1-i\alpha)H(z, a, b)\}] \\
 &= 2\cosh\{H(z, a, b)\}\sin\{\alpha H(z, a, b)\}
 \end{aligned} \right\} (26)$$

ここで、 α は境界面の連続条件を満足させるための bielastic constant と呼ばれるパラメーターであり実際には z として直交異方性弾性体の左右に合わせて $z \sim z_{j1} \sim z_{j4}$ とするのである。

5. 応力関数

式 (19) で導入した材料 $j=1, 2$ に対する応力関数を W_j とする。式 (20) により直接 W_j は必要でなく、 W_j'

表-1 一般解

	$F_1()$	$F_2()$
解-1	$f_1()$	$f_2()$
解-2	$if_1()$	$if_2()$
解-3	$f_3()$	$f_4()$
解-4	$if_3()$	$if_4()$
高次の解	$z^n f_1()$ $z^n f_3()$ $iz^n f_1()$ $iz^n f_3()$	$z^n f_2()$ $z^n f_4()$ $iz^n f_2()$ $iz^n f_4()$

W_j'' のみを変位、応力に関係するので解関数 F_j と複素定数 $(D_j + id_j)$ の組み合わせで定義して

$$\left. \begin{aligned}
 W_j' &= W_{j1}' + W_{j2}' \\
 W_{j1}' &= (D_{j11} + id_{j11})F_1(z_{j1}) + (D_{j12} + id_{j12})F_1(z_{j2}) \\
 W_{j2}' &= (D_{j21} + id_{j21})F_2(z_{j1}) + (D_{j22} + id_{j22})F_2(z_{j2})
 \end{aligned} \right\} (27)$$

とする。

実際の $F_k()$ は式 (26) で定義した基本関数 $f_k()$ を組み合わせると、すべて本研究が目的としている直交異方性弾性体間の界面き裂の一般解となり得る。ただし、 $n \leq 2$ では無限遠点で応力が発散しない解となり、 $n \geq 3$ の解の中には個別には発散するものの重ね合わせによって無限遠点の応力が有限化する組み合わせが現われる。

式 (27) 中の未定係数は 1 組の一般解に対して $j=1, 2$ となるので、 $D_{j11}, d_{j11}, D_{j12}, d_{j12}, D_{j21}, d_{j21}, D_{j22}, d_{j22}$ からなる 16 個である。

6. 境界条件

16 個の未定係数と bi-elastic constant α とを決定するために境界条件を導入する。式 (9) の変数 z_{j1}, z_{j2} と式 (24) に示した関数 $H(z_{jk})$ はこの段階でも複雑な表現となっている。さらに、応力と変位は式 (20) のように一般解 W_j の 1 次と 2 次導関数を含むので、もしすべての代入演算を行って、応力と変位の関係式を導くとしたならば、いたずらに複雑で冗長な式を扱うことになり不可能に近い。実際にこれだけ複雑な複素関数式をコンピュータで処理するには各段階における関係式 (変数変換行列、関数形、その導関数あるいは逆行列、固有値、逆関数という関係すなわち、本文の式 (1)~(27)) を個別に明示して複素演算を基本にしたサブルーチン処理をする手法を用いるのである。

したがって本文でも敢えてこの手法に合わせて各段階で境界条件を個別に明示するにとどめて煩雑さを回避することにする。

(1) 開口部における応力解放の条件

$\xi=0$, $|\eta|<a$ において $\sigma_\xi=0$, $\tau_{\xi\eta}=0$ である。しかし式 (14) における σ_ξ , $\tau_{\xi\eta}$ は複素数値であるから、

$$R_e[\sigma_\xi]=0, R_e[\tau_{\xi\eta}]=0$$

とする。虚数部には制限を付けない。

(2) 境界線上における変位と応力の連続条件

η 軸上 ($\xi=0$) の $|\eta|>a+b$ で変位 $u_j(\eta)$ と $v_j(\eta)$ が左右で連続していなければならない。かつ応力 σ_ξ , $\tau_{\xi\eta}$ もそれぞれ連続していなければならない。

具体的に解-1 の場合を例にとり条件式の整理をする。

(1) の条件から η 軸 ($\xi=0$) 上で $|\eta|<a$ のとき $F_1(z_{j1})$ と $F_1(z_{j2})$ 及び、 $F_2(z_{j1})$ と $F_2(z_{j2})$ に関して $\sigma_\xi=0$, $\tau_{\xi\eta}=0$ の関係から 8 個の条件式が以下の手順で求められる。

$$W_{j1}'' = (D_{j11} + id_{j11})F_1'(z_{j1}) + (D_{j12} + id_{j12})F_1'(z_{j2}) \quad (28)$$

による応力は式 (29) となる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_\xi \\ \tau_{\xi\eta} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} (T_{j11R} + iT_{j11I}), (T_{j12R} + iT_{j12I}) \\ (T_{j31R} + iT_{j31I}), (T_{j32R} + iT_{j32I}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (D_{j11} + id_{j11})F_1'(z_{j1}) \\ (D_{j12} + id_{j12})F_1'(z_{j2}) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (T_{j11R}D_{j11} - T_{j11I}d_{j11} + T_{j12R}D_{j12} - T_{j12I}d_{j12}) \\ + i(T_{j11I}D_{j11} + T_{j11R}d_{j11} + T_{j12I}D_{j12} + T_{j12R}d_{j12}) \\ (T_{j31R}D_{j11} - T_{j31I}d_{j11} + T_{j32R}D_{j12} - T_{j32I}d_{j12}) \\ + i(T_{j31I}D_{j11} + T_{j31R}d_{j11} + T_{j32I}D_{j12} + T_{j32R}d_{j12}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1'(z_{j1}) \\ F_1'(z_{j2}) \end{pmatrix} \quad (29)$$

もし、 $F_1'(z_{j1})$ が η 軸上の $|\eta|<a$ で実数なら、 $F_1(z_{j1})$ 、 $F_1(z_{j2})$ による $\sigma_\xi=0$, $\tau_{\xi\eta}=0$ であるためには式 (29) 内の実数部が 0 でなければならない。すなわち、

$$\begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{j12R} & -T_{j12I} \\ T_{j32R} & -T_{j32I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{j11R} & -T_{j11I} \\ T_{j31R} & -T_{j31I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \quad (30)$$

もし、 $F_1'(z_{j1})$ が η 軸上の $|\eta|<a$ で虚数なら、 $F_1(z_{j1})$ 、 $F_1(z_{j2})$ による $\sigma_\xi=0$, $\tau_{\xi\eta}=0$ であるためには式 (29) 内の虚数部が 0 でなければならない。すなわち、

$$\begin{pmatrix} D_{j12} \\ d_{j12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{j12I} & T_{j12R} \\ T_{j32I} & T_{j32R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{j11I} & T_{j11R} \\ T_{j31I} & T_{j31R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{j11} \\ d_{j11} \end{pmatrix} \quad (31)$$

となり、 $j=1, 2$ にたいして $F_1'(z_{j1})$ が実数あるいは虚数であることから 4 個の条件式が追加される。 $F_2'(z_{j1})$ に関しても同様にすれば、合計 8 個の条件式が得られることになる。

(2) の条件式からは、 η 軸上 ($\xi=0$) の $|\eta|>a+b$ で変位 $u_j(\eta)$ と $v_j(\eta)$ と応力 σ_ξ , $\tau_{\xi\eta}$ が連続していなければならない。ここで、 $F_{j1}=f_1(z)=i2\sinh(H)\sin(\alpha H)$,

$F_{j2}=f_2(z)=2\sinh(H)\cos(\alpha H)$ とすると、 η 軸上の $|\eta|>a+b$ で、 u_{jR} は式 (26) より

$$\begin{aligned} u_{jR} = & 2\cosh(H_R)\sin(\alpha H_R) \{\pm \cosh(\alpha\pi/2) \\ & \cdot (R_{j11R}D_{j11} - R_{j11I}d_{j11} + R_{j12R}D_{j12} - R_{j12I}d_{j12}) \\ & + \sinh(\alpha\pi/2) (R_{j11R}D_{j21} - R_{j11I}d_{j21} \\ & + R_{j12R}D_{j22} - R_{j12I}d_{j22})\} \\ & + 2\cosh(H_R)\cos(\alpha H_R) \{\sinh(\alpha\pi/2) \\ & \cdot (R_{j11I}D_{j11} + R_{j11R}d_{j11} + R_{j12I}D_{j22} + R_{j12R}d_{j22}) \\ & \pm \cosh(\alpha\pi/2) (R_{j12I}D_{j21} + R_{j12R}d_{j21} \\ & + R_{j12I}D_{j22} + R_{j12R}d_{j22})\} \quad (32) \end{aligned}$$

と表される。ここに現れる複素定数 R_{jik} も T_{jik} と同様にサブルーチン処理 (代入演算) によって中間的に現われる定数であり、詳細は割愛する。

式 (32) をもとにした右側変位 = 左側変位 ($u_{1R} - u_{2R} = 0$) の連続条件式 η 軸に沿う関数 $\cosh(H_R)\sin(\alpha H_R)$ の項 (第 1 項) と $\cosh(H_R)\cos(\alpha H_R)$ の項 (第 2 項) とにまとめられてそれぞれ 0 になる必要があり 2 個の条件式が得られる。詳細は割愛するが同様に、変位 v 、応力 σ_ξ , $\tau_{\xi\eta}$ の連続条件からもそれぞれ 2 個ずつの条件式が得られ合計 8 個となる。

以上のことから解-1 の場合を例にとり境界条件式

(1) (2) 整理をすると次式となる。

$$\begin{pmatrix} -R_{111R}C & R_{111I}C & -R_{211R}C & R_{211I}C & -R_{111R}S \\ -R_{121R}C & R_{121I}C & -R_{221R}C & R_{221I}C & -R_{121R}S \\ -T_{111I}C & -T_{111R}C & -T_{211I}C & -T_{211R}C & -T_{111I}S \\ -T_{131I}C & -T_{131R}C & -T_{231I}C & -T_{231R}C & -T_{131I}S \\ -R_{111I}S & -R_{111R}S & R_{211I}S & R_{211R}S & -R_{111I}C \\ -R_{121I}S & -R_{121R}S & R_{221I}S & R_{221R}S & -R_{121I}C \\ -T_{111R}S & T_{111I}S & T_{211R}S & -T_{211I}S & -T_{111R}C \\ -T_{131R}S & T_{131I}S & T_{231R}S & -T_{231I}S & -T_{131R}C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{111I}S & R_{211R}S & -R_{211I}S \\ R_{121I}S & R_{221R}S & -R_{221I}S \\ -T_{111R}S & T_{211I}S & T_{211R}S \\ -T_{131R}S & T_{231I}S & T_{231R}S \\ -R_{111R}C & -R_{211I}C & -R_{211R}C \\ -R_{121R}C & -R_{221I}C & -R_{221R}C \\ T_{111I}C & -T_{211R}C & T_{211I}C \\ T_{131I}C & -T_{231R}C & T_{231I}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -R_{112R}C & R_{112I}C & -R_{212R}C & R_{212I}C & -R_{112R}S \\ -R_{122R}C & R_{122I}C & -R_{222R}C & R_{222I}C & -R_{122R}S \\ -T_{112I}C & -T_{112R}C & -T_{212I}C & -T_{212R}C & -T_{112I}S \\ -T_{132I}C & -T_{132R}C & -T_{232I}C & -T_{232R}C & -T_{132I}S \\ -R_{112I}S & -R_{112R}S & R_{212I}S & R_{212R}S & -R_{112I}C \\ -R_{122I}S & -R_{122R}S & R_{222I}S & R_{222R}S & -R_{122I}C \\ -T_{112R}S & T_{112I}S & T_{212R}S & -T_{212I}S & -T_{112R}C \\ -T_{132R}S & T_{132I}S & T_{232R}S & -T_{232I}S & -T_{132R}C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{112f}S & R_{212f}S & -R_{212f}S \\ R_{122f}S & R_{222f}S & -R_{222f}S \\ -T_{112f}S & T_{212f}S & T_{212f}S \\ -T_{132f}S & T_{232f}S & T_{232f}S \\ -R_{112f}C & -R_{212f}C & -R_{212f}C \\ -R_{122f}C & -R_{222f}C & -R_{222f}C \\ T_{112f}C & -T_{212f}C & T_{212f}C \\ T_{132f}C & -T_{232f}C & T_{232f}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{112} \\ d_{112} \\ D_{212} \\ d_{212} \\ D_{122} \\ d_{122} \\ D_{222} \\ d_{222} \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

ここで、 $C = \cosh(\alpha\pi/2)$ 、 $S = \sinh(\alpha\pi/2)$ である。条件 (1) による 8 個の条件式から D_{112} 、 d_{112} 、 D_{212} 、 d_{212} 、 D_{122} 、 d_{122} 、 D_{222} 、 d_{222} を消去する。残るのは D_{111} 、 d_{111} 、 D_{211} 、 d_{211} 、 D_{121} 、 d_{121} 、 D_{221} 、 d_{221} の未定係数に関する 8 条件式となる。実際には式を表現せず、コンピュータ処理をしている。

連続条件式 (33) は配列変換によって、 C の項と S の項に分離させることができる。結局 $[h_{11}]$ 、 $[h_{12}]$ 、 $[h_{21}]$ 、 $[h_{22}]$ を 4×4 の小行列として式 (34) のように集約される。

$$\begin{pmatrix} C[h_{11}] & S[h_{12}] \\ S[h_{21}] & C[h_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

さて、未定のパラメータ α を決定しなければならないが $\lambda = \sinh(\alpha\pi/2)/\cosh(\alpha\pi/2) = \tanh(\alpha\pi/2)$ として式 (34) の全体を C で除すると、

$$\begin{pmatrix} [h_{11}] & \lambda[h_{12}] \\ \lambda[h_{21}] & [h_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{111} \\ d_{111} \\ D_{211} \\ d_{211} \\ D_{121} \\ d_{121} \\ D_{221} \\ d_{221} \end{pmatrix} = 0 \quad (35)$$

となる。これは λ を固有値、 D 、 d をベクトルとする固有値問題に帰することを意味している。等方性弾性体の場合の α の条件に比較して直交異方性弾性体の場合の連続条件は式 (34) の 8×8 行列のように高次の固有値問題となるのである。式 (35) をさらに変形すると、

$$\begin{bmatrix} E & \lambda[h_{11}]^{-1}[h_{12}] \\ 0 & E - \lambda^2[h_{22}]^{-1}[h_{21}][h_{11}]^{-1}[h_{12}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ d \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

8 個の未知数が 0 以外の解を持つためには式 (36) の行列式 $\det = 0$ でなければならない。すなわち、 $B_{ij} =$

$[h_{22}]^{-1}[h_{21}][h_{11}]^{-1}[h_{12}]$ として、

$$\det[E - \lambda^2 B] = 0 \quad [B] \{\delta_2\} = \frac{1}{\lambda^2} \{\delta_2\} \quad (37)$$

と表される。固有値 $1/\lambda^2 = 1/\tanh^2 h$ ($\alpha\pi/2$) より α を求めるとベクトル $\{\delta_2\} = (D_{121}, d_{121}, D_{221}, d_{221})$ も決定される。さらに、 $\{\delta_1\} = (D_{111}, d_{111}, D_{211}, d_{211})$ は式 (38) で求められる。

$$E\{\delta_1\} + \lambda[h_{11}]^{-1}[h_{12}]\{\delta_2\} = 0 \quad (38)$$

また、 $(D_{112}, d_{112}, D_{212}, d_{212})$ と $(D_{122}, d_{122}, D_{222}, d_{222})$ は式 (30) (31) から求められ、本研究で求める応力関数が式 (28) (29) から決定できる。

$[B]$ の最大固有値を求めて、 $\lambda = \tanh(\alpha\pi/2)$ から α を求めると直交異方性弾性体間の bi-elastic constant とする。

1 つの α は左右の弾性係数の交換、主軸角 ω_1 、 ω_2 の反転 $-\omega_1$ 、 $-\omega_2$ のそれぞれ (合計 4 例) に対して同値となるので、式 (34) あるいは式 (37) の固有値問題は等方性の場合の 4 倍の次数になるのは当然であり、等方性体に近づくとき固有値は重根となる。この場合これらの解析法は演算処理不能になるが、式 (33)~(38) の煩雑な固有値問題も解消して等方性弾性体中の界面き裂問題の単一固有値 (α , bi-elastic constant) 問題となる^{1)~4), 22)}。

さて表-1 に示した基本曲面を複数組重ね合わせれば、無限遠方で一様引張応力、せん断応力が作用している直交異方性弾性体間の界面き裂周辺の応力集中を表現し得る。この解析解はき裂近傍の応力の振動特性もなく、プロセスゾーンで滑らかな連続した曲面を表現しているので異質弾性体間の界面き裂の解析にも適用できることはいうまでもない。

7. 計算例

(1) せん断力を受ける場合

計算モデルとして、異方性の岩盤とその上に打設されたコンクリート (等方性) との接合不良部の応力集中問題を設定する (例えば重力式ダムの基礎岩着部などが実例となる) 図-2 の右半面を岩盤とみなし弾性係数 $B_{X2} = 2.45 \times 10^3$ MPa、 $B_{Y2} = 4.9 \times 10^3$ MPa (岩盤の弾性係数と異方性は実績²³⁾ から $B_{Y2}/B_{X2} = 2$ とする) $\nu_{Y2} = 0.25$ 、ねじり定数 $\kappa = 0.6$ とし、左半面はコンクリートと想定して $B_{X1} = B_{Y1} = 2.45 \times 10^4$ MPa、 $\nu_{Y1} = 0.2$ 、ねじり定数 $\kappa = 0.95$ とする。き裂長さ $a = 1$ cm、プロセスゾーン $b = 0.3$ cm とした。コンクリートは等方性とみなして主軸角度 $\omega_1 = 0$ と固定し、岩盤の主軸角度 ω_2 は $0 \sim 90^\circ$ まで変化させ、界面き裂周辺の応力集中の特性を把握する。

作用応力は無限遠点でせん断応力 (静水圧などにより

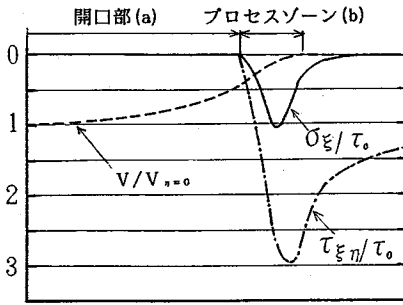


図-5 η軸上の変位と応力

発生する) $\tau_0=1$ が作用している平面応力問題と考える。

せん断応力が作用する場合は、一般解として求められている表-1の基本関数曲面の中よりせん断を表現できる曲面を中心に引張、曲げ、熱応力を主体とする曲面を重ね合わせるにより求めることができる。

主軸角度 $\omega_1=0$, $\omega_2=30^\circ$ の場合の計算結果を図-5~9に示す。開口部近傍の長方形領域に対して長方形の格子上で結果を図化しているが、境界線 (η 軸) 上については $\xi=\pm 0.0001$ の2本の線を設定して図化している。したがって、くい違って (開口して) いない部分は連続性を示していることになる。プロセスゾーン領域の変位 v と応力 σ_ξ , $\tau_{\xi\eta}$ を拡大したものを図-10~12に示す。寸法を明示していないが、界面き裂の問題の解として連続性と開口特性を認識し得るものであろう。これらのことから次の考察ができる。

1) 境界上の開口部において応力条件 $\sigma_\xi=0$, $\tau_{\xi\eta}=0$ は完全に満足され、プロセスゾーンでは従来の研究で現れている工学上不都合な真性特異点は現れず滑らかな応力集中が表現されている。

2) 変位 u , v についても滑らかな開口形状を示し得ている。

3) 著者等がフーリエ級数で解析した研究では、境界面上の変位と応力のみしか求められなかったが、本解析手法では、閉じた解が得られプロセスゾーンの大きさや主軸の傾き、物性値などを任意に設定でき、2次元領域で滑らかな解曲面が得られる。

上記の計算例のデータをそのままにして主軸角度 ω_2 のみを $0\sim 90^\circ$ に変化させた場合の η 軸上の変位 u , v の最大値の変化、 σ_ξ , σ_η 及び $\tau_{\xi\eta}$ の最大値の変化をそれぞれ図-13~14に示す。変位は $\omega_2=0$ の場合の $v_{\max}=v_0$ に対する比率、応力は無限遠点で作用しているせん断応力 $\tau_0=1$ に対する比率として示す。

真性特異点が解消されているために変位も応力も不自然さを伴わないものが得られていることがこれらの計算例より推察されよう。

以上のように本研究は、プロセスゾーンの大きさ、任

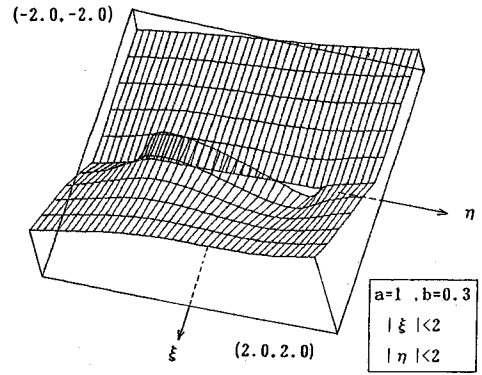


図-6 変位 u

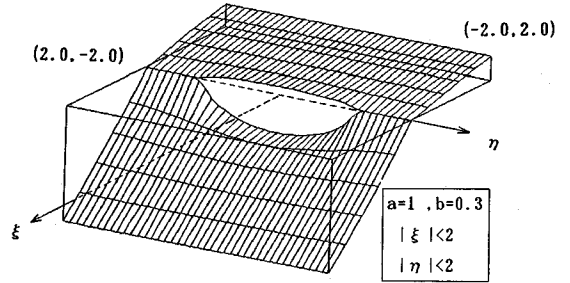


図-7 変位 v

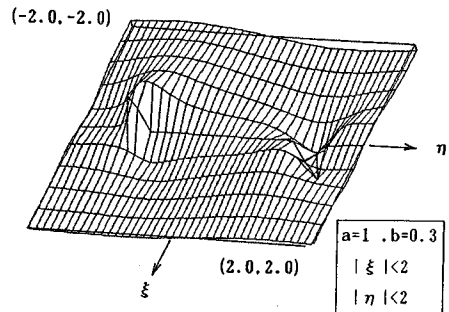


図-8 応力 σ_ξ

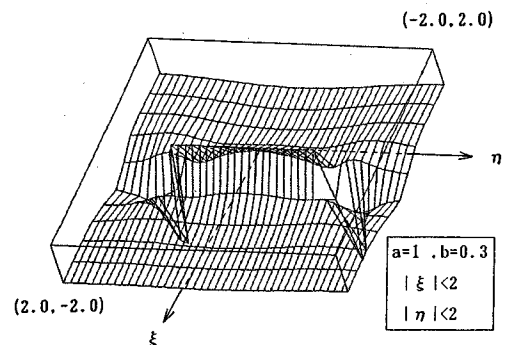


図-9 応力 $\tau_{\xi\eta}$

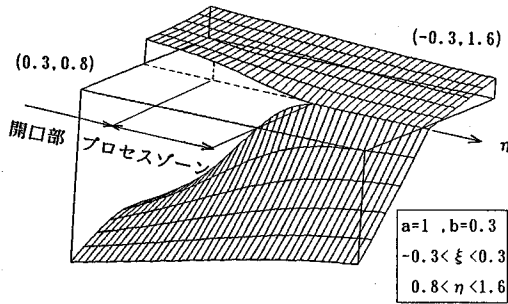


図-10 変位 v の拡大図

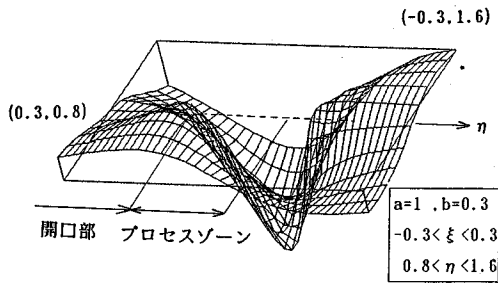


図-11 応力 σ_x の拡大図

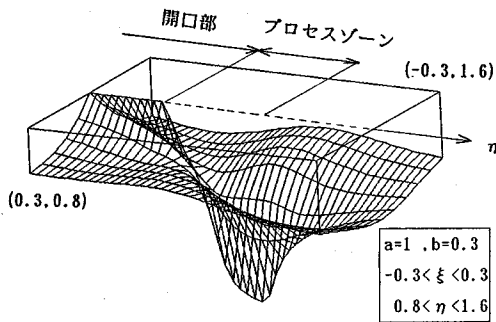


図-12 応力 τ_{xy} の拡大図

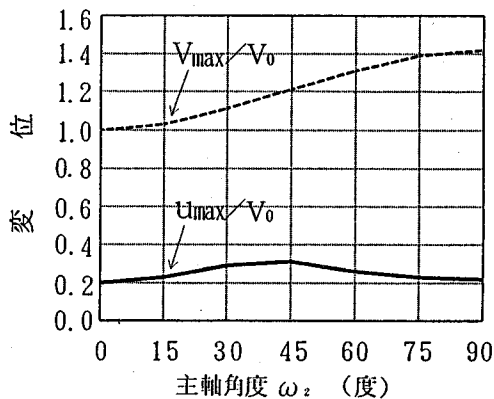


図-13 主軸角度 ω_2 と変位

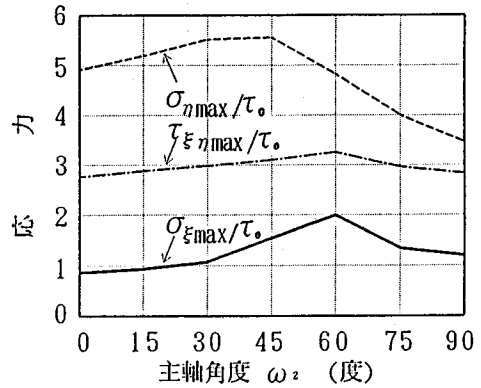


図-14 主軸角度 ω_2 と応力

意の主軸の傾きや物性値に対して解析可能であり、直交異方性弾性体界面き裂の滑らかな応力集中特性を示し得た。

8. むすび

本研究の結果を異質弾性体界面き裂に関する従来の研究と比較してまとめるとつぎのようになる。

(1) 従来の研究では^{1)~4)}き裂近傍で応力分布が真性特異点状となるものであったが、本研究では応力分布が有限で滑らかなものを導き得ることが示された。

(2) 基本的に従来の研究と異なる点はき裂先端で開口変位と応力が共存する区間を設定したことである。これはプロセスゾーン相当部分を近似的に表現する区間とも解釈されよう。この区間を実現させた要因は開口関数として著者等が等方性弾性体中のき裂の研究で提案している関数 $H(z)$ である。

(3) しかし一般解の変数として従来から用いられている Z_j ではなく $z_j = P\xi + i\eta$ という形の変数で解関数を定義して η 軸上の連続条件を簡素化した点と多くの一般解を導いた点が本研究の特徴である。

(4) 任意の主軸角に対して bi-elastic constant α が数値としては定まるが 4 次の固有値問題となり、等方性弾性体の場合のような簡素な関係式は得られない。

(5) 本研究は有限な応力集中を基本とするので、無限大の応力集中を基本とする応力拡大係数を論じ得るものではない。しかし本解法でプロセスゾーン相当区間長を小さくすれば応力集中は限りなく大きくなるが振動は生じないことは容易に確認出来る。この点は留意するに値しよう。

(6) 本解法では $H(z)$ を構成するための重み関数 $\rho(t)$ を他の滑らかな関数で置換しても真性特異点解消の効果は変わらない。しかし応力分布の詳しい形状は変化

するので、計算例で示したものは本解析法で導き得る1つの解とみなされるべきものである。

実際の計測は困難であるが、ある材料に対してプロセスゾーン部の応力分布を計測し得たならば、その形状に近似した応力分布を実現する重み関数を逆解析で数値的に決定し得るはずのものである。すなわち、本解析法は平滑化された応力分布を実現させる一般解の導き方とみなされよう。

(7) 本解析法の工学的な応用はファイバーコンクリートや繊維強化プラスチックなどの複合材料のみならず、不均一性、異方性を強く示す自然の地盤や岩盤を対象にしたき裂解析たとえば、水圧を受けるダムコンクリート岩着部不良箇所の応力集中問題や熱応力を受ける界面き裂解析などに適用が可能である。

(8) 式(21)の分子分母の t を t_1 , t_2 として別々に式(23)の重み積分をほどこすと上下異なるプロセスゾーンが得られ現実的になる。ただし、関数が非常に煩雑となるので本文では省略している。

著者等は同様な方法で無限遠方で曲げおよび熱応力が作用するような場合の解析解も導き得る事を確認している。一連の解析解を整理して適用例を今後示すつもりである。

さらに、今回対象にした中央にき裂を持つ無限接合板のみならず、有限区間で接合された2つの無限板(外部クラック問題)の応力集中の研究を展開していくつもりである。

参考文献

- 1) Williams, M.I. : The stress around a Fault of Crack in Dissimilar Media, *Bull. of Seismological Society of America*, Vol.49, pp.199-204, 1959.
- 2) Rice, J. R. and Sih, G. C. : Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Trans. of the ASME, J. of Appl. Mech.*, 32, pp.418-423, 1965.
- 3) England, A. H. : A Crack between Dissimilar Media, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 32, pp.400-402, 1965.
- 4) Erdogan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 32, pp.403-410, 1965.
- 5) Comninou, M. : The Interface Crack, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 44, pp.631-636, 1977.
- 6) Comninou, M. : A Property of Interface Dislocations, *Philosophical Magazine*, 36, pp.1281-1283, 1977.
- 7) Comninou, M. : The Interface Crack in a Shear Field, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 45, pp.287-290, 1978.

- 8) Comninou, M. and Schmueser, D. : The Interface Crack in a Combined Tension Compression and Shear Field, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 46, pp.345-348, 1979.
- 9) Comninou, M. and Dundurs, J. : On the Behavior of Interface Cracks, *Res. Mechanics*, 1, pp.249-264, 1980.
- 10) Wang, S. S. and Choi, I. : The Interface Crack Behavior in Dissimilar Anisotropic Composites Under Mixed-Mode Loading, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 50, pp.179-187, 1983.
- 11) Wang, S. S. and Choi, I. : The Interface Crack Between dissimilar Anisotropic Composite Materials, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.*, 50, pp.169-178, 1983.
- 12) Wang, S.S. : An Analysis of Delamination in Angle-Ply Fiber-Reinforced Composites, *Trans. of the ASME, J. of Appl. mech.* 47, pp.64-70, 1981.
- 13) 結城良治, 許 金泉 : 直交異方性異材界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集 (A編), 57巻539号, pp.78-85, 1991.
- 14) Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S. : A Mathematical Approach of the Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.36, pp.439-449, 1990.
- 15) Fujii, K., Nakagawa, K., Anma, T. and Duan, S. : The Stress Concentration Ratio of The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.44, pp.1-19, 1993.
- 16) 安間朋寿, 段 樹金, 中川建治 : 直交異方性体中の境界面亀裂周辺の応力集中に関する研究, 土木学会中部支部学術講演会 I-6, 1988.
- 17) 結城良治, 曹 相鳳 : 異材界面き裂の応力拡大係数の境界要素解析, 日本機械学会論文集 (A編), 55巻510号, pp.340-347, 1989.
- 18) 結城良治, 許 金泉 : パーソナルコンピュータによる異材接合継手・界面き裂の境界要素弾性解析, 日本機械学会論文集 (A編), 56巻527号, pp.13-19, 1990.
- 19) 林 毅 (編) : 軽構造の理論とその応用 (上), (財) 日本科学技術連盟, pp.124-129, 1966.9.
- 20) 段 樹金, 児嶋弘行, 中川建治 : 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No. 374/I-6, pp.399-407, 1986.
- 21) 村瀬安彦, 中川建治 : 円形境界面で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No. 483/I-26, pp.41-49, 1994-1.
- 22) Fujii, K., Nakagawa, K., Duan, S. and Kato, Y. : Stress Function With Finite Magnitude of Stress Concentration Around an Interface Crack, *Fract. Mech.*, Vol.47, pp.881-891, 1994.
- 23) 菊地宏吉他 : 土質基礎工学ライブラリー-33, 岩盤挙動の予測と実態, 土質工学会編, pp.48-87, 269-270, 1988.

(1994.2.15 受付)

STUDY ON THE STRESS ANALYSIS AROUND AN INTERFACE CRACK BETWEEN DISSIMILAR ANISOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

Hironobu NAGASE and Kenji NAKAGAWA

The subject of this paper is to analyze the stress function near the interface crack between dissimilar anisotropic composite materials. The character of this study consists in creating a pair of process zone which contains open-displacements and stresses at the crack tips. Then, oscillatory stress singularities at the crack tips vanish and the smoothed stresses and displacements for arbitrary angle of principal axes are obtained. This proposed method may be more practical for analysis of the fracture of dissimilar anisotropic composite materials and rocks.