

【委員会報告】

土木工学における応用力学の新しい展開

NEW FRONTIER OF APPLIED MECHANICS IN CIVIL ENGINEERING

構造工学委員会応用固体力学小委員会

Subcommittee on Applied Solid Mechanics

1. ま え が き

応用固体力学小委員会は、構造工学委員会のもとに2年間の期限付き小委員会として平成4年6月に設立が認められ、平成6年5月までに11回の委員会を開催して終了した。小委員会設立の背景には、次の二点があった。第一に近年の社会基盤整備への質の高い要求が挙げられる。すなわち、極めて過酷な条件のもとでも安全で質の高い構造物が求められるようになっており、構造工学の分野でもそれに応じた高度な技術が強く要請されるようになってきている。さらに、従来ではあまり考慮されなかった、あるいは考慮できなかった、使用時の構造物の維持管理を図るための安全性の合理的な評価がますます必要となってきている。第二に従前の力学のイメージの大きな変化が挙げられる。これは、コンピュータの長足の進歩に伴って、解析力学・実験力学に次ぐ第三の力学とも言うべき計算力学が急速に発展してきたことによる。特に、従来の手法では取扱が困難であった新しい未知の領域が誕生・発展しており、さらには、ベクトル計算機やパラレル計算機の使用によって、これまでに対応することができなかった大規模の高次元解析も容易で高速に行えるようになってきている。土木工学で要請される複雑な現象や条件を伴う大規模な解析も今日ではその多くが可能となりつつある。

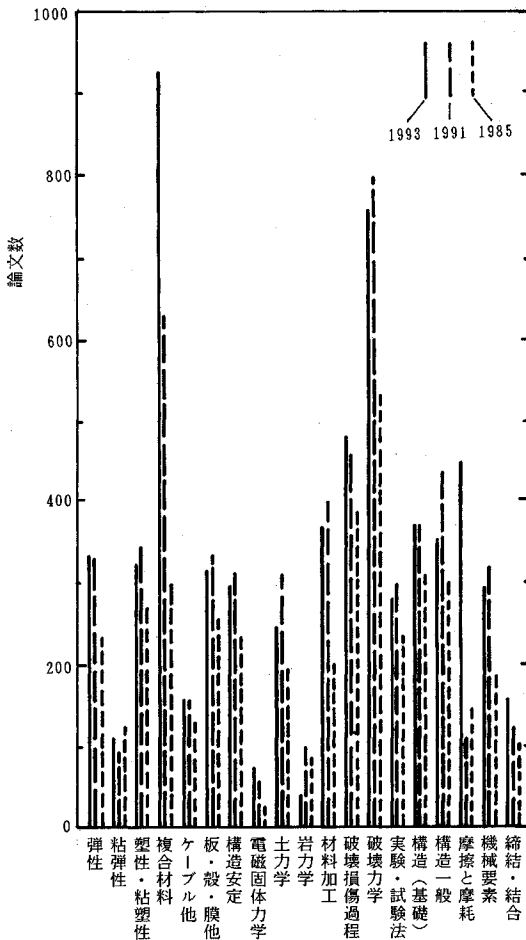
このような状況にあって、本小委員会では、さらに高度な技術を推進し発展させるために、いま一度基本に立ち返って新鮮な目で力学、主として固体力学とその周辺を見直すことを第一の目的とした。さらに、これを基盤として、土木工学の中における応用固体力学の新たな方向を探ることを第二の目的とした。小委員会の活動の方針としては、1) 固体力学の基礎と応用に関する話題を幅広く取り上げて、第一線で活躍している専門家からその分野の研究の最前線の動向を展望して頂くことにより、固体力学への認識を新たにすると共に、将来への可能性を探ること、2) 近年注目を浴びており今後も発展が期待される新しい研究分野に関して、ショートセミ

ナーを企画することで、共通の基盤づくりを行い、合わせその分野の基礎理論の体系化を行うこと、である。さらに、この2点の成果を踏まえて、従来より設立が要望されていた応用力学委員会の発足に向けて準備することも方針とした。これらに関しては、一応所期の目的を達成したと思われる。ここにその活動の概要を報告する。

2. 固体力学の動向

応用力学全般の現況を見るには、Applied Mechanics Reviewは大変参考になる。固体の力学に限って言えば、年間でレビューされる論文の数は約6500程あり、その内訳は図-1に示すようである。

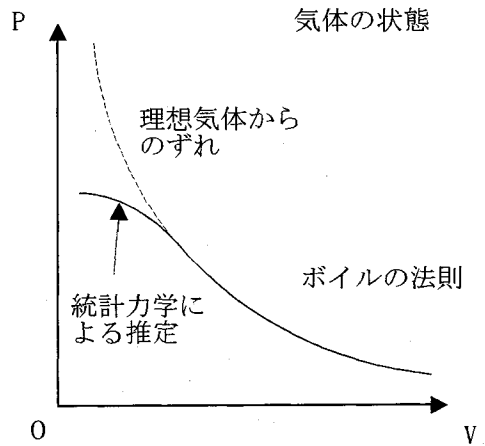
この図から、約十年前と現在の消長がわかって面白い。その中で多いものは複合材料の力学、破壊力学、破壊と損傷過程、最近では摩擦と磨耗の論文が急激に増えている。構造(基礎)、構造安定、弾性学、塑性学、板とシェル、材料加工等の従来からの分野の研究も根強く行われていることもわかる。応用力学という面で見ると、最近ではやはり有限要素法、境界要素法等の計算力学の手法とその応用が顕著である。しかし、論文数が多いということ、必ずしも研究の動向を示しているということではない。萌芽的な研究ではむしろ論文が少ないであろう。そのような意味では、論文数は決して多くはないが、非破壊評価関連の研究とか劣化の研究は将来極めて重要な分野になるであろう。それらに関連して、逆問題は最近広く注目を集めている。一方、制御の問題も広範囲な応用面を含み、振動だけでなく波動等も含めて検討されることになるであろう。ショートセミナーで取り上げた、マイクロメカニクスのは話題は、材料特性を支配するいわゆる構成式や破壊力学とか損傷力学の基礎として、波動工学の話題は、波動現象や振動、非破壊評価とか振動ないし波動制御の基礎として、将来より重要となるであろう。これらについては以下で少し詳しく解説をする。



図一 固体力学の動向 (Applied Mechanics Reviews から)

3. マイクロメカニクス

土木構造材料は普通は弾性体として扱われるが、大きな変形や破壊をする場合には弾性体とかけ離れた挙動を示し、いろいろな条件によってさまざまに変化する。したがって、安全な構造物の設計には、複雑な材料の応力-ひずみ関係を明らかにした上で、合理的な構造解析を可能とする物性の理解が必要であることは強調するまでもない。応力-ひずみ関係は材料に特有のものであるため個々の材料について解明しなければならないが、物性が複雑となる原因を突き止めた上で多様な状態での物性を理論的に推定することも望まれる。複雑な物性を材料の微視構造に起因するものと考えることで、材料やその材料からなる部材・構造物の複雑な挙動をマイクロメカニクスを適用して解析・予測することが可能となる。マイクロメカニクスは既にさまざまな材料に応用¹⁾が図られており、事実、多結晶金属や損傷材料等の物性や構成則の推定に果たした貢献^{3),2)}は大きく、積層複合材料の



図二 気体の状態

物性やその造物の構造解析に対しては実用レベル^{4),5)}で用いられている。さらに、解析方法自体も確立するに至っており、微小要素の平均的な挙動を推定する方法と、Homogenization 理論に基づく方法が代表的である。微視構造が比較的ランダムな材料に対しては前者が用いられ、比較的規則正しい微視構造を持つ材料に対しては後者が用いられることが多い。この他、合理的な材料微視構造の設計や未知の微視構造を持つ材料の物性推定のために、有効物性の範囲を求める研究も行われている。以下、マイクロメカニクスによる物性の扱い方を整理した上で、この3つについて概略を説明する。

(1) マイクロメカニクスによる物性の取り扱い

馴染み易い例として、気体の圧力-体積関係を考えてみよう。通常は「圧力と体積は反比例する」というボイルの法則が成立するが、圧力が非常に高い場合はこの法則からずれるようになる。この場合の圧力-体積関係を個々の気体について測定することは不可欠であるが、気体分子の運動に基づく統計力学により高圧力下の気体の圧力-体積関係が理解され、特殊な状態での圧力や体積の推定が可能となっている(図-2参照)。

統計力学の成功は、気体はそもそも気体分子の集まりであり、圧力や体積は分子運動の結果として測定される、という物理的な事実に基づいた理論であることに起因する。一方、構造物を考えるような長さの尺度では均一とされる材料も、より小さな長さの尺度では多数の微小な要素によって構成されており、材料の物性は要素全体の挙動から決定されることが推測される⁶⁾。したがって、物性が複雑となる原因は、個々の微小要素の特異な挙動であることが考えられる。したがって、構造解析に利用できるような材料物性を得るための方法として、微小要素の挙動を明らかにし、要素全体の挙動から材料物性を

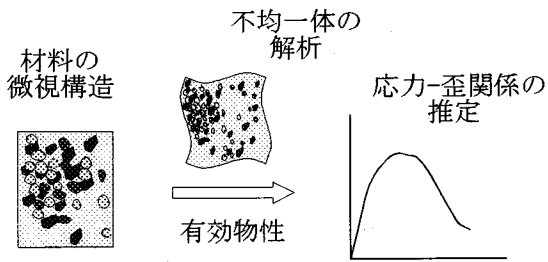


図-3 微視構造と有効物性

推定する方法が考えられる (図-3 参照)。マイクロメカニクスによって微小要素の挙動の全体像が解析される場合、材料のさまざまな状態での物性を推定することが可能となり、適用範囲が広がることが期待される。

通常、マイクロメカニクスに基づく物性の推定では、材料を微視構造を持つ不均一な物体とモデル化し、不均一体の平均応力-平均ひずみ関係が材料の応力-ひずみ関係を与えると仮定する。このようにして決定される応力-ひずみ関係は有効物性と呼ばれる。微小要素の挙動が複雑な材料物性を示すメカニズムとなるため、モデルとなる不均一体は材料によって異なる。例えば、コンクリートの場合、骨材を介在物、内部損傷を亀裂、モルタルを母材とする複合材料としてモデル化されることがある。また、岩の場合、節理やジョイントを亀裂、健全な岩体を母材とした亀裂損傷体とするモデル化が行われている。

モデルとなった不均一体の平均応力と平均ひずみは、体積平均によって計算される^{7), 8)}。これは、実際の実験での材料サンプルの応力-ひずみ関係の測定と対応しており、サンプルの応力 σ_{ij} やひずみ ϵ_{ij} の体積平均はサンプル表面での面積分として計算される。すなわち、サンプルを V 、表面を S とすると、

$$\int_V \sigma_{ij} dV = \int_S t_i n_j dS \quad (1a)$$

$$\int_V \epsilon_{ij} dV = \int_S \frac{1}{2} \{u_i n_j + u_j n_i\} dS \quad (1b)$$

となる。ここで、 u_i は表面の変位、 $t_i = n_j \sigma_{ji}$ は表面の単位面積毎の力 (トラクション)、 n_i は表面の法線ベクトルである。この式はサンプル内の応力やひずみが一様でなくとも成立する。したがって、図-4 に示す断面積 A

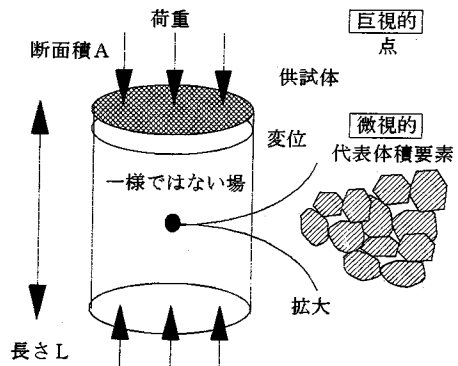


図-4 微視構造を持つ材料の1軸試験

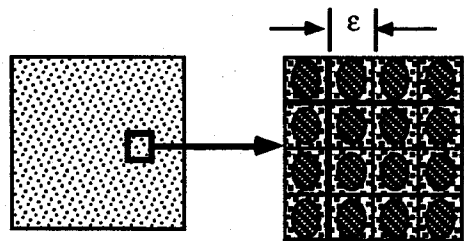


図-5 周期的微視構造を有する材料

高さ L のサンプルの y 方向の平均の応力とひずみを計算すると、

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{yy} dV = \frac{F_y}{A} \quad (2a)$$

$$\frac{1}{V} \int_V \epsilon_{yy} dV = \frac{u_y}{L} \quad (2b)$$

となる。なお、この式が成立するためには、境界の変位やトラクションが正確に指定されることが不可欠である⁹⁾。左辺は実験で測定されるサンプルの応力とひずみとなっている。

(2) 規則的な微視構造

図-5 に示すような微視的周期構造を有する材料の平均物性を評価する数学的な手法として、Homogenization 法がある。Homogenization 法によれば、周期的微視構造を有する材料が与えられたとき、それを構成する単位構造 (ユニットセル) について、

$$\begin{aligned} \int_Y E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{ki}(x, y)}{\partial y_q} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \\ = \int_Y E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad \forall v_i \end{aligned} \quad (3)$$

を解くことによって、ユニットセルの特性変位関数 (characteristic deformation) を求め、これを用いた以下の積分を行うことにより、均質化弾性係数

$$E_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y E_{ijkl}(x, y)$$

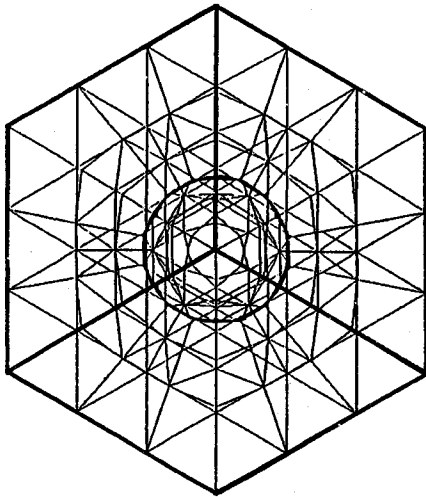


図-6 ユニットセルの3次元有限要素モデル

$$-E_{ijpq}(x, y) \frac{\partial \chi_p^{ij}(x, y)}{\partial y_q} dy \quad (4)$$

と物体力

$$f_i^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy \quad (5)$$

が与えられる。さらに、これらを用いて材料がおかれている境界条件のもとでのつりあい式

$$\int_{\partial} E_{ijkl}^H(x) \frac{\partial u_k^i(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_l^j(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial} f_i^H(x) v_l^j(x) dx + \int_{\partial} t_l v_l^j(x) dx = 0 \quad \forall v_l^j \quad (6a)$$

を解くことにより、平均変位が求められる。さらに、この平均変位と先に求めたユニットセルの特性変位関数を用いて、ユニットセル内における局所的な応力とひずみの近似解が次式で与えられる。

$$e_{ij}^0 = \left\{ \left(\delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{\partial \chi_p^{iq}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q} \right\}_{sym. part} \quad (7a)$$

$$\sigma_{ij}^0 = E_{ijkl}^e e_{kl}^0 = \left(E_{ijkl}^e - E_{ijpq}^e \frac{\partial \chi_p^{ij}}{\partial y_q} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (7b)$$

Homogenization法の適用例として、琉球石灰岩の力学特性の評価を紹介しよう。琉球石灰岩は直径2.5mm程度の球状あるいは楕円体状の無数の空隙を含んだ多孔質軟岩であり、直径5cm高さ10cmの円柱供試体での測定では、空隙率は5%から15%の間である。この琉球石灰岩を立方体の中心に球状の空隙がある基本構造単位(ユニットセル)の規則的な集合体としてモデル化する。図-6に有限要素解析に用いたユニットセルの3次元要素分割図を示す。

このユニットセルにおいて、基質部は等方弾性体と仮定して、中心空隙球の大きさを様々に変えて平均ヤング率とポアソン比を計算した。図-7に空隙率 f の違いに

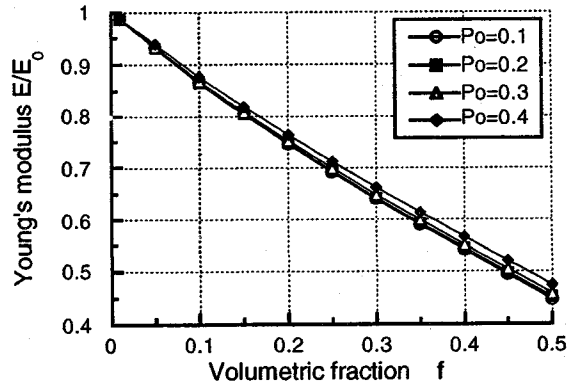


図-7 空隙率 f と平均ヤング率

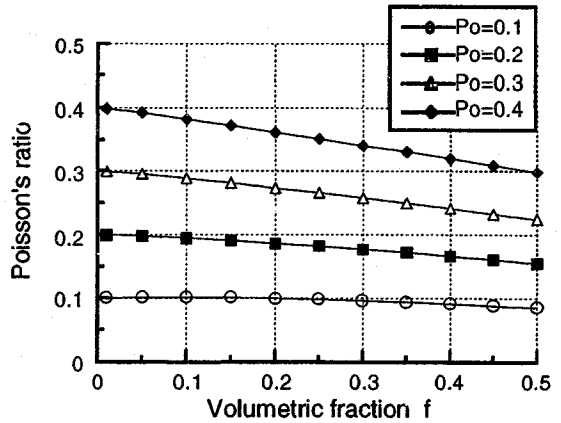
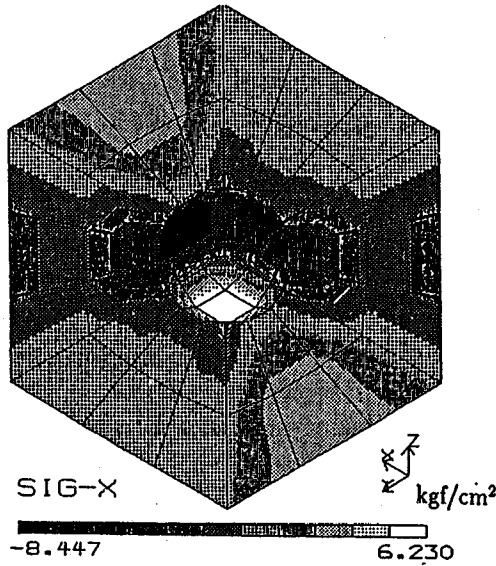


図-8 空隙率 f と平均ポアソン比

よる平均ヤング率の変化を実験値と共に示す。また、図-8にはポアソン比の変化を示す。ただし、ヤング率は基質部のヤング率($E_0 = 4.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$)で正規化している($\nu = 0.25$)。直径5cm高さ10cm円柱供試体を用いて定ひずみ速度(0.1%/min)一軸圧縮試験を行った。試験後、供試体をいくつかの断面で切断して空隙率を求めた。こうして各供試体について得られた空隙率とヤング率の関係を図-7にプロット(黒三角)している。実験結果にはかなりのばらつきは見られるが、空隙率の増加に伴うヤング率の減少傾向は認められる。

Homogenization解析によって、空隙率 f が0.05%、0.1%、0.15%の場合の平均弾性係数を求め、それらを用いて一軸圧縮試験の有限要素軸対称解析を行い、さらにユニットセル内の局所的な応力分布を求めた。局所的な応力分布図の例を図-9に示す。表-1には、実験で得られた各供試体の初期降伏応力(応力ひずみ曲線が直線から逸脱し始める点)と、その荷重を与えて計算した結果、空隙周辺部で最大引張応力が発生した点の直応力成分を併記している。図-10は表-1中の引張直応力をプロットしたものである。表-1で見ると、各供試



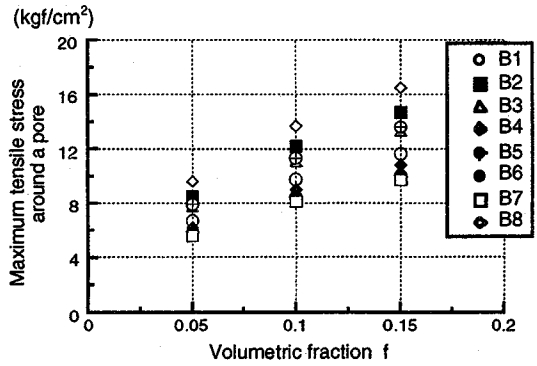
図—9 ユニットセル内の局所応力分布の例

表—1 琉球石灰岩の一軸圧縮時降伏応力と空隙周辺の局所的引張り応力

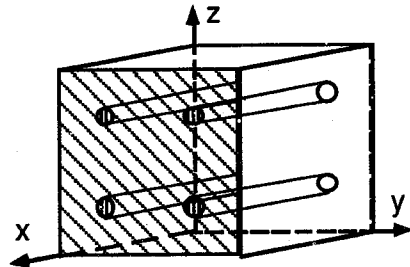
Specimen No.	Yield strength (kgf/cm ²)	Tensile Stress (kgf/cm ²)		
		5%	10%	15%
B1	324	6.7	9.7	11.6
B2	409	8.5	12.2	14.7
B3	370	7.7	11.0	13.3
B4	300	6.2	9.0	10.8
B5	380	7.9	11.3	13.6
B6	280	5.8	8.4	10.0
B7	270	5.6	8.1	9.7
B8	460	9.6	13.7	16.5

体において降伏強度は 270 kgf/cm² から 460 kgf/cm² の間でばらついているが、空隙周辺の引張応力を見て、かつ空隙率 f を各供試体毎に都合よく解釈すれば、基質部に 10 kgf/cm² 程度の引張応力が発生した時点で琉球石灰岩は非弾性挙動を始める、と言えそうである。こうした結果は、琉球石灰岩のように微視構造が顕著な材料の強度についてはその構造を考慮することによってさらに発展的な議論が期待できることを示唆している。

次に、パターンロックボルトによる岩盤補強効果の定量的評価を紹介しよう。規則的に打設されたロックボルトを岩盤の周期的微視構造と考えれば、Homogenization 法によりその弾性係数が定量的に評価できる (図—11 参照)。ここでは、ロックボルトの岩盤補強効果のうち、岩盤の剛性を高める効果に注目し、Homogenization 法による定量的評価を行った結果を述べる。計算に際しては、岩盤は等方弾性体と仮定し、ポアソン比を 0.25、ヤング率を 10,000 kgf/cm² から 100,000 kgf/cm²



図—10 一軸圧縮降伏時における空隙周辺の最大引張応力



図—11 ロックボルトが打設された岩盤に対する座標軸

まで変化させた。ロックボルトは直径 3 cm の円柱鋼棒とし、そのポアソン比は 0.3、ヤング率は 200,000 kgf/cm² とした。また、打設のピッチは 50 cm から 233 cm まで変化させて、それぞれの組み合わせに対する弾性係数を計算した。

上式中の各係数の岩盤のヤング率およびボルトの打設ピッチによる変化を図—12 から図—15 に示す。図中の凡例は岩盤のヤング率を示しており、E 100 は岩盤のヤング率が 100,000 kgf/cm²、E 10 は 10,000 kgf/cm² であることを表している。これらの結果をロックボルトが打設された円形トンネルに適用すれば、図—16 に示すように、半径方向に弾性係数が徐々に変化する圧肉円筒が岩盤中に埋め込まれたようなモデル化を行うことが可能である。

(3) ランダムな微視構造

材料内部の微視的要素 (例えばクラックや介在物等) がランダムに分布する場合、微視構造の周期性を仮定することは出来なくなる。この場合、単一の微視的要素の挙動から、材料全体の巨視的挙動を推定する方法が採られる。

例題として図—17 に示すようなクラックを含む弾性体の巨視的な応力-ひずみ関係を求めてみよう。体積要素 V_e 内での平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ と平均ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ の関係より、

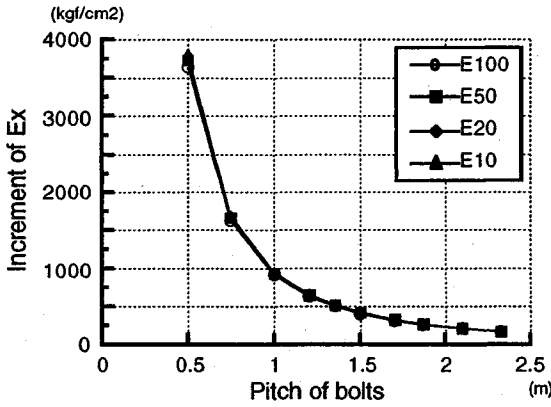


図-12 E_x の増加量

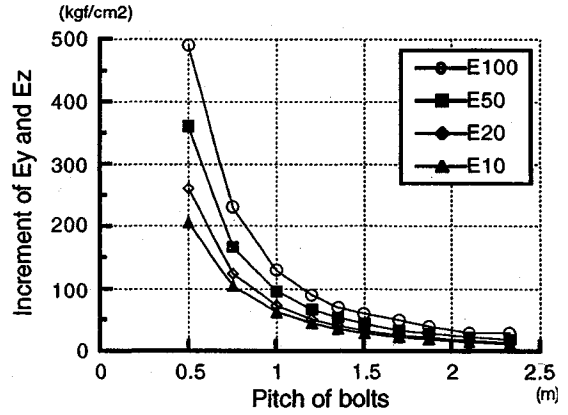


図-13 E_y, E_z の増加量

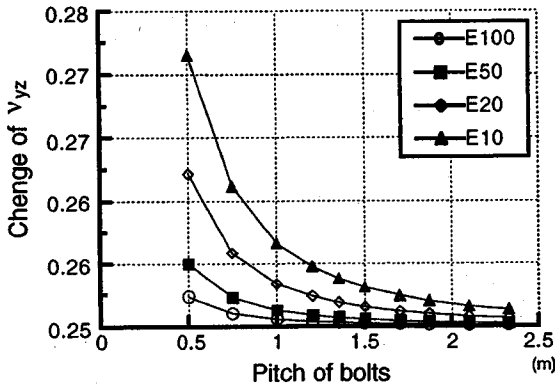


図-14 ν_{yz} の増加量

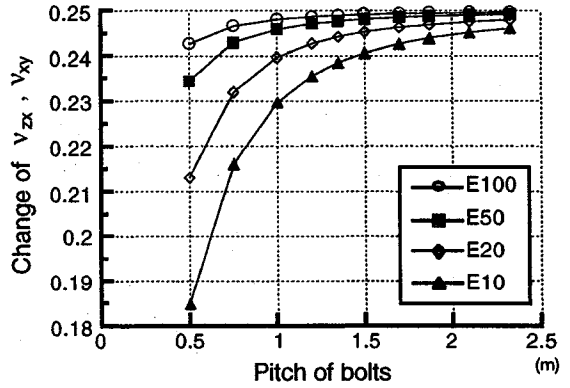


図-15 ν_{zx}, ν_{xy} の増加量

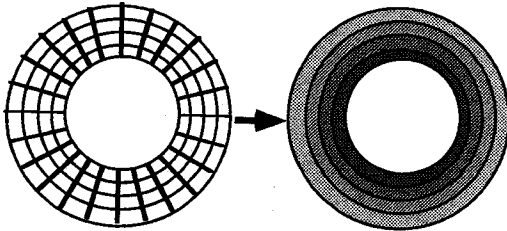


図-16 ロックボルトが打設された円形トンネルのモデル化

巨視的な応力-ひずみ関係は次式となる¹⁴⁾。

$$\hat{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^0 (\hat{\epsilon}_{kl} - \hat{\epsilon}_{kl}^c) \quad (8a)$$

$$\hat{\epsilon}_{kl}^c = \frac{1}{V_c} \int_S \frac{1}{2} ([u_k] n_l + [u_l] n_k) dS \quad (8b)$$

ここで、 $\hat{\epsilon}_{kl}^c$ はクラックによって生じるひずみ、 D_{ijkl}^0 は材料の基質部分の弾性テンソルを表し、 $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ はクラック表面 S での開口変位、 n_i はクラック表面の単位法線ベクトルである。

結局、巨視的な応力-ひずみ関係を導くためには、 V_c 内に分布するクラックの開口変位を求めればよい。クラックの密度が小さい場合はクラック間の相互干渉は無

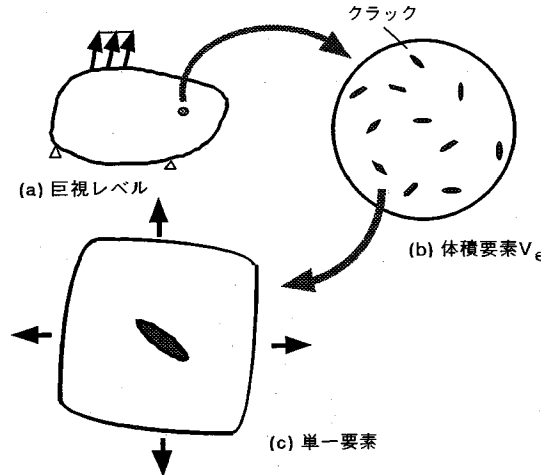


図-17 代表体積要素 V_c と微視構造要素

視でき、図-17 (c) に示すように無限弾性体中に単一のクラックを考え、開口変位を計算し、密度を乗じれば良い。一方、クラックの密度が大きい場合、クラック間の相互干渉効果は無視できなくなる。クラック間の相互

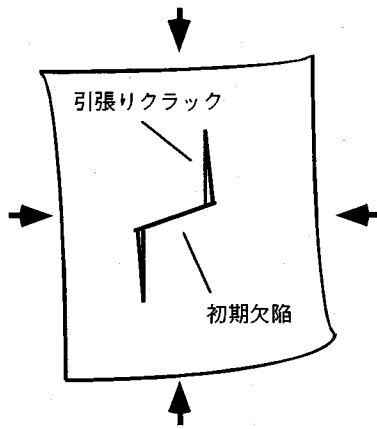


図-18 圧縮荷重下でのクラック進展モデル

干渉を考慮するための手法としてはセルフ・コンシステント法¹⁵⁾などがある。

1960年代から70年代にかけて、光学顕微鏡または電子顕微鏡を用いた岩石内部の微視的欠陥に関する詳細な観察結果が相次いで報告された。これより、岩石の非弾性変形が、内部の微視的クラックの発生と進展に起因することが広く認識されるようになった。図-18は微視クラックモデルの一例¹⁶⁾であり、圧縮荷重によって初期欠陥が摩擦滑りを起こし、引張りクラックが生じる様子を表している。マイクロメカニクスの手法を用いて図-18に示すようなクラックモデルを多数含む弾性体の巨視的な応力-ひずみ関係を求め、これと適当なクラックの進展条件を考慮することにより、連続体理論を構築しようとする多くの試みがある^{18),19)}。

その様な連続体理論で岩石の2軸圧縮試験を解析した例¹⁷⁾を図-19に示す。この図は各拘束圧 p_c における軸応力とクラック長の関係を表したものであり、図中には最大荷重以後のクラック長の分布図も表している。同図において円の大きさがクラック長を表す。この理論では最大荷重点は分岐点となっており、この点以後、一樣な変形場から局所化した変形場へと移行する。同図から分かるように、拘束圧が増加するにつれて縦割れの変形モードからせん断破壊の変形モードへと遷移している。このように、現在ではマイクロメカニクスに基づく連続体理論によって、拘束圧の増加に伴う破壊モード変化も予測可能である。

(4) 有効物性の範囲

同じ微小要素から作られる均一体でも、微小要素の形状や配置の違いによって有効物性は異なる。これは微小要素間の相互作用に起因しており、有効物性の範囲は微小要素の物性の差に応じて広がる。したがって、複合材料の微視構造を設計する際には、最適の物性が得られ

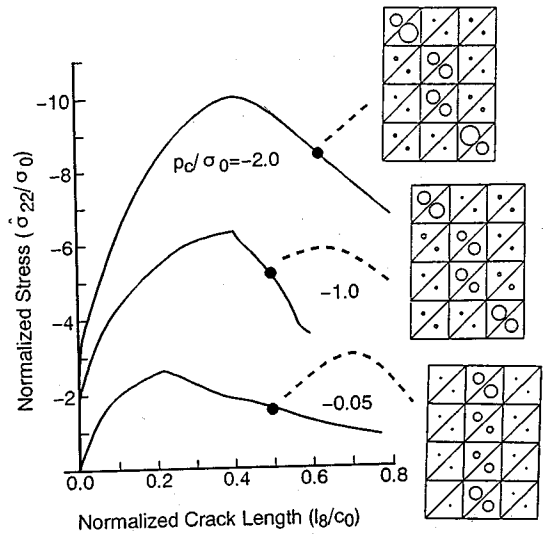


図-19 軸応力-クラック長関係とクラック長の分布

るように配置を決定することが研究²⁰⁾⁻²⁶⁾されている。一方、境界条件に応じて不均一体の挙動が異なるため、平均応力-平均ひずみの関係から決定される有効物性は見かけ上変化²¹⁾することもある。

以上の点を背景として、微視構造に関する情報(微小要素の形状・配置等)が限られている場合やさまざまな条件下に置かれた場合の材料の有効物性がとりうる範囲を推定することが必要とされている。物性範囲の推定にはいろいろな方法があるが、変分原理に基づく理論解析が代表的である。有効物性が線形な場合のみならず非線形な場合²³⁾でも、範囲を推定することが可能となっている。

簡単な例として、数値シミュレーションによって作られた不均一体を取る有効物性と、理論解析によって計算された範囲を取り上げる。力学現象と浸透現象(熱伝導・電磁気・光・拡散現象も同様)は数学的に同じ形式で扱えるため、簡単な浸透係数を有効物性²⁷⁾⁻³¹⁾として考える。数値シミュレーションでは、長さ a の立方体を N^3 個に分割して各小立方体の拡散係数が適当に異なる不均一体を作り、さまざまな境界条件で発生した浸透流に対して平均圧力勾配と平均浸透流速を計算し、有効浸透係数 $\bar{\kappa}$ を計算する。不均一体の小立方体は低浸透域・中浸透域・高浸透域に別れ、その個数は一定であるが配置は乱数によって指定されている。また、浸透係数の比は1:10:100となっている。設定された境界条件は、側

²¹⁾ 同じ平均応力を作る表面のトラクションの分布にはいろいろあるが、結果として生じる表面変位から決定される平均ひずみは、トラクションの分布によって変化する¹⁹⁾。複合材料のような人工材料では、不均一体のサイズを微小要素に比べて十分大きくすることで境界条件の影響を除くことが可能である。

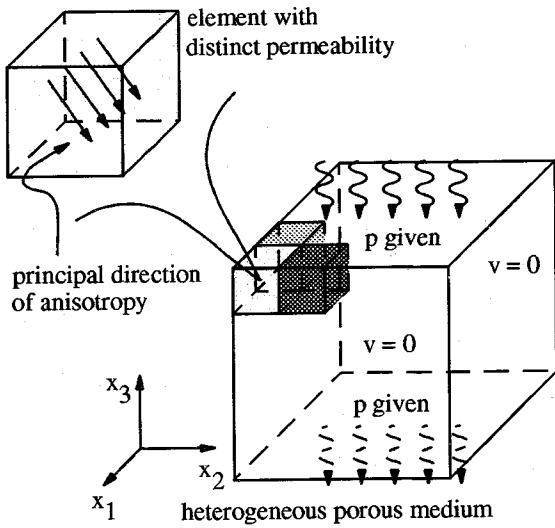


図-20 不均一多孔質媒体の数値シミュレーション

面は流速0, 上下面は各点の圧力が乱数によって適当に指定されるものを用いている(図-20参照)。

等価介在物法を利用した理論解析によって, 有効浸透係数が次の不等式で挟まれていることが証明されている。等価介在物法とは均一体を用いて不均一体問題を解く方法であり, 浸透係数の大小による浸透流速の局所的な変化を付加的な浸透流を適切に発生させて表すことを試みる。理論解析の結果は,

$$\max_{v^*} J(v^*; k^+) \leq \frac{1}{2} k_0 q_0^2 \leq \min_{v^*} J(v^*; k^-) \quad (9)$$

となる。ここで q_0 は平均の圧力勾配であり, v^* は付加的な浸透流速(アイゲン浸透流速³¹⁾と呼ばれる)である。局所的に浸透係数が高い所には, 大きなアイゲン浸透流が発生し, 同じ圧力勾配でも浸透流速が大きくなるように調節される。なお, J は次の形式で与えられる汎関数³²⁾である。

$$J(v^*; k^0) = \frac{1}{2} \langle v^* \{ (k - k^0)^{-1} v^* - q^d - 2q^0 \} \rangle \quad (10)$$

図-21に理論限界の一例を示す。

数値シミュレーションの結果を図-22に示す。同一の低・中・高浸透域からなる不均一多孔質媒体において, 内部構造の差によって, さらに同じ内部構造でも境界条件によって有効浸透係数に幅が生じることがわかる。100 000回の数値シミュレーションによって得られた有効透水性係数と理論解析によって得られた有効透水性係数の範囲を図-23に比較する。理論解析で得られた上下限値はこの有効係数の範囲を挟んでおり, 妥当性が同

³²⁾ この汎関数は Hashin と Shtrikman³⁰⁾ によって見つけられ, 微視構造が異なる複合材料の力学特性に対して多くの研究が行われている。近年, 微視構造が一様でない自然材料にも適応可能¹⁴⁾ であることが証明され, 応用が期待されている。

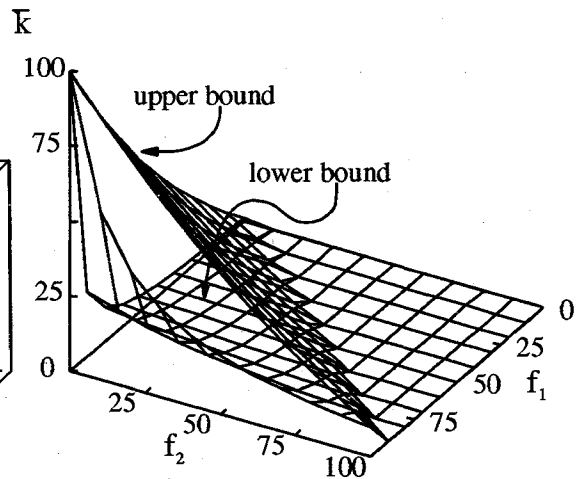


図-21 有効透水性係数の上下限

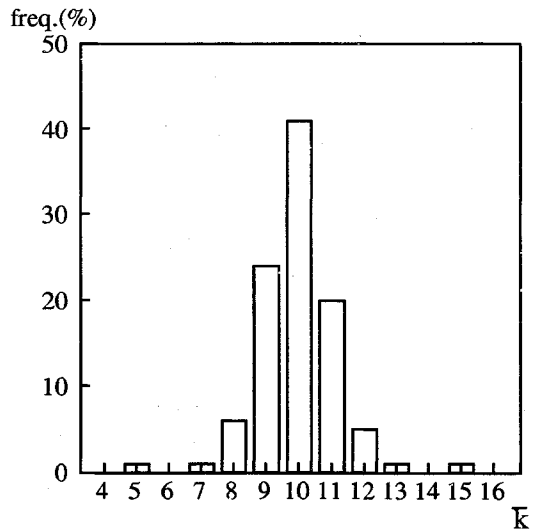


図-22 有効透水性係数の分布

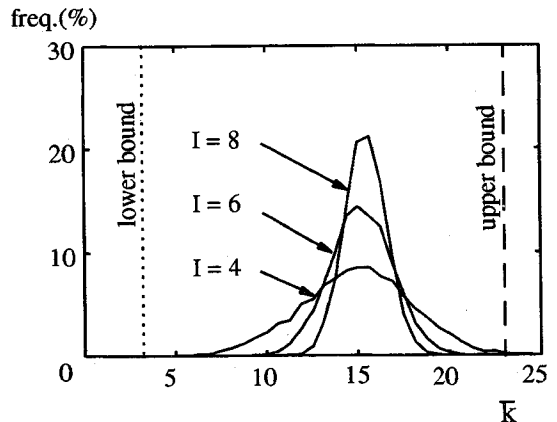


図-23 数値シミュレーションと理論値の比較

える。理論解析で得られる上下限値は、異方性・非線形材料にも適応可能である。さらに、不均一性の分布に関する情報が増えると上下限値の幅が狭まることが示されているため、情報量に応じて合理的に物性値の取りうる範囲を推定できることが期待される。

4. 波動工学

限られた資本を有効に活用するために、構造物の合理的な維持管理は土木工学に課せられた大きな課題の一つとなっている。特に構造部材中の欠陥を部材に損傷を与えることなく見つけることが重要であり、非破壊検査 (non-destructive inspection) としてさまざまな技術が蓄積されている。しかし、維持管理の合理化には、欠陥の大きさ・位置・程度に関する正確な同定が不可欠である。そこで、非破壊検査を発展させより精密に欠陥を評価するために、定量的非破壊評価 (quantitative non-destructive evaluation) 技術を確認することが望まれている。超音波による定量的非破壊評価において欠陥のある個体中の波動伝播を利用する。したがって、高精度の測定器具と同様、波動の伝播に関する理論も必要であり、現在、波動工学として理論の強化・体系化が進められている。以下、定量的非破壊評価の基礎となる波動工学に関して、現状を簡潔に整理する。

(1) 波動工学の問題設定

図-24に示すように、散乱体表面を S 、解析対象としている外部領域を D とする。外部領域が部材、散乱体が欠陥に対応すると考えてよい。また、入射波を u^i 、入射波が散乱体に到達し散乱体表面上の境界条件を満たすべく生成された波を散乱波 u^s とする。このとき、波動工学上の多くの問題は次のような初期値境界値問題として記述できる。

1. 支配方程式：

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} = \rho \ddot{u}_i \text{ in } D \times (t > 0) \quad (11)$$

ここで、 $u_i = u_i^i + u_i^s$ は変位、 λ と μ は Lamé 定数、 ρ は密度、また、 \ddot{u}_i は時間 t に関する 2 階の偏微分である。

2. 境界条件：

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_1 \times ((t > 0), t_i = \bar{t}_i \text{ on } S_2 \times (t > 0) \quad (12)$$

ここで、 $t_i = n_j (\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j}))$ 、 \bar{u}_i と \bar{t}_i は境界上で与えられた時間の関数、また、 $S = S_1 + S_2$ である。

3. 初期条件：

$$u_i^s|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_i^s|_{t=0} = 0 \text{ in } D \quad (13)$$

さらに、散乱波 $u_i^s = u_i - u_i^i$ は、遠方において放射条件²⁾を満たすことが要求される。この条件により、無限遠方からの散乱波成分の反射は D 内に存在しないこと

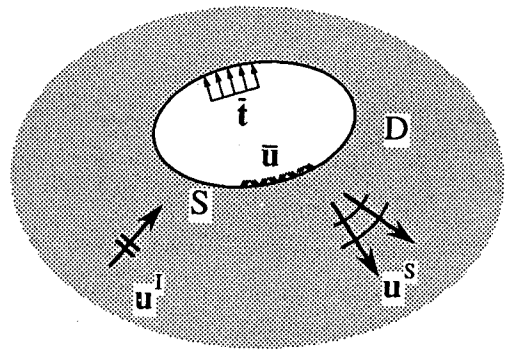


図-24 散乱問題

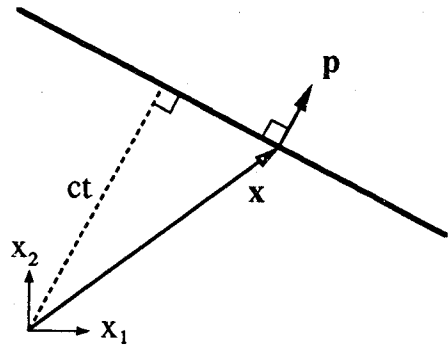


図-25 平面波

になる。

(2) 平面波とその利用

式 (11~13) で与えられる初期値境界値問題を解くために、平面波が利用される。平面波の一般形は次のように書ける。

$$u(x, t) = d f(p \cdot x - ct) \quad (14)$$

ここに、 f は任意の関数であり、 f を具体的に与えれば平面波の形が決まる。また、 d は変位の振動方向を、 p は波動の進行方向を表す単位ベクトルである。 $p \cdot x - ct = \text{一定}$ において、両辺を時間 t について微分すればわかるように、式 (14) は、関数 f の同一位相の点の集合²³⁾ が時間と共に進行し、この平面の p 方向への進行速度が c であることを意味している (図-25 参照)。

式 (14) の表現が支配方程式 (11) を満足するための条件として次式を得る。

$$(\mu - \rho c^2) d + (\lambda + \mu) (p \cdot d) p = 0 \quad (15)$$

この条件は、次の場合に満足される。

1. $d = p$ のとき、 $c^2 = c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$
2. $p \cdot d = 0$ のとき、 $c^2 = c_2^2 = \mu / \rho$

²³⁾ 第4章の内容と一部重複することになるが、部材強度分科会においても、骨組の座屈設計について研究活動が行われており、より議論を高めるため、ここにその成果を掲載する。

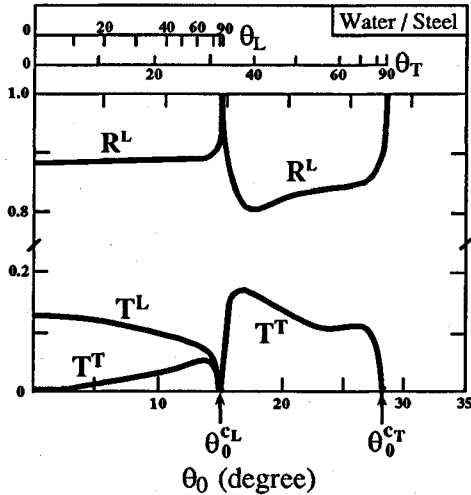
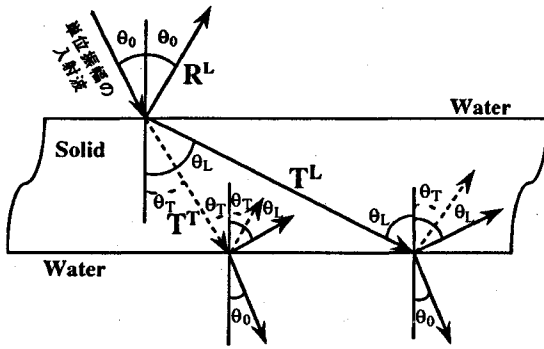


図-26 モード変換

1. の場合、式 (14) より変位場は非回転場 $\nabla \times u = 0$ となる。また、2. の場合は無発散場 $\nabla \cdot u = 0$ となる。速度 c_L で伝播する波動は、縦波 (L : longitudinal), あるいは P (primary, pressure) 波と呼ばれ、速度 c_T で伝播する波動は、横波 (T : transverse), あるいは S (secondary, shear) 波と呼ばれる。変位の偏向成分を意識するとき、横波は、 TV (vertically polarized T), TH (horizontally polarized T) と略称されることもある。

空中の音波、水中の超音波は縦波、電磁波は横波である。弾性波を特徴付ける性質の一つがモード変換、縦波入射に対して横波が発生 (あるいはその逆) する現象、である。境界条件、あるいはスネルの法則の帰結であるが、弾性波の利用という立場からも重要であるので、固体内波動の選別という立場から結果を要約する³³⁾。

図-26 (上側) は弾性板を水中に浸し、入射角 θ_0 で水中超音波を鋼材に向けて発信している様子を描いている。鋼材と水の境界面上の境界条件を満足するように、水中への反射縦波 R^L 、鋼材中への透過縦波 T^L 、透過横波 T^T が生じる。これら反射波、透過波の進行角度は各波動の速度と関係しており、 $\sin \theta_0 / c_0 = \sin \theta_L / c_L = \sin \theta_T / c_T$ となる。ここで、 c_0 は水中縦波の波速 (ほぼ

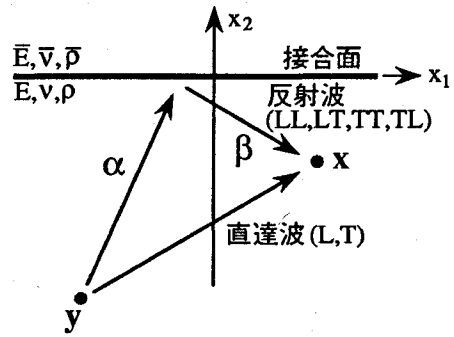


図-27 グリーン関数の平面波表現 ($\alpha=L, T; \beta=L, T$)

1480 m/s) である。図-26 の下側の図は、水中への反射波の反射率 R^L 、鋼材中への縦波の透過率 T^L 、横波の透過率 T^T を、水中の入射角の入射角 θ_0 に対してまとめたものである。入射角 $\theta_0 = 0^\circ$ のとき鋼材中には縦波だけが透過し、入射角が増加するにつれて縦波の透過率は減少するが横波の透過率が増大する。入射角 θ_0 が縦波の臨界角 $\theta_0^{cL} = \sin^{-1}(c_0/c_L)$ 以上になると縦波は鋼材表面を伝播し、鋼材内にはモード変換した横波だけが伝播する。 $\theta_0 = 17^\circ \sim 18^\circ$ 付近が最も効率良く横波を鋼材内に送信できる角度である。横波の臨界角 $\theta_0^{cT} = \sin^{-1}(c_0/c_T)$ で横波も表面波にモード変換し、これ以上の角度では鋼材内部を伝播する縦波、横波は存在しない。さらに入射角を大きくし、レイリー波の励起角 $\theta_0^{cR} = \sin^{-1}(c_0/c_R)$ (c_R はレイリー波の波速) になると、鋼材表面上にレイリー波が励起される。

異種材料の接合面上の境界条件を満足するグリーン関数が求まっていると都合がよいことが多い。接合面上に存在する界面剥離による散乱場を吟味することにより、界面剥離の諸性状を推定したい場合等である。目的に応じてこのグリーン関数を書き下すために、接合面における平面波の反射率、透過率を考慮することにより、波動 (2次元の場合円筒波、3次元の場合球面波) の平面波表現が利用できる。

図-27 に示すように異種材料が $x_2 = 0$ 面で接合されている場合、点 y の k 方向に単位の振動集中心力が作用しているときの接合条件を満たす点 x の i 方向の変位場は次のように書ける。

$$G_{ik}(x, y) = \sum_{\alpha=L, T} (D_{ik}^{\alpha}(x, y) + \sum_{\beta=L, T} R_{ik}^{\alpha\beta}(x, y)) \quad (16)$$

ここで、 D_{ik}^{α} は点 y から点 x に直接到達する縦波 (L) と横波 (T) を表しており、点源に対する無限体中のグリーン関数 (基本解) を平面波表現したもので、2次元問題の場合次のようになる。

$$D_{ik}^{\alpha}(x, y) = \frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{c_T}{c_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\nu^{aa})^{-1} d_i^{aa} d_j^{aa}$$

$$\times \exp(ik_{\alpha} p^{+\alpha\alpha} \cdot (x-y)) d\zeta \quad (17)$$

ここで

$$p^{\pm\alpha\beta} = \{c_{\beta}\zeta/c_{\alpha}, \pm\nu^{\alpha\beta}(\zeta)\} \quad (18a)$$

$$\nu^{\alpha\beta} = \{1 - (c_{\beta}\zeta/c_{\alpha})^2\}^{1/2} \quad (18b)$$

であり ($\Im\{\nu^{\alpha\beta}\} > 0$), $d^{\pm\alpha\beta}$ は変位の振動方向を表す単位ベクトルである。上式(17)は、振幅を

$$\frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{c_T}{c_{\alpha}}\right)^2 (\nu^{\alpha\alpha})^{-1} d_k^{+\alpha\alpha} \exp(ik_{\alpha} p^{+\alpha\alpha} \cdot y) \quad (19)$$

とする平面 $\alpha (=L, T)$ 波を各 ζ について重ね合わせた形式となっている。

式(16)中の $R_{ik}^{\alpha\beta}$ は界面で反射した LL 波, LT 波 TT 波, TL 波を意味しており, 式(17)の表現を基にして次のように書ける³⁴⁾。

$$R_{ik}^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{c_T}{c_{\alpha}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\nu^{\alpha\alpha})^{-1} d_k^{+\alpha\alpha} R^{\alpha\beta} d_i^{-\alpha\beta} \times \exp(i(k_{\beta} p^{-\alpha\beta} \cdot x - k_{\alpha} p^{+\alpha\alpha} \cdot y)) d\zeta \quad (20)$$

式(20)中の $R^{\alpha\beta}$ が平面 $\alpha (=L, T)$ 波が界面に入射した場合の $\beta (=L, T)$ 波としての反射率である。この反射率は、平面波の表現を界面上の変位と応力の連続条件に代入することにより解析的に決まる。反射率 $R^{\alpha\beta}$ が決まれば、式(16)右辺の全ての成分が決まり、グリーン関数が構成できる。積分の評価が残るが、これは最急降下法等³⁴⁾を利用すれば近似的に評価できる。

(3) 弾性波の伝播と分散性

媒質に境界が存在する場合には、境界条件との相互作用により平面波以外にもいろいろな形の波が現れる。以下にいくつかの例を挙げる。

第1の例として、表面波を考える。先の図-27において半空間 $x_2 > 0$ にのみ媒質が存在する場合を考えると、表面 $x_2 = 0$ を伝播する表面波の一般形は

$$u(x, t) = A e^{-bx} \exp[ik(x_1 - ct)] \quad (21)$$

と表される。ここに、 c は表面波の速度、 b は正の実数であり、 A は複素数の係数である。波の振幅は表面から遠ざかるほど小さくなる。

面内波動の場合にはよく知られたレイリー波が得られる³⁵⁾。たとえば、式(21)において、 $\mu(x_1, x_2, t)$, $u_3 = 0$ として運動方程式(11)および表面力を零とした境界条件(12)を考慮すると、レイリーの方程式

$$(2 - c^2/c_T^2)^2 = 4\sqrt{1 - c^2/c_T^2} \sqrt{1 - c_k^2/c_T^2} \quad (22)$$

が得られる。レイリー波の速度 $c < c_T < c_L$ はこの式を満足するように決定される。レイリー波の表面粒子の運動は逆行楕円軌道を描くことはよく知られている。

一方、面外波動 (TH 波: $u_1 = u_2 = 0$, $u_3(x_1, x_2, t)$) の場合には、単純な半空間には表面波は生じないが、半空間が別の媒質の層で被われているときにはラブ波とし

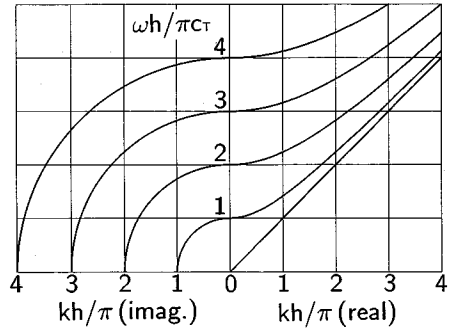


図-28 ウェイブガイドを伝播する波の分散曲線

て知られる表面波が発生する³⁶⁾。表面を覆う層の厚さを H 、表面層のせん断弾性波速度を c_T' とするとき、波の速度 c を決定する方程式は次のようになる。

$$\tan(kH\sqrt{c^2/c_T'^2 - 1}) = \frac{G\sqrt{1 - c^2/c_T'^2}}{G'\sqrt{c^2/c_T'^2 - 1}} \quad (23)$$

ここに、 G , G' は基底層および表面層のせん断弾性係数であり、 k は波の波数である。ラブ波の速度 (位相速度) は波数に依存し、分散性を有する。二種の媒質の境界面を伝播する波としてはストンレー波がある³⁶⁾。

次に、ウェイブガイドの例を考える。伝播する波の周波数によりその伝播速度 (位相速度) やエネルギーの伝播速度が異なる現象を波の分散という^{36), 37)}。さきのラブ波もその例であるが、分散性を持つ波の典型的な例はウェイブガイドを伝播する波である。ウェイブガイドとは波を伝播させる目的で作られた細い棒状の構造をいう。

簡単な例として、図-28に厚さ h の板を伝播する TH 波の分散曲線を示す³⁷⁾。横軸は波数 k 、縦軸は周波数 ω であり、無次元化して表現している。曲線の方程式は $(2h\omega/\pi c_T)^2 - (2kh/\pi)^2 = n^2$ である。多くの曲線が現れるのは変形モードの違いにより異なる伝播特性を有する波が生じることを示している。高いモードの波の場合には周波数がある程度以上大きくないと伝播しない³⁴⁾。位相速度 c は $\omega = kc$ の関係から求められるから、波数 k が 0 に近いところでは高次モードの位相速度は無限大に近づく。しかし、エネルギーの伝播速度である群速度 c_E は $c_E = d\omega/dk$ により決まるので、逆に $k = 0$ 付近でその値はきわめて小さくなる。すなわち、位相速度は大きくなってもエネルギーは伝播しにくくなる。ウェイブガイドを伝播する波の分散性は境界条件によって決まり、はりを伝播する弾性波の場合にも同様な分散性が生じる^{37), 38)}。

次に、内部構造を持つ媒質を伝播する波を考えよう。多結晶物体やコンクリート・岩石あるいは繊維強化材

³⁴⁾ その下限をカットオフ周波数という

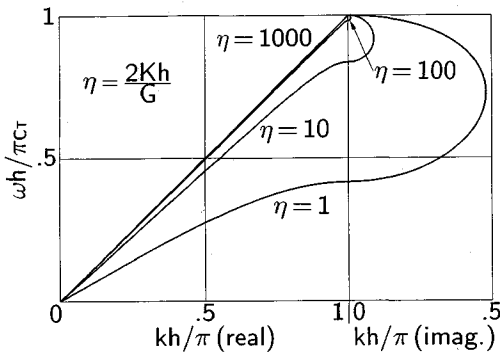


図-29 平行構造を垂直に伝播する波の分散曲線

などのような内部構造を持つ媒質では、物体内部にたくさんの界面(境界)をもっており、弾性波を複雑に反射・屈折あるいは減衰させる。したがって、それらの媒質を透過する波もまた分散性を有する。

一例を図-29に示す。平行に並んだ弱面を持つ媒質を弱面と垂直に伝播する波の0次モードの分散曲線である。波はTH波である。この場合、弱面はバネとして近似されており、バネの強度をパラメータとして分散曲線が描かれている。 h は弱面間の間隔である。また、座標系は図-28と同じように取っている。この場合の分散曲線はウェーブガイドの分散曲線と性向が異なる。周波数が大きくなると伝播性を失い(上限のカットオフ周波数を持つ)、位相速度は相対的に大きくなってもエネルギーは伝播しなくなる³⁹⁾。

図-28と図-29とを比較すれば、層状構造を持つ媒質では波の伝播方向によってその分散性に違いが生じることがわかる。この現象は実験的にも確認されており、媒質の内部構造を解明する手段として弾性波の分散性を利用しようという研究が進められている^{40), 41)}。

(4) 初期値境界値問題の解法

初期値境界値問題の解法は大きく次のように分類できる。

解析的方法	何らかの積分変換を用いることが多い。
半解析的方法	例えば、問題を積分方程式に書き換えて、これを数値計算する等の方法(BIEMは含まず)。
数値解法	FDM, FEM, BIEM (BEM) 等。 また、時間の取扱により次のように分類される。
時間域の解法	時間を陽に含んだ解法。
周波数域の解法	時間に関してフーリエ変換を使う。ラプラス変換はフーリエ変換の解析接続。

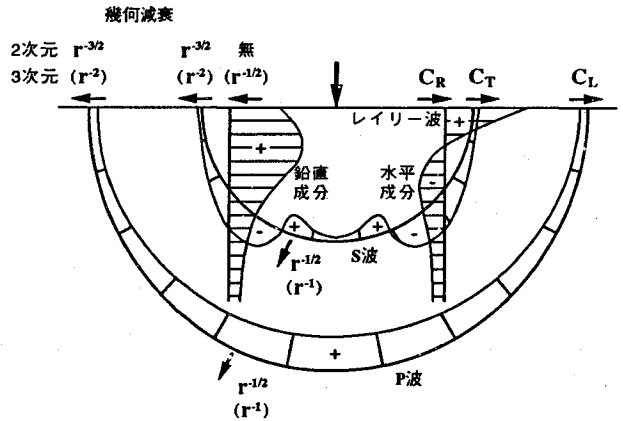


図-30 半無限体表面上の点波源により生じる波動

解析的に解ける代表的な問題として(例えば、参考文献32)参照), まず平面波, 表面波等の初等的に解けるものがある。より複雑なものとしては等方無限弾性体のグリーン関数(Stokesの解, 基本解), 半無限弾性体の表面に集中荷重が作用したときの解(Lambの解)等が挙げられる。また, クラック等の混合境界値問題も, Wiener-Hopfの方法によって解ける場合がある。これらの問題では解はしばしばフーリエ積分で書かれ, その評価にはCagniard-deHoopの方法がよく用いられる。その際, 極限吸収原理に基づいて積分経路を決定すると因果律が満たされる。その他, 変数分離法等の偏微分方程式の古典的解法によって解かれる問題や, 定常問題, 自己相似問題等の様に本質的に境界値問題(時間によらない)の解法で解かれる問題もある。なお, 2次元問題では異方性弾性体においても基本解, Lambの問題等が解析的に解ける。

一例として, 図-30に, 均質・等方半無限体表面上の一点に時間調和な振動集中外力が作用する場合に生じる縦波, 横波, レイリー波の様子(Lamb解)を示す⁴²⁾。

数値解法としては外部問題を直接扱うことができる境界積分方程式法が有利であるが, 不均一性や, 非線形性を扱うためにはFDM, FEMを使うのが普通である。ただし, これらによって外部問題を扱う場合には粘性境界や, 伝達境界等の工夫を用いないと解が汚染されることが知られている。

(5) 弾性波動場の近似解法

弾性波動の散乱問題の解を閉じた形で求めることができるのは球や楕円体等ごく限られた形状の散乱体に対してのみである⁴³⁾。そこで従前より様々な近似解法が提案され, 工学的諸問題に応用されてきた。散乱波の変位場 u^s の積分表現を, ここでは形式的に

$$u^s(x) = \int_S K(u(y), t(y)) dS_y \quad (24)$$

と表す³⁵⁾。この式より散乱体の境界 S 上の変位と表面力が与えられれば領域内の任意の点 x での散乱変位を求めることができる。一般に境界 S では変位あるいは表面力のいずれか一方が境界条件により与えられ、もう一方は未知である(節(1)を参照)。よって境界 S 上の未知量に適切な近似を導入すれば散乱波動場を再現できる。

低周波数域では、次のような近似^{(44), (45)}が可能である。入射波が $u^I = u^0 \exp(ik^0 p^0 \cdot x)$ なる平面波において、 $k^0 a \ll 1$ (a : 散乱体の代表長さ) である低周波数域では $\exp(ik^0 p^0 \cdot x) \approx 1$ であるから、入射波の応力場 σ^I は

$$\sigma^I \approx \sigma^0 \quad (25)$$

($\sigma_{ij}^0 = ik^0 C_{ijkl} u_k^0 p_l^0$) という一定値をとる。そこで、 $\sigma^I = \sigma^0$ である静的外力を受ける散乱体の境界上の変位 u^{st} と表面力 t^{st} を散乱波の積分表現に代入すると、

$$u^s(x) \approx \int_S K(u^{st}(y), t^{st}(y)) dS_y \quad (26)$$

を得る。これを準静的近似と呼ぶ。なお、入射波の位相変化を考慮して、境界 S 上の変位 u と表面力 t をそれぞれ

$$u(y) \approx u^{st}(y) \exp(ik^0 p^0 \cdot y) \quad (27a)$$

$$t(y) \approx t^{st}(y) \exp(ik^0 p^0 \cdot y) \quad (27b)$$

によって近似する方法もある。これを拡張された準静的近似と呼ぶ。

低周波数域では入射波と散乱体の相互作用は小さく、散乱波の振幅も小さいと考えられる。ボルン近似はこのような仮定の下で、境界 S 上の変位と応力を入射波の成分によって置き換える近似法である。このとき散乱波は

$$u^s(x) \approx \int_S K(u^0 \exp(ik^0 p^0 \cdot y), t^0 \exp(ik^0 p^0 \cdot y)) dS_y \quad (28)$$

となる。これは拡張された準静的近似の振幅 $u^{st}(y)$, $t^{st}(y)$ を入射波の振幅 u^0 , t^0 で置き換えたものに等しい。

高周波数域では、次のような近似⁽³⁴⁾が可能である。 $k^0 a \gg 1$ より高周波数域における近似解法としては波線理論がよく知られている。図-31 に示すように境界 S での非平面波の反射を考えよう。一般的な非平面波の変位場は

$$u^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\alpha 1} \rho_{\alpha 2}}} A_{\alpha}(t) d^{\alpha} \exp(ik_{\alpha} \phi_{\alpha}) \quad (29)$$

と書ける。ここに、 α は入射波が L 波, TV 波, TH 波のいずれであるかを表す指標であり、 $\rho_{\alpha 1}$ と $\rho_{\alpha 2}$ は入射波の波面の主曲率、 t は同一の波線上で一定値をとる関数、 A_{α} は振幅、 k_{α} は波数、 ϕ_{α} は位相、 d^{α} は変位の振動方向を表すベクトルである。境界 S が滑らかなとき、

³⁵⁾ 具体的な表現については、参考文献 32) あるいは 34) 参照。

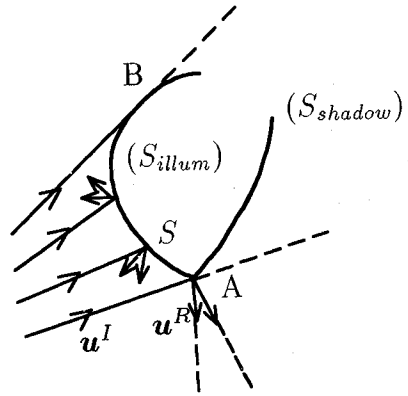


図-31 弾性波の反射と回折

反射波の変位 u^R は

$$u^R = \sum_{\beta=RLRTV, RTH} \frac{1}{\sqrt{\rho_{\beta 1} \rho_{\beta 2}}} R_{\beta}^g(\theta_{\alpha}) A_{\alpha}(t) d^{\beta} \exp(ik_{\beta} \phi_{\beta}) \quad (30)$$

となる。ここに、 $R_{\beta}^g(\theta_{\alpha})$ は平面入射 α 波から平面反射 β 波への反射係数を表す。 $\sqrt{\rho_{\beta 1} \rho_{\beta 2}}$ の項を除けば、形式的に平面反射波の表現に一致するが、入射波面の曲率や反射境界の曲率、境界条件等の影響が反射波の波面の主曲率 $\rho_{\beta 1}$ と $\rho_{\beta 2}$ に含まれることに注意されたい。 u^I と u^R の和からなる波動場を幾何学的動弾性場 (geometrical elastodynamics (GE) field) と呼ぶ。GE 場は十分な高周波の領域においてよい近似を与えるが、図-31 に示すように入射波の波線が境界 S と接する点 B や、境界 S が不連続となる点 A の近傍では GE 場は不連続となり、近似精度が低下する。また、直接入射波が入射しない境界 S_{shadow} における波動の回折現象等も GE 場では説明できない。このような場合には不連続な GE 場を連続にするような回折波を考慮する必要がある。回折波を扱う近似理論は geometrical theory of diffraction (GTD) と呼ばれる。GTD では、まず、簡単な標準問題 (canonical problem) の近似解を求めておき、その後、入射波の波面の曲率や反射境界の曲率等の影響に対する補正を行う。例えば、有限な平面クラックの散乱問題に対する標準問題には半無限平面のクラックに平面波が入射する問題が用いられる。また、有限なクラックに対しては、一方のクラック先端による回折波が他のクラック先端によって再び散乱されるので、多重回折の影響も考慮しなければならない。

高周波数域での波動場の第 1 次近似である GE 場 (u^{ge} , t^{ge}) を散乱波の積分表現に代入すると

$$u^s(x) \approx \int_{S_{illum}} K(u^{ge}(y), t^{ge}(y)) dS_y \quad (31)$$

を得る。ここに、 S_{illum} は入射波が直接入射する境界である。この表現をキルヒホフ近似と呼ぶ。

近似解法の応用例として、高周波数域における境界要素解析が挙げられる。境界要素解析で解くべき方程式は

$$a(x) = \int_S K(x, y) b(y) dS_y \quad (32)$$

と書ける。高周波数域では波動の波長が短くなり、それに伴って未知数 b の変動周期も短くなる。したがって、一般に高周波数域での境界要素解析では相当数の要素分割を必要とする。Roberts⁴⁶⁾ や中川ら⁴⁷⁾ はこの問題を解決するため、未知数 b を

$$b(y) = \sum_m E^m(y) \exp(i\phi_m(y)) \quad (33)$$

の形に書き改めた。位相 ϕ_m は波線理論により容易に求められるから、比較的変動の緩やかな振幅 E^m を未知数とする方程式系を構成することができ、高周波数域でも少ない要素数で精度の良い解を得ることができる。

次に線形化逆解析⁴⁸⁾ が近似解法の応用として挙げられる。欠陥の形状や大きさを求める逆問題は一般に非線形問題として定式化される。そのような逆問題の一解析手法に線形化逆解析法があるが、ボルン近似やキルヒホフ近似はその線形化において重要な役割を果たす。今、欠陥が2次元平面内の空洞であるとして、変位が $u^i(y) = u^0 p^0 \exp(ik_L p^0 \cdot y)$ で与えられる平面 L 波が入射するものとする。このとき、 $x(=x/|x|) = -p^0$ なる後方遠方での散乱 L 波成分は次のように書ける。

$$u_i^s(x) \approx A_i(k_L, \hat{x}) \sqrt{\frac{2}{\pi k_L |x|}} \times \exp(i(k_L |x| - \pi/4)) \quad (34)$$

ただし、 A_i は

$$A_i(k_L, \hat{x}) = \frac{k_L}{4(\lambda + 2\mu)} \hat{x}_i \hat{x}_m \hat{x}_k C_{ijmk} \times \int_S n_j(y) \exp(-ik_L \hat{x} \cdot y) u_j(y) dS_y \quad (35)$$

である。上式にボルン近似 $u_j(y) = u_j^0(y)$ for $y \in S$ を代入すると

$$A_i(k_L, \hat{x}) = \frac{i u^0 \hat{x}_i k_L^2}{2} \int_V \exp(-2ik_L \hat{x} \cdot y) dV_y \quad (36)$$

となる。ここに、 V は空洞が占める領域である。上式の右辺の体積積分は

$$\Gamma(y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y \in V \\ 0 & \text{for } y \notin V \end{cases} \quad (37)$$

で定義される特性関数 Γ のフーリエ変換に他ならない。特性関数 Γ は空洞の形状を表すから、遠方で得られた散乱波の振幅 A_i を式 (36) に代入して右辺の積分値を求め、逆フーリエ変換すれば、特性関数 Γ 、すなわち空洞の形状が決定できる。

5. あとがき

応用固体力学小委員会の活動と最近の固体力学のト

ピックスについて紹介した。本文のまとめとして、応用固体力学の発展の過程と今後の展望について簡単にまとめる。

17世紀から、フックやコーシーらによって形作られた変形の力学、連続体の力学について、今世紀の始め、コセラ兄弟による一つの新しい一般化が提出された。フックと同じ時期にニュートンによって作られた運動の力学が、やはり今世紀の始めアインシュタインによって相対性理論として一般化されたのと酷似した経過をたどったといえる。しかし、コセラの力学は約50年も空論として埋もれ、1950年代になってようやく注目されるようになった。すなわち、クレナー、ミンドリン、エリゲンらによって、材料の微視構造を解析に取り入れた一般化された連続体力学の研究が始められた⁴⁹⁾。これが今日のマイクロメカニクス⁵⁰⁾として大きく発展し、20世紀の応用力学の中核となった分野である。

マイクロメカニクスは、ミクロの解析からマクロの性質を解明しようとするアプローチである。そして材料の力学の分野では、これまで大きい成果を上げてきたといえる。しかし、土木工学では特に必要なことであるが、力学の応用をもっと拡大して考える場合、将来マクロからミクロにアプローチするマイクロメカニクスとも呼ぶべき研究も必要ではないかと思われる。これは、力学の対象を拡大して巨大システムの挙動予測や最適制御を目標と考える場合、システムの個々の構成要素のミクロ的な挙動から巨大システムのマクロ的な性質を解明することがマイクロメカニクスであり、これとは逆に、巨大システムのマクロ的な性質から構成要素のミクロ的な挙動の理解を図ることがマイクロメカニクスとなる。ここでは詳細に立ち入らないが、土木工学の殆どあらゆる分野で環境問題が重視されているようになってきていることを考えると、

⁵⁰⁾ マイクロメカニクスに関連した、今後の発展の方向ないし課題についていくつか指摘しよう。まず、材料の微視構造をそのまま取り扱おうとすれば、従来用いられてきた連続体像は適合しないので、離散体像を取り入れなければならない。また、連続体の解析に用いられてきた微分積分も用いられないので、統計を取り入れたマトリックス解析に基づく離散演算に直さなければならない。従来、離散化手法はFEMのように、主に連続体の数値解析のために研究されてきたので、このように本来離散的なもの、不規則で不均一性を持つ離散体についての解析の手法は、数学の段階でもまだ研究が十分に進展していないのが現状である。離散と連続との対応を究明することは、数学の分野として重要なばかりではなく、連続体力学にとっても究極の課題といえることができる。なお、次のことにも注意しなければならない。それは微視構造といっても段階があることである。これは丁度素粒子論に類似している。例えば、現在、地盤材料の力学挙動の研究のために粒状体モデルによる力学構成やシミュレーション解析が行われている。この場合、粒子を剛体と仮定し、接触点において簡単な弾性と摩擦法則を考えているのが普通である。しかし、もし摩擦についてさらに微視的メカニズムを考察するならば、一ランク高い微視構造を考えることが必要になり、一ランク高いマイクロメカニクスに進むことになる。

環境という超巨大システムや多数の環境要因という広い問題に対応してゆく力学は、まさにマクロメカニクスではないかと思われる。

以上、マイクロメカニクスを中心にして、応用力学についての展望と若干の考察を述べた。土木工学は夢のある学問といわれるが、応用力学はその夢を裏付け、また大きく広げる役割を担ってきたように思われる。このような応用力学の重要さがさらに広く認識されるときに、応用力学が土木工学の広い分野にさらに活用され、役立てられることを願うものである。

本報告の主な執筆担当は、以下の通りである。第1・2章：小林委員長；第3章：奥井委員，京谷委員，堀委員；第4章：北原委員，西村委員，広瀬委員，福井委員；第5章：佐武委員。なお、ショートセミナーの際やその他の機会に、大勢の委員やオブザーバーとの議論により、マイクロメカニクスと波動工学の新しい概念がいくつか整理された。貴重な意見や示唆に対して謝意を表す。また、土木学会事務局の黛巖氏には、委員会の事務手続き等色々お世話になった。記して感謝の意を表する。

付録1 応用固体力学小委員会の活動

本小委員会は、約2カ月に一回の割合で開催した。各会合では講演ならびにそれに対する議論が中心となっていた。また、テーマによってはオブザーバとして委員以外の会員の参加を呼びかけ、講演をより広く公開することを試みた。ここでは、個々の講演内容について述べる余裕はないが、活動の輪郭を知っていただく意味で、講演者（敬称略）と講演題目を下に記すことにする。

- 1 岸野祐次（東北大工） 定量非破壊評価の現状
- 2 堀 宗朗（東大工） マイクロメカニクス，北原道弘（東海大海洋） 波動関連問題
- 3 大中康譽（東大地震研） 地震発生機構，堀井秀之（東大工） 応用力学における種々の話題
- 4 嶋本利彦（東大地震研） 岩石のレオロジー，前川宏一（東大工） コンクリートの力学問題
- 5 新妻信明（静岡大理） 日本列島の変形挙動の解明とキャラクターゼーション，矢富盟祥（金沢大工） 弾塑性体の平面ひずみ圧縮試験における分岐解析，E積分によるエネルギー開放率の数値解析
- 6 中村俊哉（東大工） 熱力学に基づく構成則や損傷の理論，椿龍哉（横浜国大工） コンクリートの力学特性の問題，ショートセミナー：波動工学の基礎，北原道弘（東海大海洋），福井卓雄（福井大工）
- 7 ショートセミナー：波動工学の適用，西村直志（京大工），廣瀬壮一（岡山大工）
- 8 澤田純男（京大工） 動的破壊モデルによる地震断層の破壊過程の解析，谷和夫（電中研） 断層に関

する実験と解析

- 9 長谷部宣男（名工大工） 最近の破壊力学に関する研究，常行真司（東大物性研） 分子動力学を用いた地球核内物質の物性に関する研究
- 10 ショートセミナー：マイクロメカニクスの基礎と応用，奥井義昭（埼玉大工），京谷孝史（名大工），堀 宗朗（東大工）
- 11 登坂宣好（日大生産工） フィルター理論による分布定数係数逆解析問題の解析，小林昭一（京大工） 応用力学の将来展望

これから、話題の広さとその斬新さが伺い知れるであろう。講演はいずれも大変興味深いものであり、活発な議論が展開された。その個々の内容については、委員会報告として限られた紙面にまとめることは不可能であるので、割愛する。

参考文献

- 1) Weng, G.J., Taya, M. and Abe, H. (eds.): *Micromechanics and inhomogeneity*, - The T. Mura 65th anniversary volume, Springer-Verlag, New York, 1990.
- 2) Aboudi, J.: *Micromechanics of composite materials - A unified micromechanical approach*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- 3) Hashin, Z.: *Analysis of composite materials - A survey*, *J. Appl. Mech.*, Vol.50, pp.481-505, 1983.
- 4) Wilde, W.P. and Blain, W.R. (eds.): *Composite materials design and analysis, Proc. second international conference on computer aided design in composite material technology*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- 5) Mazdiyasi, K.S.: *Fiber reinforced ceramic composites*, Noyes, New Jersey, 1990.
- 6) 地盤の破壊とひずみの局所化に関する研究委員会：地盤の破壊とひずみの局所化，土質工学会，1994.
- 7) Hill, R.: *The elastic behavior of a crystalline aggregate*, *Proc. Phys. Soc., London, A*, Vol.65, pp.349-354, 1952.
- 8) Hill, R.: *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.79-95, 1967.
- 9) 金 有性，龍岡 文夫：堆積軟岩の三軸圧縮試験におけるせん断層の発生，土木学会第47回年次学術講演会，講演概要集III，pp.34-35，1992.
- 10) Sanchez-Palencia, E.: *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Note in Physics, No. 127, Springer, 1980.
- 11) Lions, J.L.: *Some Methods in the Mathematical Analyses of systems and their Control*, Science Press, Beijing, 1981.
- 12) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: *Preprocessing and Post-processing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods*, *Computer Methods in Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 13) 京谷 孝史，渡嘉 敷：Homogenization法による琉球石

- 灰岩の力学特性評価について，地下亀裂に関するワークショップ、資源 素材学会，1992.
- 14) Nemat-Nasser, S. and Hori, M. : *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials*, Elsevier, 1993.
 - 15) Mura, T. : *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff, 1987.
 - 16) Brace, W.F. and Bonbolakis, E.G. : A Note on Brittle Crack Growth in Compression, *J. Geophys. Res.*, Vol.68, pp.3709-3713, 1963.
 - 17) Okui, Y., Horii, H. and Akiyama, N. : A continuum theory for solids containing microdefects, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.31, No.5, pp.735-749, 1993.
 - 18) Moss, W.C. and Gupta, Y.M. : A constitutive model describing dilatancy and cracking in brittle rocks, *J. Geophys. Res.*, Vol.87, pp.2985-2998, 1982.
 - 19) Ashby, M.F. and Hallam S.D. : The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states, *Acta metall.*, Vol.34, No.3, pp.497-510, 1986.
 - 20) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.10, pp.343-352, 1962.
 - 21) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : A variational approach to the theory of the magnetic permeability of multiphase materials, *J. Appl. Phys.*, Vol.33, pp.3125-3131, 1962.
 - 22) Willis, J.R. : Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.25, pp.185-202, 1977.
 - 23) Torquato, S. : Random heterogeneous media : microstructure and improved bounds on effective properties, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.42, No.2, pp.37-76, 1991.
 - 24) Franfort, G.A. and F. Murat, F. : Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *Archive Rat. Mech. and Analysis*, Vol.94, pp.307-334, 1986.
 - 25) Milton, G.W. : On characterizing the set of possible effective tensors of composites : the variational method and the translation method, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol.43, pp.63-125, 1990.
 - 26) Milton, G.W. and Kohn, R. : Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.36, pp.597-629, 1988.
 - 27) Bear, J. and Buchlin, J.M. : *Modeling and Applications of Transport Phenomena in Porous Media*, Kluwer, Dordrecht, 1987.
 - 28) Bear, J., Tsang, C-F. and Marsily, G. : *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, Academic Press, San Diego, 1993.
 - 29) Oda, M. : Permeability tensor for discontinuous rock masses, *Geotechnique*, Vol.35, No.4, pp.483-495, 1985.
 - 30) Oda, M. : An equivalent continuum model for coupled stress and fluid flow analysis in jointed rock masses, *Water Resources Research*, Vol.22, No.13, pp.1845-1856, 1986.
 - 31) 堀 宗朗, 山口 栄輝, 細川 直行 : 岩盤浸透流問題の逆解析の新しい定式化とベイズ推定の適用, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.445-450, 1994.
 - 32) Eringen, C.A. and Suhubi, E.S. : *Elastodynamics, Vol.2 Linear Theory*, Academic Press, 1975.
 - 33) Thompson, R.B. and Thompson, D.D. : Ultrasonics in nondestructive evaluation, *Proc. of the IEEE*, Vol.73, pp.1716-1755, 1985.
 - 34) Achenbach, J.D., Gautesen, A.K. and McMaken, H. : *Ray Methods for Waves in Elastic Solids*, Pitman Advanced Pub., 1982.
 - 35) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F. : *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.
 - 36) 佐藤泰夫 : 弾性波動論, 岩波書店, 1978.
 - 37) Achenbach, J.D. : *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 1975.
 - 38) Kim, Y.Y. : Uncoupled wave systems and dispersion in an infinite solid cylinder, *J. Appl. Mech.*, Vol.56, pp.347-355, 1989.
 - 39) 福井卓雄 : 岩石の圧縮破壊過程の弾性波応用計測法に関する一考察, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.521-530, 1991.
 - 40) Plona, T.J., Winkler, K.W. and Schoenberg, M. : Acoustic waves in alternating fluid/solid layers, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.81, pp.1227-1234, 1987.
 - 41) Rose, J.L., Nayfeh, A. and Pilarski, A. : Surface waves for material characterization, *J. Appl. Mech.*, Vol.57, pp.7-11, 1990.
 - 42) Woods, R.D. : Scattering of surface waves in soils, *J. Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE*, Vol.94, SM4, pp.951-979, 1968.
 - 43) Pao, Y-H. and Mow, C.C. : *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York, 1973.
 - 44) Gubernatis, J.E., Krumhansl, J.A. and Thomson, R.M. : Interpretation of elastic-wave scattering theory for analysis and design of flaw-characterization experiments : The long-wavelength limit, *J. Appl. Phys.*, Vol.50, pp.3338-3345, 1979.
 - 45) Gubernatis, J.E., Domany, E., Krumhansl, J.A. and Huberman, M. : The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws, *J. Appl. Phys.*, Vol.48, pp.2812-2819, 1977.
 - 46) Roberts, R.A. : High-frequency elastodynamic boundary integral equation inversion using asymptotic phase information, D.O. Thompson and D.E. Chimenti (eds.), *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol.12A, Plenum Press, New York, pp.41-48, 1993.
 - 47) 中川克也, 北原道弘 : 高周波域積分方程式の Kirchhoff 近似と数値解析法, 境界要素法論文集, Vol.9, pp.175-180, 1992.
 - 48) Hirose, S. : Inverse scattering for flaw type classification, M. Tanaka and H.D. Bui (eds.), *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Springer, Berlin, pp.359-366, 1993.
 - 49) Kröner, E. (ed.) : *Mechanics of Generalized Continua*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

(1994.11.7 受付)