

**投稿論文 (和文)**  
**PAPERS**

# 塑性ストレッチングの応力速度への 方向依存性を有する弾塑性構成式

橋口公一

正会員 工博, 農博 九州大学教授 農学部農業工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

塑性ストレッチングの方向の応力速度またはストレッチングへの依存性を表現し得るように弾塑性構成式を拡張することは弾塑性論における最も重要な課題の一つである。この目的で種々のモデルが提案されているが、いずれも本文で省察するように、一般負荷状態に適用できるような合理的なものではない。本論文では、構成式の着実な発展を念頭に降伏面は滑らかであるとして、関連流動則に斉0次のストレッチング・テンソルの付加項を導入することにより、上記の依存性を表現できる拡張流動則を提案する。本流動則に基づく弾塑性構成式は、連続性条件、仕事率・剛性緩和等の力学的要求条件を満たし、除荷、再負荷、逆負荷を含む任意の負荷状態に適用できる合理的なものであると考えられる。

*Key Words: constitutive equation, elastoplasticity, flow rule, continuity condition, work rate-stiffness relaxation*

## 1. 序 論

滑らかな塑性ポテンシャルを仮定する従来の弾塑性構成式においては、塑性ストレッチングの方向は応力速度またはストレッチングには依存しない。また、塑性ストレッチングの大きさは、応力速度の降伏面の垂直方向の成分のみに依存し、接線方向の成分に依存しない。これらの依存性は、変形の局所化を生じる塑性不安定現象においては無視できない。これらを適切に表現し得るように構成式を拡張することは、弾塑性論における最も重要かつ未解決な課題の一つである。この目的で、従来、種々のモデルが提案されてきた。しかし、次節で明らかにするように、これらのモデルはいずれも力学的に受け入れ難い問題を有している。

従来より、種々の流動則モデルが提案されているが、力学的合理性を無視すれば、いかなる流動則をも仮定できる。しかし、物質の非可逆変形を適切に表現するには、まず、非可逆変形の構成式が満たすべき力学的要求条件を見出し、これらを満たすものを取捨選択して合理的な流動則を規定する必要がある。本論文では、現象論的立場から、まず、非可逆変形さらには弾塑性変形の構成式が満たすべき力学的要求条件について述べる。これらの要求条件に基づいて、既往の流動則モデルの力学的特性について考察し、これらはいずれも一般負荷に適用可能な合理性

を有するものではないことを指摘する。そこで、弾塑性構成式の着実な発展を念頭に、滑らか(正則)な降伏面を前提として、任意の流動則に対して局所的連続性条件<sup>1),2)</sup>を満たす構成式を規定する。そこで、関連流動則に斉0次のストレッチング・テンソルの付加項を導入することにより、塑性ストレッチングの大きさのみならず方向のストレッチングまたは応力速度への依存性を表現する新たな流動則を提案する。この拡張流動則に基づく構成式は、弾塑性構成則に対する力学的要求条件である仕事率・剛性緩和<sup>1)</sup>を満たし、比例・単調負荷に限定されず、除荷、再負荷および逆負荷を含む一般の負荷状態に適用できる合理的なものであると思われる。さらに、これに基づいて、等方・移動硬化のミーゼス降伏面を持つ金属の構成式を規定し、主偏差ストレッチング平面内で大きさ一定で方向が回転するストレッチングに対する応力速度の応答についての数値実験により、その力学的応答特性を示す。

## 2. 力学的要求条件

後節で、流動則を合理的に拡張、規定する準備として、非可逆変形または弾塑性変形の構成式において満たされるべき力学的要求条件について述べる。なお、時間依存性の無い材料を対象とする。

(1) 可逆/非可逆応答：速度線形/非線形

互いに大きさが等しく、方向が反対のストレッチング・テンソル  $D$  および  $D'$  を与えて、これらによって生じる応力速度テンソルをそれぞれ  $\dot{\sigma}$  および  $\dot{\sigma}'$  と記すとき、 $\dot{\sigma}$  と  $\dot{\sigma}'$  が互いに大きさが等しく、方向反対であれば、 $D$  および  $D'$  は可逆であり、他方、そうでなければ、 $D$  と  $D'$  のうちの少なくとも一つは非可逆であると考えられる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} D' = -D \text{ に対して } \dot{\sigma}' = -\dot{\sigma} : \\ D, D' \text{ のいずれも可逆} \\ D' = -D \text{ に対して } \dot{\sigma}' \neq -\dot{\sigma} : \\ D, D' \text{ のいずれか一つは非可逆} \end{aligned} \right\} (1)$$

なお、 $\sigma$  は応力、 $(\cdot)$  は適当なスピン（例えば、弾塑性構成式の場合の塑性スピン<sup>3)</sup>）を導入した共回転速度を示す。

非時間依存性構成式は、速度変数の同次関数で表わされねばならないが、式(1)により、応力速度  $\dot{\sigma}$  とストレッチング  $D$  の関係は、可逆変形においては線形、非可逆変形においては非線形でなければならないことになる。なお、滑らかな塑性ポテンシャル面、降伏面を仮定する従来の弾塑性構成式は、2.(4)に述べる負荷基準により、最低次の速度非線形、つまり速度半線形を呈している。

(2) 連続性条件

応力状態  $\sigma$  およびストレッチング  $D$  が連続に変化するとき、応力速度  $\dot{\sigma}$  も連続に変化すると仮定する。いいかえれば、応力状態およびストレッチングの無限小の変化に対して、応力速度は有限には変化しないとする。これは、“連続性条件”<sup>2)</sup>と称され、次式で表わされる。

$$\delta\sigma \rightarrow 0, \delta D \rightarrow 0 : \dot{\sigma}(\sigma + \delta\sigma, S_i, D + \delta D) - \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D) \rightarrow 0 \quad (2)$$

ここに、応力および内部状態変数の現在の状態において、ストレッチングに対する応力速度の応答を  $\dot{\sigma}(\sigma, S_i, D)$  で示している。また、 $S_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) は、非可逆変形による力学的応答の変化を表わすスカラーまたはテンソルの内部状態変数をまとめて示している。連続性条件(2)は、ストレッチングに対する応力速度の応答として表されているが、完全塑性状態においては応力速度の連続な変化に対してストレッチングは不連続に変化し得ることから知られるように、逆に、応力速度に対するストレッチングの応答として連続性条件を一般的に表すことはできないことに注意すべきである。

特に、応力状態の連続な変化に対してストレッチングが連続に変化することを“大局的連続性条件”<sup>2)</sup>

と呼ぶが、これは、次式で表される。

$$\delta\sigma \rightarrow 0 : \dot{\sigma}(\sigma + \delta\sigma, S_i, D) - \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D) \rightarrow 0 \quad (3)$$

本条件に抵触すると、次のような問題が生じる。

1) 応力状態が無限小異なるだけであっても、同一のストレッチングに対して有限に異なった応力速度が予測される。また、このような状態が有限期間進行すると同一の変形に対して有限に異なった応力が算定され、応力解の唯一性が失われる。これは、例えば、降伏面の内部を純粋弾性域とする古典論における完全塑性状態において生じる。

2) 応力状態の無限小の変化に対して応力速度-ストレッチング関係が有限に変化するので、比例・単調負荷においても、滑らかな応力-ひずみ曲線は予測されない。これは、材料変形挙動表現の不備な点といえる。

3) 本条件への抵触により応力速度-ストレッチング関係が急変する境界のどちら側に応力があるかの判定が必要である。例えば、降伏面の内部を純粋弾性域とする古典弾塑性構成式においては、降伏到達時に応力速度-ストレッチング関係が急変するので、降伏判定のためのオイラー法<sup>4)</sup>、ラディアル・リターン法<sup>5)</sup>、ミーソ・ノルマル法<sup>6)</sup>等の導入が必要となり、数値計算上の不都合を生じる。これに対して、降伏面の内部を弾性域とする仮定を捨てて、応力が降伏面に近づくにつれて徐々に塑性変形の発生が顕著になる、つまり、滑らかな“弾塑性遷移”を示して大局的連続性条件を満たす下負荷面モデル<sup>7), 8)</sup>においては、降伏判定を必要とせず、このような不都合は伴わない。

他方、ストレッチングの連続な変化に対して応力速度が連続に変化することを“局所的連続性条件”と呼ぶが、これは、次式で表わされる。

$$\delta D \rightarrow 0 : \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D + \delta D) - \dot{\sigma}(\sigma, S_i, D) \rightarrow 0 \quad (4)$$

本条件に抵触すると、無限小異なるストレッチングに対して有限に異なる応力速度が予測される。このような状態が有限期間進行すると同一の変形に対して有限に異なった応力が算定され得ることになる。つまり、応力解の唯一性が失われる。

以後、次のように、ストレッチング  $D$  を弾性ストレッチング  $D^e$  と塑性ストレッチング  $D^p$  に和の形に分解することを前提とする弾塑性論に議論を限定する。

$$D = D^e + D^p \quad (5)$$

ここに、弾性ストレッチングは応力速度に対して次のように線形に関係づけられる。

$$D^e = E^{-1} \dot{\sigma} \quad (6)$$

$E$  は弾性係数テンソルで、一般に、応力および塑性内

部状態変数の関数であり、また、 $( )^{-1}$ は逆テンソルを示す。一方、2.(1)に述べたように、塑性ストレッチング $D^p$ は応力速度に対して非線形に関係づけらねばならない。なお、次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \text{塑性負荷: } D^p \neq 0 \quad (D \neq E^{-1} \dot{\sigma}), \\ \text{塑性除荷: } D^p = 0 \quad (D = E^{-1} \dot{\sigma}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

つまり、塑性負荷および塑性除荷はそれぞれ弾塑性および弾性状態に相当する。

ストレッチングの分解(5)は、塑性変形によるのみ変化する塑性内部状態変数の導入により力学的応答の非可逆な変化を表現する最も簡明な手法であり、この分解によらない非可逆変形論<sup>9),10)</sup>も提案されている中で、弾塑性論の最も基本的な特徴をなしている。

### (3) 仕事率・剛性緩和

2次の仕事率 $w$ に関して次式が成り立つ<sup>1),11)</sup>。

$$w = w^{es} - w^{pr} \quad (8)$$

ここに、

$$w = \text{tr}(\dot{\sigma} D), \quad (9)$$

$$w^{es} = \text{tr}(\dot{\sigma}^e D), \quad (10)$$

$$w^{pr} = \text{tr}(\dot{\sigma}^p D), \quad (11)$$

$$\dot{\sigma} = E D^e, \quad \dot{\sigma}^e = E D^e, \quad \dot{\sigma}^p = E D^p \quad (12)$$

$\text{tr}()$ は対角和を示す。 $\dot{\sigma}^e$ および $\dot{\sigma}^p$ はそれぞれ弾性応力速度および塑性緩和応力速度、また、 $w^{es}$ および $w^{pr}$ は2次のそれぞれ弾性応力仕事率および塑性緩和仕事率と呼ばれる<sup>1),11)</sup>。なお、これらは、2次の弾性仕事率 $w^e = \text{tr}(\dot{\sigma} D^e)$ および塑性仕事率 $w^p = \text{tr}(\dot{\sigma} D^p)$ とは異なることに注意する。Fig. 1に、応力およびストレッチングの方向が一致して固定された単軸負荷状態に限定し、 $\dot{\sigma}$ および $D^e$ を負荷方向のそれぞれ応力速度成分および弾性ストレッチング成分に対して $\dot{\sigma} = E D^e$  ( $E$ : ヤング率。ただし、定数でなくてもよい) が成り立つとして、以上の諸量の関係を示している。なお、 $\varepsilon$ は対数ひずみに他ならない。

また、剛性係数 $D_d$ に関して次式が成り立つ<sup>1),11),12)</sup>。

$$D_d = D_d^e - D_d^{pr}, \quad (13)$$

ここに、

$$D_d = \text{tr}(\dot{\sigma} \frac{D}{|D|}) / |D| = \frac{w}{|D|^2}, \quad (14)$$

$$D_d^e = \text{tr}(\dot{\sigma}^e \frac{D}{|D|}) / |D| = \frac{w^{es}}{|D|^2}, \quad (15)$$

$$D_d^{pr} = \text{tr}(\dot{\sigma}^p \frac{D}{|D|}) / |D| = \frac{w^{pr}}{|D|^2}, \quad (16)$$

$| \cdot |$ は大きさを示し、 $D_d^e$ および $D_d^{pr}$ はそれぞれ弾性剛性係数および塑性緩和剛性係数と呼ばれる<sup>1),11),12)</sup>。

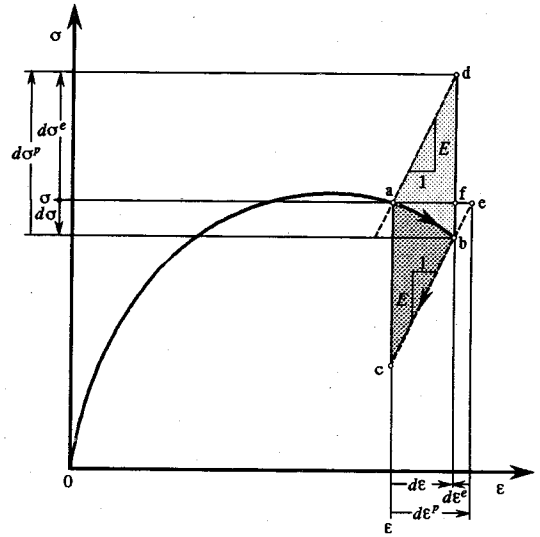
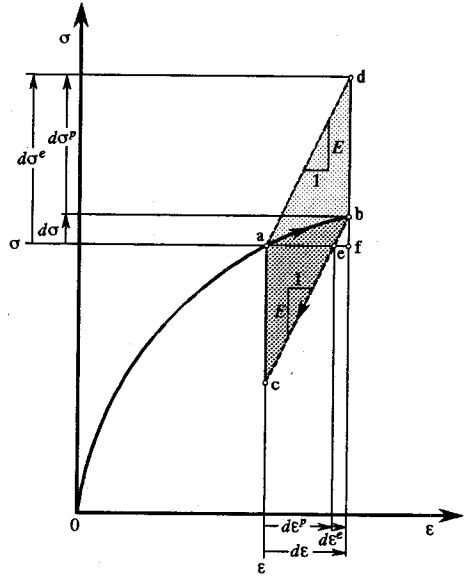


Fig. 1 The second-order work increment  $\Delta abf = W = w(dt)^2/2 = d\sigma d\varepsilon/2$  ( $t$ : time), the second-order elastic work increment  $\Delta adf = W^{es} = w^{es}(dt)^2/2 = d\sigma^e d\varepsilon/2$  and the second-order plastic relaxation work increment  $\Delta adb = W^{pr} = w^{pr}(dt)^2/2 = d\sigma^p d\varepsilon/2$  illustrated for the plastic loading process  $ab$  in the uniaxial loading under the condition that principal directions of stress rate and stretching are fixed coinciding with each other, while  $W^{pr}$  is identical with the work  $\Delta abc$  done during an infinitesimal strain cycle for an incompressible material: (a) hardening and (b) softening, where  $d\varepsilon = D dt$ ,  $d\varepsilon^e = D^e dt$ ,  $d\varepsilon^p = D^p dt$  and  $\sigma = \dot{\sigma} dt$ ,  $d\sigma^e = \dot{\sigma}^e dt$ ,  $d\sigma^p = \dot{\sigma}^p dt$ , letting  $D, D^e, D^p$  and  $\dot{\sigma}, \dot{\sigma}^e, \dot{\sigma}^p$  be uniaxial components of  $D, D^e, D^p$  and  $\dot{\sigma}, \dot{\sigma}^e, \dot{\sigma}^p$ , respectively.

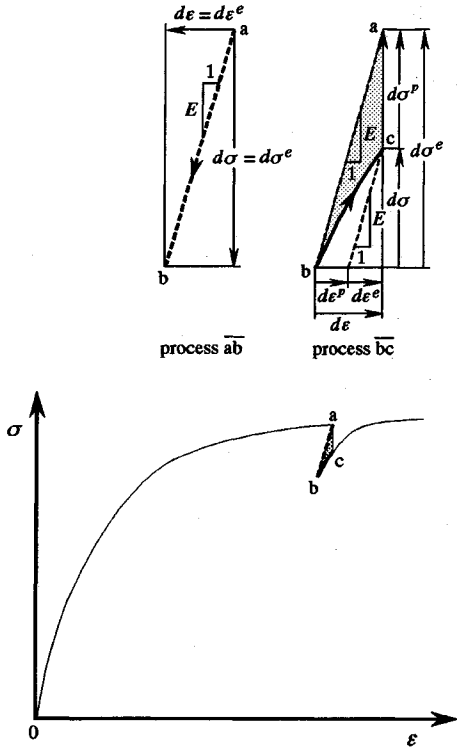


Fig. 2 An example which violates the Ilyushin's postulate of plasticity<sup>15)</sup>. A negative work  $\Delta abc$  is done to a material during the infinitesimal strain cycle formed by the unloading process ( $\overline{ab}$ : elastic deformation process) from an elastoplastic state and the reloading process ( $\overline{bc}$ : elastoplastic deformation process) in the uniaxial loading of incompressible material. On the other hand, the work rate-stiffness relaxation (18) holds even in these processes, i.e.  $w^{pr} = 0$  for the process  $\overline{ab}$  and  $w^{pr} > 0$  for the process  $\overline{bc}$ .

微小変形の間外部作用によってなされる仕事率が、生じた変形を弾性変形とみなして算定される仕事率を上回ることにはないと考えられる。また、剛性係数が弾性剛性係数を上回ることにはないと考えられる。すなわち、

$$w^{pr} \geq 0, D_d^{pr} \geq 0. \quad (17)$$

これらは次の不等式に帰一する。

$$\text{tr}(D^p E D) \geq 0. \quad (18)$$

不等式(17)または(18)は「仕事率・剛性緩和」と呼ばれる<sup>1)</sup>。なお、局所的安定条件<sup>13),14)</sup>  $\text{tr}(\dot{\sigma} D^p) \geq 0$ が成り立つとき、

$$\text{tr}(D^p E D) = \text{tr}(D^p E D^p) + \text{tr}(\dot{\sigma} D^p) \quad (19)$$

により、 $E$ を正定値テンソルとすれば、仕事率・剛性緩和(18)が満たされる。

例えば、降伏面と異なる塑性ポテンシャルを仮定

する非関連流動則は仕事率・剛性緩和に抵触する<sup>1),11)</sup>。

Ilyushin<sup>15)</sup>は、「ひずみのサイクルにおいて物質に対してなされる仕事は非負である」と主張し、これを「塑性の仮説」と称した。しかし、これは、実在材料において必ずしも成り立たない。例えば、非圧縮性材料の単軸負荷についてFig. 2に示すように、弾塑性状態からの除荷過程とその後の再負荷過程による微小なひずみのサイクルにおいては、開いたヒステリシスループを呈して材料に対して負の仕事がなされる。一方、これらの過程においても仕事率・剛性緩和は満たされる。つまり、仕事率・剛性緩和は、応力のサイクルにおいて外部作用によって付加的になされる仕事为非負とするDruckerの仮説<sup>16)</sup>つまり最大塑性仕事の原理より制限の弛い上述のIlyushinの仮説<sup>15)</sup>よりさらに制限が弛い、すなわち、これら3者の中で最も一般性が高いといえる。

#### (4) 負荷基準

ストレッチングの分解(5)は、定義(7)のいずれの変形過程が生じるかの判定を要求する。この判定基準を負荷基準と称する。

応力および塑性内部状態変数により弾性係数テンソル $E$ が唯一に決まり、また、滑らかな単一の降伏面が仮定される場合、負荷基準は次のように与えられる<sup>17),18)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(NED) > 0 \text{ および } f = 0 : D^p \neq 0, \\ \text{tr}(NED) \leq 0 \text{ または } f < 0 : D^p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、降伏面を次式で表している。

$$f(\sigma, H_i) = 0. \quad (21)$$

$H_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )はスカラーまたはテンソルの塑性内部状態変数をまとめて示している。また、 $N$ は降伏面の正規化外向き法線テンソルである。つまり、

$$N = \frac{\partial f}{\partial \sigma} / \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right| \quad (22)$$

負荷基準(20)の力学的解釈は筆者によって与えられている<sup>19)</sup>。なお、負荷基準(20)に従う弾塑性構成式の応力-ストレッチング関係は、滑らかな単一の塑性ポテンシャルに基づく流動則の場合には半線形、また、さらに一般的な流動則の場合には高次の非線形となる。

大局的連続性条件(3)を満たす構成式(例えば、既述のように、下負荷面モデル<sup>7),8)</sup>の場合、弾性から弾塑性状態への滑らかな弾塑性遷移を示し、2.(2)に述べたような、降伏条件が満たされたか否か、つまり、 $f = 0$ と $f < 0$ のいずれかの判定は必要でない。本場合、負荷基準は、簡単に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(NED) > 0 : D^p \neq 0, \\ \text{tr}(NED) \leq 0 : D^p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

滑らかな単一の降伏面を仮定する弾塑性構成式における塑性負荷と除荷の境界においては、局所的連続性条件(4)は次のように表される。

$$\text{tr}(NED) \rightarrow +0; D^p \rightarrow 0 \quad (24)$$

4. に述べるように、適応条件に従う弾塑性構成式は塑性負荷と除荷の境界において、局所的連続性条件を満たす。なお、連続性条件を提唱したHandelman<sup>20)</sup>、Prager<sup>21)</sup>は、数式表現によらず、「応力の中立変化においては弾性および弾塑性構成式は同一のひずみ増分を与える」と述べているが、この記述は、応力増分に対するひずみ増分の応答についてのものであり、2.(2)に述べたように、完全塑性状態においては成り立たない。式(24)は、彼等が対象とした滑らかな単一の降伏面を仮定する弾塑性構成式における塑性負荷と除荷の境界状態に限定された連続性の一般的な数式表現である。

### 3. 既往のモデルに関する省察

塑性ストレッチングの方向の応力速度への依存性およびその大きさの降伏面の接線方向の応力速度成分への依存性を表現する既往のモデルの力学的特性について、以下に考察する。

#### (1) 降伏面の交差<sup>22)~27)</sup>

本モデルは、関連流動則に従う複数の互いに交差する滑らかな降伏面を導入することにより、塑性ストレッチング方向の応力速度への依存性を表現し、また、応力速度空間の半空間を超える広域において塑性ストレッチングが生じるように構成式を拡張することを目指しているといえる。しかし、応力は必ずしも降伏面の交差点にはないので、常にはこれらを表現できない。なお、無数の降伏面を仮定する場合を除いて、応力が降伏面の交差点に存在する確率は低いといえる。本モデルによる境界値問題の解析例はSewell<sup>26),27)</sup>によって示されたが、単軸応力状態からの微小負荷に限定され、ChristoffersenとHutchinson<sup>28)</sup>も述べているように、少なくとも現段階では、本モデルは一般応力状態に対して適用できるものではない。

#### (2) 角点論<sup>28)~33)</sup>

本モデルは、降伏面上に角点さらには突出した(超)錘面の形成を仮定して、降伏面の法線の場の特異点を生じさせることにより、塑性ストレッチングの応力速度への依存性および応力速度空間の広域に対する塑性ストレッチングの発生を表現することを目的としている。しかし、塑性ストレッチングに伴う錘

面の発展則は今なお規定されておらず、むしろ合理的に規定することは不可能に思われる。特に、錘面の中心軸の外向き方向から90°以上の内向き方向を持つ応力速度の場合、錘面は収縮する、つまり、軟化を生じるという不可解な結果となる。本モデルは、移動硬化を考慮した補正<sup>32),33)</sup>が試みられているが、種々の方向の除荷、再負荷、逆負荷を含む一般負荷に適用することは不可能であると思われる。なお、無限小の錘面、いわゆる角点を仮定する場合、応力が正に角点にある場合(弾塑性状態)とその無限小内側にある場合(弾性状態)とで、同一のストレッチングに対して有限に異った応力速度が生じる、すなわち、2.(2)に述べた大局的連続性条件に抵触することになる。なお、本モデルに基づく構成式はかなり複雑であり、解析あるいは数値計算上、不都合な面を生じるといえる。また、応力速度によってストレッチングは表されるが、逆に、ストレッチングによって応力速度を解析的に表すことはできない。通常の変位法に基づく有限要素解析プログラミングにおいては後者の表現が用いられるので、この面でも不都合であるといえる。

#### (3) 亜弾性<sup>34)~42)</sup>

滑らかな単一の降伏面を前提に、関連流動則に従う塑性ストレッチングに加えて、降伏面の接線方向の応力速度成分によるストレッチングを導入する。そのさい、この付加ストレッチングは応力速度に線形に関係づけられるので、一種の亜弾性則<sup>43)</sup>とみなされる。なお、これに属する $J_2$ 変形論<sup>36)</sup>の構成式は、Hencky<sup>44)</sup>の変形論の微分形に帰一し得る。本モデルの提案者<sup>34)~42)</sup>等は、上述の付加ストレッチングを“塑性”ストレッチングと呼んでいるが、負荷基準を含まず応力速度に線形に関係づけられるので、2.(1)に述べたように、付加的な弾性ストレッチングとみなすべきである。なお、何等かの負荷基準を組み込んで付加ストレッチングを塑性ストレッチングとして規定すれば、Mroz<sup>45)</sup>に批判された従前の亜弾性モデル<sup>46)~49)</sup>と同様に、2.(2)に述べた局所的連続性条件に抵触することになる。結局、この亜弾性的アプローチは、弾塑性変形を合理的には表現できないといえる。

#### (4) 応力速度導入の流動則<sup>1),50),51)</sup>

滑らかな単一降伏面を前提に、塑性ストレッチングの方向が降伏面の外向き法線テンソルに加えて斉0次の応力速度テンソルに依存するように関連流動則を拡張する。応力速度とストレッチングの関係は高次の非線形になり、数学的には非可逆変形の表現

が可能である。しかし、以下に述べるように、2.(3)に示した仕事率・剛性緩和(18)を一般に満たし得ず合理性をもたないといえる。

Mroz<sup>50)</sup>は、2変数 $N$ および偏差応力速度 $\dot{\sigma}^*$ の等方関数の表現定理<sup>52)</sup>の単純な2項のみを採用して、次の流動則を提案した。

$$D^p = \text{tr}(N\dot{\sigma}^*) \left( aN + b \frac{\dot{\sigma}^*}{|\dot{\sigma}^*|} \right) \quad (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_m &= \frac{1}{3} \text{tr} \dot{\sigma}, \quad \dot{\sigma}^m = \dot{\alpha}_m I, \\ \dot{\sigma}^* &= \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^m. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$a$ および $b$ は $N$ および $\dot{\sigma}^*$  (斉0次)のスカラー関数であり、また、 $(\dot{\quad})$ は物質時間微分を示す。式(25)は、 $\text{tr} N = 0$ で $\text{tr}(N\dot{\sigma}^*) = \text{tr}(N\dot{\sigma})$ となる特別な場合にのみ局所的連続性条件(24)を満たし、また、塑性荷荷状態で $\text{tr}(N\dot{\sigma}^*) \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$  (硬化または完全塑性)が成り立ち、かつ、弾性特性がフック型で与えられる場合のみ仕事率・剛性緩和(18)を満たす。また、塑性圧縮性体にもみられる塑性ストレッチング方向の平均応力速度への依存性を表現できない。

筆者<sup>1)</sup>は、次の流動則を仮定した。

$$D^p = \lambda \left( N + S_i^m \frac{\dot{\sigma}_i^m}{|\dot{\sigma}_i^m|} + S_i^* \frac{\dot{\sigma}_i^*}{|\dot{\sigma}_i^*|} \right) \quad (27)$$

ここに、 $\lambda$ は正値の比例係数、 $S_i^m$ および $S_i^*$ は材料定数であり、また、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_i &= \dot{\sigma} - \dot{\alpha}_n = \dot{\sigma}_i^m + \dot{\sigma}_i^*, \\ \dot{\alpha}_n &= \text{tr}(N\dot{\sigma})N, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_i^m &= \dot{\sigma}^m - \dot{\sigma}_n^m = \dot{\alpha}_m [I - (\text{tr} N)N], \\ \dot{\sigma}_i^* &= \dot{\sigma}^* - \dot{\sigma}_n^*, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_i^m &= \text{tr}(N\dot{\sigma}^m)N = \dot{\alpha}_m (\text{tr} N)N, \\ \dot{\alpha}_n^* &= \text{tr}(N\dot{\sigma}^*)N, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

塑性非圧縮性体に対しては $S_i^m = 0$ とおかれる。式(27)を降伏条件(21)の適応条件に考慮して規定される構成式は局所的連続性条件を満たす。しかし、硬化挙動 $\text{tr}(N\dot{\sigma}) \geq 0$ またはフック型弾性特性で、塑性非圧縮性 $\text{tr} N = 0, S_i^m = 0$ の場合にのみ、仕事率・剛性緩和(18)を満たし得る<sup>1)</sup>。

結局、流動則(25)および(27)は仕事率・剛性緩和を一般には満たし得ず、また、前者は塑性圧力依存性体には適用できない。また、これらによる構成式においては、応力速度でストレッチングが解析的に表わされるが、その逆の表現は成り立たない。

なお、Wangら<sup>49)</sup>は、砂に対して塑性ストレッチングの方向が偏差応力速度に依存する複雑な流動則を提案している。しかし、これは連続性条件、仕事率

・剛性緩和のいずれも満足しない。

#### 4. 拡張流動則

次の一般的な流動則を仮定しよう。

$$D^p = \ll \lambda \gg P \quad (31)$$

ここに、 $\lambda$ は応力および塑性内部状態変数および応力速度またはストレッチング (斉1次)の関数であり、また、 $P$ は応力、塑性内部状態変数およびストレッチング (斉0次)の関数、つまり、

$$\lambda = \lambda(\sigma, H_i, \dot{\sigma}) \quad \text{または} \quad \lambda(\sigma, H_i, D) \quad (32)$$

$$P = P(\sigma, H_i, D) \quad (33)$$

括弧 $\ll \gg$ は、 $a$ を任意のスカラー変数として、 $\text{tr}(NED) > 0$ および $f(\sigma, H_i) = 0$ のとき $\ll a \gg = a$ 、 $\text{tr}(NED) \leq 0$ または $f(\sigma, H_i) < 0$ のとき $\ll a \gg = 0$ である。なお、大局的連続性条件を満たす構成式においては、負荷基準(23)に応じて、括弧 $\langle \rangle$ は $\text{tr}(NED) > 0$ のとき $\langle a \rangle = a$ 、 $\text{tr}(NED) \leq 0$ のとき $\langle a \rangle = 0$ を示すとして、 $\ll \gg$ を $\langle \rangle$ で置き換える。

降伏条件(21)の適応条件に流動則(31)を代入して次式を得る。

$$D^p = \ll \frac{\text{tr}(N\dot{\sigma})}{D} \gg P \quad (34)$$

$$D = - \sum_{i=1}^n \text{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial H_i} h_i \right) \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right| \quad (35)$$

ここに、 $h_i$ は応力、内部状態変数および $P$ (斉1次)の関数であり、 $H_i$ は $\ll \lambda \gg$ を斉1次で含むので、次の関係が存在する。

$$\dot{H}_i = \ll \lambda \gg h_i \quad (36)$$

なお、式(34)より次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \text{硬化} \quad \text{tr}(N\dot{\sigma}) > 0: D > 0, \\ \text{完全塑性} \quad \text{tr}(N\dot{\sigma}) = 0: D = 0, \\ \text{軟化} \quad \text{tr}(N\dot{\sigma}) < 0: D < 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

一般に $N \neq P$ であるので、式(37)において $\text{tr}(N\dot{\sigma})$ を局所的安定条件<sup>13), 14)</sup>における $\text{tr}(\dot{\sigma}D^p)$ でおきかえることはできない。

式(5)、(6)および(34)により、ストレッチングは次式で与えられる。

$$D = E^{-1} \dot{\sigma} + \ll \frac{\text{tr}(N\dot{\sigma})}{D} \gg P \quad (38)$$

式(34)は、式(1)、(2)により次のように表される。

$$D^p = \ll \frac{\text{tr}(NED)}{D + \text{tr}(NEP)} \gg P \quad (39)$$

明らかに、式(39)は、 $\text{tr}(NED) = 0$ が成り立つ塑性負荷と除荷の境界における局所的連続性条件(24)を満

たす。

式(39)の括弧  $\ll \gg$  内の量は正でなければならないので、テンソル  $P$  は任意ではありえず、次の不等式を満たさねばならない。

$$\text{tr}(NED) > 0: D + \text{tr}(NEP) > 0 \quad (40)$$

さらに、仕事率・剛性緩和(18)により、 $P$  は次の不等式を満たさねばならない。

$$\text{tr}(NED) > 0: \text{tr}(PED) > 0 \quad (41)$$

式(5)、(6)および(39)により、応力速度は次式で与えられる。

$$\dot{\sigma} = ED - E \ll \frac{\text{tr}(NED)}{D + \text{tr}(NEP)} \gg P \quad (42)$$

流動則(31)における関数  $P$  として次式を仮定しよう。

$$P = N + P_i^* \frac{D_v}{|D^*|} I + P_i^* \frac{D^*}{|D^*|} \quad (43)$$

ここに、

$$D_v = \text{tr} D, \quad D^* = D - \frac{1}{3} D_v I \quad (44)$$

$P_i^*$  および  $P_i^*$  は材料定数であり、また、 $I$  は単位テンソルである。式(43)のストレッチングに関する第2、3項の前者は偏差ストレッチングに対する体積ストレッチングの比に関するもので、後者は偏差ストレッチングの方向に関するものである。本流動則に対する塑性係数  $D$  は、ストレッチングを斉0次で含むが応力速度を含まないので、応力速度はストレッチングで表される。なお、 $D = E^{-1} \dot{\sigma} + D^p$  の関係を式(39)、(43)に代入することにより、塑性ストレッチングと応力速度の関係が得られる。しかし、一般に、式(42)の逆関係、つまり、応力速度のストレッチングによる表現式は得られない。式(43)におけるストレッチングの項は体積成分と偏差成分に分離されているので、 $\text{tr} N = 0$  および  $P_i^* = 0$  のとき、

$$\text{tr} D^p = 0 \quad (\text{tr} P = 0) \quad (45)$$

が成り立ち、塑性非圧縮性が表される。

以下では、等方線形弾性、つまり次のフック型の弾性係数が成り立つ場合について考える。

$$E_{ijkl} = L \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (46)$$

ここに、 $L$  および  $G$  は弾性体におけるそれぞれラメ定数およびせん断弾性係数に相当し、また、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。なお、 $\text{tr} N = 0$ 、 $P_i^* = 0$  および式(46)に対して

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(NED) &= 2G \text{tr}(ND) = 2G \text{tr}(ND^*), \\ \text{tr}(NEP) &= 2G \{1 + P_i^* \text{tr}(ND^*)/|D^*|\} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

が成り立ち、また、塑性係数  $D$  は、速度変数としては偏差ストレッチング  $D^*$  のみに依存する。それゆえ、本場合、流動則(43)による塑性ストレッチング(39)は、速度変数としては  $D^*$  のみに依存し、関係

$D^* = \dot{\sigma}^*/(2G) + D^p$  ( $\dot{\sigma}^*$ : 偏差応力速度) により平均応力速度には独立となり、既述の塑性非圧縮性に加えて塑性的圧力非依存性が表わされる。なお、式(47)より、次式が成り立つ。

$$\text{tr}(NED) > 0: \text{tr}(NEP) > 0 \quad (48)$$

流動則(43)は、フック型の弾性特性(46)に対して次式を満たす。

$$\begin{aligned} \text{tr}(NED) &> 0: \\ \text{tr}(PED) &= \text{tr}(NED) + (3L + 2G)P_i^* \frac{D_v^2}{|D^*|} + 2GP_i^* |D^*| \geq 0 \end{aligned} \quad (49)$$

結局、流動則(43)による構成式(42)は局所的連続性条件(4)および仕事率・剛性緩和(18)を満たす。なお、特に繰返し負荷の場合には、本構成式は、前論文<sup>2)</sup>で明らかにしたように、大局的連続性条件を満たす下負荷面モデル<sup>8)</sup>に組み込まれることが望まれる。

## 5. 金属の構成式

本節では、流動則(43)による式(42)に基づいて、結晶相互のすべりによって塑性変形が生じる金属の弾塑性構成式を規定する。

まず、次の等方・移動硬化のミーゼス降伏条件を仮定する。

$$f(\hat{\sigma}) - F(H) = 0 \quad (50)$$

ここに、

$$f(\hat{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} |\hat{\sigma}|, \quad (51)$$

$$\hat{\alpha} = K_1 \hat{\sigma} - K_2 \alpha, \quad (52)$$

$$K_1 = k_1 |D^p|, \quad K_2 = k_2 |D^p|, \quad (53)$$

$$F = F_0 [1 + h_1 \{1 - \exp(-h_2 H)\}], \quad (54)$$

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} |D^p|. \quad (55)$$

$\alpha$  は背応力を表し、 $\hat{\sigma}$  および  $\hat{\sigma}^*$  は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma} = \sigma - \alpha, \quad (56)$$

$$\hat{\sigma}_m = \frac{1}{3} \text{tr} \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma}^* = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}_m I. \quad (57)$$

$K_1$  および  $K_2$  は一般に塑性ストレッチング(斉1次)、応力および塑性内部状態変数の関数であるが、 $k_1$  および  $k_2$  は材料定数である。また、 $F_0$  は  $F$  の初期値、 $h_1$  および  $h_2$  は材料定数である。

降伏条件(50)の適応条件に流動則(31)を代入して、塑性係数  $D$  は次式で与えられる。

$$D = \text{tr}(Na) + F^1 h / \left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right| (> 0), \quad (58)$$

ここに、



$$N = \frac{\hat{\sigma}^*}{|\hat{\sigma}^*|}, \quad (59)$$

$$a = \hat{\alpha} / \langle\langle \lambda \rangle\rangle = (k_1 \hat{\sigma} - k_2 \alpha) |P|, \quad (60)$$

$$F' = \frac{dF}{dH} = F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H) (>0), \quad (61)$$

$$h = \dot{H} / \langle\langle \lambda \rangle\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |P|, \quad (62)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right| = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (63)$$

$\text{tr}(Na) = \text{tr}(N\hat{\alpha}) / \langle\langle \lambda \rangle\rangle > 0$ ,  $F' > 0$  および  $h > 0$  であるので,  $D > 0$  (硬化  $\text{tr}(N\hat{\sigma}) > 0$ ) が成り立つ. このことと式(48)により, 不等式(40)が満たされる.

さらに, 式(43)において  $P_i^m = 0$  として, テンソル  $P$  を

$$P = N + P_i^* \frac{D^*}{|D^*|} \quad (64)$$

を与え, また, 弾性特性はフック型の式(46)で与えられるとする.

## 6. 力学的応答に関する数値実験

5. に規定した金属の構成式における材料定数および材料関数の初期値を次のように与える.

$$\begin{aligned} G &= 5,000 \text{ MPa}, \\ F_0 &= 100 \text{ MPa}, h_1 = 1, h_2 = 100, \\ \alpha_0 &= 0 \text{ MPa}, k_1 = k_2 = 0, \\ P_i^* &= 0, 1, 100, \end{aligned}$$

ここに,  $\alpha_0$  は  $\alpha$  の初期値である.

まず, 主偏差ストレッチング平面内で比例成分  $D_{11} (> 0)$ ,  $D_{22} = D_{33} = -D_{11}/2$ ,  $D_{12} = D_{23} = D_{31} = 0$  を持つストレッチングを, 応力が  $\sigma = 0$  MPa から  $\sigma_{11} = 73.34$  MPa,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = -\sigma_{11}/2$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$  MPa ( $|\sigma| = 89.81$  MPa,  $F = 110.00$  MPa) になるまで与える. なお, このとき, 応力は主偏差応力平面において直線経路を描く. その後, Fig. 3(a) に示すように, 大きさが  $|D| = 5.00 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$  で, 主偏差ストレッチング平面における弾性域の外向き法線方向から  $15^\circ$  間隔の種々の方向のストレッチングを与える. Fig. 3(b), (c), (d) に,  $P_i^* = 0, 1$  および  $100$  の場合について, 主偏差応力速度平面における応力速度の応答が示されている. 応力速度の応答は, 降伏面の法線に関して対称であり, また, 弾性状態においては,  $\hat{\sigma}^* = 2GD^*$  で与えられ, 最大値は  $|\hat{\sigma}^*|_{\max} = 5.00 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{sec}^{-1}$  である. 一方, ストレッチング空間の弾性域の外向き法線方向のストレッチングに対する応力速度は,  $P_i^*$  値によらず, 降伏面の外向き法線方向で, 最小値  $|\hat{\sigma}^*|_{\min} = 1.88 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{sec}^{-1}$  を示す. 関連流動則に従う場合

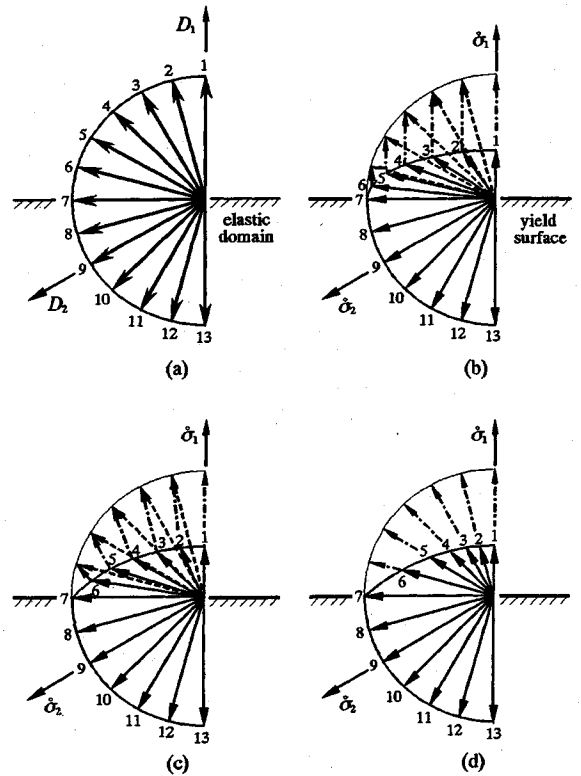


Fig. 3 Mechanical response of the elastoplastic constitutive equation of metals with the flow rule (64) on principal deviatoric stretching and stress rate planes: (a) Input of stretchings  $D$  ( $|D| = 5.00 \times 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ ) ( $\leftarrow$ ); (b), (c) and (d) Responses of stress rates  $\hat{\sigma}^*$  for  $P_i^* = 0, 1$  and  $100$ , respectively ( $|\hat{\sigma}^*|_{\max} = 5.00 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{sec}^{-1}$  in plastic unloading process,  $|\hat{\sigma}^*|_{\min} = 1.88 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{sec}^{-1}$  for  $D^*/|D^*| = \hat{\sigma}^*/|\hat{\sigma}^*| = N$ ) ( $\leftarrow$  stress rate  $\hat{\sigma}^*$ ,  $\leftarrow$  elastic stress rate  $\hat{\sigma}^e$ ,  $\leftarrow$  plastic relaxation stress rate  $\hat{\sigma}^p$ ,  $\leftarrow$  response envelope of stress rate  $\hat{\sigma}^*$ ).

の応答は,  $P_i^* = 0$  として Fig. 3(b) に示されている. Fig. 3(c), (d) からわかるように,  $P_i^*$  値が大きいくほど, ストレッチングの方向が塑性ストレッチングおよび塑性緩和応力速度  $\hat{\sigma}^p (= 2GD^p)$  に与える影響は大で, 降伏面の接線方向へのこれらの傾きが大きい. 特に,  $P_i^* = 100$  の Fig. 3(d) に近似的に示されているように,  $P_i^* \rightarrow \infty$  の場合, 塑性ストレッチング  $P$  の方向は主偏差ストレッチング平面では偏差ストレッチング  $D^*/|D^*|$  の方向, また, 主偏差応力速度平面では偏差応力速度の方向  $\hat{\sigma}^*/|\hat{\sigma}^*|$  に一致する.

## 7. 結言

本論文で提案した拡張流動則(43)に従う弾塑性構成

式(42)は、降伏面の交差や角点を導入することなく、滑らかな単一の降伏面に基づいて、塑性ストレッチングの方向のストレッチングへの依存性およびその大きさの降伏面の接線方向の応力速度成分への依存性を表現し得るもので、弾塑性論の着実な発展に寄与するものと思われる。さらに、本構成式は、下負荷面モデル<sup>8)</sup>を導入することにより、塑性的圧縮/非圧縮性体および塑性的圧力依存/非依存性体の繰返し負荷を含む一般負荷挙動の予測に適用できると思われる。また、これは、力学的要求条件としての連続性条件および仕事率・剛性緩和を満たす最も単純な流動則であると思われる。言うまでもなく、これは、応力速度-ストレッチング関係に高次の非線形性をもたらすが、応力速度はストレッチングで表される。この特性は、変位法に基づく通常の有限要素プログラミングにおいては利点となる。

ここに提案した構成式によれば、負荷基準(20)または(23)により、ストレッチングの半空間または応力速度の半空間に対してのみ塑性ストレッチングを生じる。これらの半空間以上の広範囲に対して塑性ストレッチングが生じるか否かは、まだ、実験的にも明確にされていないが、確認されれば、それへ向けての一層の拡張が今後の課題となろう。

#### 参考文献

- 1) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.525-549, 1993.
- 2) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, Vol.9, pp.721-748, 1993.
- 3) Dafalias, Y.F.: The plastic spin, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.52, pp.865-871, 1985.
- 4) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- 5) Krieg, R.D. and Krieg, D.B.: Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic models, *J. Pressure Vessel Tech. (ASME)*, Vol.99, pp.510-515, 1977.
- 6) Pillinger, I., Hartley, P., Sturgess, C.E.N. and Rowe, G.W.: Use of a Mean-normal large-strain elasticplastic finite-element solutions, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.28, pp.23-29, 1986.
- 7) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.47, pp.266-272, 1980.
- 8) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.25, pp.917-945, 1989.
- 9) Valanis, K.C.: Theory of visco-plasticity without a yield surface, *Arch. Mech.*, Vol.23, pp.517-533, 1971.
- 10) Kolymbas, D. (1991) The outline of hypoplasticity, *Ing.-Arch.*, Vol.61, pp.143-151, 1991.
- 11) Hashiguchi, K.: Inexpedience of the non-associated flow rule, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 15, pp.752-756, 1991.
- 12) Runesson, K. and Mroz, Z.: A note on nonassociated plastic flow rules, *Int. J. Plasticity*, Vol.5, pp.639-658, 1989.
- 13) Drucker, D.C.: Some implications of work hardening and ideal plasticity, *Quart. Appl. Math.*, Vol.7, pp.411-418, 1950.
- 14) Drucker, D.C.: On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *J. de Mechanique*, Vol.3, pp.235-249, 1964.
- 15) Ilyushin, A.A.: On the postulate of plasticity, *Appl. Math. and Mech.*, Vol.25, pp.746-752, 1961 (Translation of O postulate plastichnosti, *Prikladnaya Matematika*, Vol.25, pp.503-507, 1961).
- 16) Drucker, D.C.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, *Proc. 1st U.S. National Congr. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.1, pp.487-491.
- 17) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 18) Hill, R.: On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids, *Recent Progress in Appl. Mech. (The Folke Odqvist Volume)*, John-Wiley & Sons, pp.241-249, 1967.
- 19) Hashiguchi, K.: On the loading criterion, *Int. J. Plasticity*, in printing.
- 20) Handelman, G.H., Lin, C.C. and Prager, W.: On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range, *Quart. Appl. Mech.*, Vol.4, pp.397-407, 1947.
- 21) Prager, W.: Recent development in mathematical theory of plasticity, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol. 20, pp. 235-241, 1949.
- 22) Koiter, W.T.: Stress-strain relations, uniqueness and variational theories for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Quart. Appl. Math.*, Vol.11, pp.350-354, 1953.
- 23) Bland, D.R.: The associated flow rule of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.71-78, 1957.
- 24) Mandel, J.: Generalisation de la theorie de plasticite de W.T. Koiter. *Int. J. Solids Struct.*, Vol.1, pp.273-295, 1965.
- 25) Hill, R.: Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.14, pp.95-102, 1966.
- 26) Sewell, M.J.: A plastic flow at a yield vertex, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.22, pp.469-490, 1973.
- 27) Sewell, M.J.: A yield-surface corner lowers the buckling stress of an elastic-plastic plate under compression, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.21, pp.19-45, 1974.
- 28) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W.: A class of phenomenological corner theories of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.27, pp.465-487, 1979.
- 29) Hill, R.: The essential structures of constitutive laws for metal composites and crystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.79-95, 1967.
- 30) Itoh, K.: New flow rule for elastic-plastic solids based on KBW model with a view to lowering the buckling stress of plates and shells, *Tech. Report Tohoku Univ.*,

- Vol.44, pp.199-232, 1979.
- 31) Gotoh, M.: A class of plastic constitutive relations with vertex effect, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.21, pp.1101-1163, 1985.
  - 32) Tomita, Y., Shindoh, A., Kim, Y.S. and Michiura, K.: Deformation behavior of elastic-plastic tubes under extended pressure and axial load, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.20, pp.263-275, 1986.
  - 33) Goya, M. and Itoh, K.: An expression of elastic-plastic constitutive laws incorporating vertex formulation and kinematic hardening, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.58, pp.617-622, 1991.
  - 34) Budiansky, B.: A reassessment of deformation theories of plasticity, *J. Appl. Mech. (ASME)*, Vol.20, pp.259-264, 1959.
  - 35) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
  - 36) Storen, S. and Rice, J.R.: Localized necking in thin Sheet, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.421-441.
  - 37) Dorris, J.F. and Nemat-Nasser: A plasticity model for flow of granular materials under triaxial stress states. *Int. J. Solids Struct.*, Vol.18, pp.497-531, 1982.
  - 38) Lehmann, Th.: Some considerations and experimental results concerning elastic-plastic stress-strain relations, *Ing.-Archiv*, Vol.52, pp.391-403, 1982.
  - 39) Hashiguchi, K.: Subloading surface model with tangential plasticity, *Proc. 2nd Int. Symp. Plasticity*, edited by A.S. Khan and M. Tokuda, Tsu, Pergamon Press, Oxford, pp.451-454, 1989.
  - 40) Zbib, H.M.: On the mechanics of large inelastic deformations: Noncoaxiality, axial effects in torsion and localization, *Acta Mech.*, Vol.87, pp.179-196, 1991.
  - 41) Papamichos, E., Vardoulakis, I. and Han, C.: Noncoaxial flow theory of plasticity: Shear failure prediction in sand, *Modern Approaches to Plasticity*, edited by D. Kolymbas, Elsevier, Amsterdam, pp.585-598, 1992.
  - 42) Vermeer, P.: Upgrading of soil models by Hencky's theory of plasticity, ditto, pp.71-82, 1993.
  - 43) Truesdell, C.: Hypo-elasticity, *J. Rat. Mech. Anal.*, Vol.4, pp.83-133, 1955.
  - 44) Hencky, H.: Theorie plastischer Deformation und der hierdurch im Material herforderufenen Nachspannungen, *Z.A.M.M.*, Vol.4, pp.323-334, 1924.
  - 45) Mroz, Z.: On hypoelasticity and plasticity of approaches to constitutive model of inelastic behavior of soils, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.4, pp.45-55, 1980.
  - 46) Stutz, P.: Comportement elastoplastique des milieux pulverulents, *Sci. et Tech. de l'Armement*, Vol.47, pp.475-499, 1973.
  - 47) Romano, M.: A continuum theory for granular media with a critical state, *Arch. Mech.*, Vol.26, pp.1011-1028, 1974.
  - 48) Davis, R.O. and Mullenger, G.: A rate-type constitutive model for soil with a critical state, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.2, pp.255-282, 1978.
  - 49) Dragusin, L.: Hypo-elastic model for soils, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.19, pp.511-552, 1981.
  - 50) Mroz, Z.: On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. 18, pp.3-35, 1966.
  - 51) Wang, Z.-L., Dafalias, Y.F. and Shen, C.-K.: Bounding surface hypoplasticity model for sand, *J. Eng. Mech. (ASCE)*, Vol.116, pp.983-1001.
  - 52) Rivlin, R. and Ericksen, I.L.: Stress-deformation relations for isotropic materials, *J. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 4, pp.323-425, 1955.

(1994.3.28受付)

## ELASTOPLASTIC CONSTITUTIVE EQUATION WITH DIRECTIONAL DEPENDENCE OF PLASTIC STRETCHING ON STRESS RATE

Koichi HASHIGUCHI

The extension of the elastoplastic constitutive equation so as to describe the dependency of the direction of a plastic stretching on a stress rate or a stretching is one of the most important but unsolved problems in the elastoplasticity. To this aim various flow rule models have been proposed in the past. A pertinent model has not been proposed yet, however, as reviewed in this article. Then, keeping a single smooth (regular) yield surface for the steady development of the elastoplasticity, an extended flow rule is proposed by incorporating an additional term of the stretching in degree zero into the associated flow rule, which is capable of describing that dependency, fulfilling the mechanical requirements, i.e. the continuity condition and the work rate-stiffness relaxation. Based on it, a constitutive equation of metals with the isotropic-kinematic hardening is formulated, and its mechanical response is shown by numerical experiments.